ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 25

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1961

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 3—20

О. А. ОЛЕЙНИК

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе указан новый подход к решению краевых задач для уравнений с разрывными коэффициентами. Проведено построение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и решения первой краевой задачи для общего параболического уравнения с разрывными коэффициентами в предположении, что поверхности разрывов коэффициентов параболического уравнения могут зависеть от времени.

1. В настоящей работе мы рассматриваем задачу Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами и первую краевую задачу для общего параболического уравнения с разрывными коэффициентами в предположении, что поверхности разрывов коэффициентов параболического уравнения могут зависеть от времени. Решение этих задач для уравнений с разрывными коэффициентами мы получим как предел решений соответствующих задач для уравнений с гладкими коэффициентами, приближающимися к заданным разрывным. Этот прием с использованием априорных оценок С. Н. Бернштейна применялся в нашей работе ([1]). Использование интегральных априорных оценок решений эллиптических и параболических уравнений и применение теорем вложения С. М. Никольского ([2]) позволяют рассмотреть эти задачи в общем виде. Наше главное внимание будет уделено построению классических решений рассматриваемых задач. В некоторых случаях оказывается полезным рассмотрение также и обобщенных решений этих задач.

Построение решений задач для уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами может быть проведено по единой схеме. Однако мы проводим построение классического решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами с использованием обобщенного решения, а классическое решение задачи для параболического уравнения строим непосредственно с тем, чтобы полнее проиллюстрировать возможности указанного метода.

Отметим, что этот метод применим для решения нестационарных задач дифракции, т. е. для уравнений гиперболического типа с разрывными коэффициентами [см. ([14])], для решения задач с условиями на поверхностях разрыва коэффициентов, отличными от рассмотренных ниже, а также для уравнений высших порядков. Результаты настоящей работы могут быть использованы для нахождения приближенного решения рассматриваемых задач для уравнений с разрывными коэффициентами.

Изучению уравнений с разрывными коэффициентами посвящено большое число работ [см., например, ([3]), ([4])]. Краткое изложение основных результатов настоящей статьи содержится в работе ([5]).

2. Уравнения эллиптического типа. Будем рассматривать эллиптические уравнения вида

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)\,u = f(x), \qquad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $\sum a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geqslant 0$, $c \leqslant 0$ и $c < 0$, если $f \not\equiv 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, a_{ij}, b_i, c, f — достаточно гладкие функции всюду в области Ω, кроме точек некоторых гладких $(n-1)$-мерных поверхностей, где эти коэффициенты могут иметь разрывы первого рода. Эти поверхности разбивают Ω на конечное число областей Ω_i $(i = 1, \ldots, m)$. Поверхность, которая служит границей областей Ω_k и Ω_l, обозначим через S_{kl}, через σ обозначим границу Ω, через S — множество точек всех S_{kl} $(k, l = 1, \ldots, m)$.

Решением задачи Дирихле для уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$, непрерывную в $\Omega + \sigma$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega - S$ и условиям:

$$u|_\sigma = \varphi, \qquad (2)$$

$$a_k \frac{du}{dN_k} = a_l \frac{du}{dN_l} \quad \text{на } S_{kl}, \qquad (3)$$

где φ — заданная непрерывная функция на σ, $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — некоторая заданная гладкая положительная функция в $\overline{\Omega}_j$, $\frac{du}{dN_k}$ и $\frac{du}{dN_l}$ — производные по направлению конормали, взятые в точках S_{kl} для значений коэффициентов a_{ij} соответственно по обе стороны S_{kl}, т. е.

$$\frac{d}{dN} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\cos(n, x_j)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

где n — направление нормали S_{kl}. Такую функцию $u(x)$ будем называть классическим решением задачи Дирихле для уравнения (1).

Обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$ из класса $W_2^1(\Omega)$ [см. ([6])], если $u(x)$ удовлетворяет условию (2) и при любой функции $F(x)$ из класса $W_2^1(\Omega)$, равной нулю на σ, выполняется равенство:

$$\iint\limits_{\Omega}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} a a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}F - {} - \sum_{i=1}^{n} a b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}F - acuF + afF\Bigg]\,d\Omega = 0, \qquad (4)$$

где $a(x_1, \ldots, x_n)$ — функция в Ω, совпадающая с функцией $a_j(x_1, \ldots, x_n)$ в точках Ω_j. Легко проверить, что всякое классическое решение задачи (1) — (3), принадлежащее $W_2^1(\Omega)$, является также и обобщенным решением этой задачи.

Доказательство единственности классического решения задачи (1) — (3). Для классического решения $u(x)$ задачи (1) — (3) при $f \equiv 0$ справедлив принцип максимума, т. е. наибольшее и наименьшее значения решения этой задачи достигаются на σ, так как

если $u(x)$ отлична от постоянной, то наибольшее или наименьшее значение функция $u(x)$ не может принимать в точках S в силу леммы 1 работы ([7]) и условия (3). Отсюда следует теорема единственности.

Доказательство единственности обобщенного решения. Будем предполагать, что $b_i \equiv 0$ и a_i постоянны в Ω_i. Пусть u_1 и u_2 — два обобщенных решения задачи (1) — (3). Тогда, вычитая равенства (4) для u_1 и u_2 и взяв за F функцию $u_1 - u_2$, получим:

$$\iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} aa_{ij} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x_j} - ac (u_1 - u_2)^2 \right] d\Omega = 0,$$

откуда, в силу эллиптичности уравнения (1) и условия $c \leqslant 0$, следует, что

$$u_1 - u_2 \equiv 0.$$

Теорему единственности обобщенного решения задачи (1) — (3) можно аналогично доказать и в более общих предположениях о коэффициентах уравнения (1) и функции a, например если $c < 0$ по модулю достаточно велико.

Доказательство существования обобщенного решения задачи (1) — (3). Пусть функция φ в условии (2) допускает ограниченное продолжение на Ω, принадлежащее классу $W_2^1(\Omega)$. Обобщенное решение $u(x)$ задачи (1) — (3) мы получим как предел при $h \to 0$ решений u^h в Ω уравнения

$$L_h(u^h) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} B_i^h \frac{du^h}{dx_i} + C^h u^h = F^h \qquad (5)$$

с условием $u^h|_\sigma = \varphi$, где A_{ij}^h, B_i^h, C^h, F^h — гладкие функции, равномерно ограниченные по h и сходящиеся в среднем при $h \to 0$ соответственно к

$$aa_{ij}, \quad -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} a_{ij} + ab_i, \quad ac, \quad af; \qquad \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^h \alpha_i \alpha_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2,$$

$\lambda > 0$ и не зависит от h, $C^h \leqslant 0$ и $C^h < \beta < 0$, если $f \not\equiv 0$.

Согласно принципу максимума [см. ([7])], функции u^h равномерно ограничены по модулю в Ω:

$$|u^h| \leqslant \max |\varphi| + \frac{\max |F^h|}{\beta}, \text{ если } f \not\equiv 0,$$

и

$$|u^h| \leqslant \max |\varphi|, \qquad \text{если } f \equiv 0.$$

Легко показать, что u^h равномерно ограничены по h и в $W_2^1(\Omega)$. Действительно,

$$-\iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} B_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} + C^h u^h - F^h \right] (u^h - \varphi) \, d\Omega =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n} B_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} + C^h u^h - F^h \right) (u^h - \varphi) \right] d\Omega = 0.$$

Отсюда, пользуясь тем, что

$$2\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\beta^2 \quad (6$$

при любых α, β и ε, и произведя элементарные преобразования, получим

$$\iint\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} d\Omega \leqslant C_1,$$

где постоянная C_1 не зависит от h.

Решения u^h удовлетворяют следующему тождеству при любой глад-кой функции F, обращающейся в нуль на σ:

$$\iint\limits_{\Omega} \Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} B_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} F - C^h u^h F + F^h F \Big] d\Omega = 0.$$

Из последовательности u^h можно выбрать подпоследовательность u^{h_k} сходящуюся в среднем при $h_k \to 0$ к функции $u(x)$, принадлежащей $W_2^1(\Omega)$ причем $\frac{\partial u^{h_k}}{\partial x_i}$ сходятся слабо к $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ при $h_k \to 0$. При этом очевидно, чт $A_{ij}^{h_k} \frac{\partial u^{h_k}}{\partial x_i}$, $B_i^{h_k} \frac{\partial u^{h_k}}{\partial x_i}$ сходятся слабо к

$$a a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad a b_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} a_{ij}.$$

Переходя в предыдущем равенстве к пределу при $h_k \to 0$, мы получи равенство (4). Так как все u^h удовлетворяют условию (2) и равномерн ограничены в $W_2^1(\Omega)$, то и $u(x)$ удовлетворяет условию (2), согласн теоремам вложения [см. (6)]. Таким образом, предельная функция u(з является обобщенным решением задачи (1) — (3).

Доказательство существования классического ре-шения задачи (1)—(3). Покажем, что полученное обобщенное реше-ние $u(x)$ задачи (1)—(3) является классическим, если коэффициент уравнения (1) вне S имеют достаточное число ограниченных произво ных. В точках Ω, не принадлежащих S, функция $u(x)$ имеет непреры ные производные до порядка $k+2$ включительно и удовлетворяет ура нению (1), если коэффициенты a_{ij}, a и b_i, c, f в этих точках имею производные соответственно $k+1$-го и k-го порядка, удовлетворяющи условию Гёльдера $(k \geqslant 0)$. Это следует, например, из априорных оц нок Шаудера (8) для решений эллиптических уравнений второго порядк а также из известных теорем о гладкости обобщенных решений эллипти ческих уравнений.

Исследуем дифференциальные свойства $u(x)$ в окрестности S. Дл этого установим некоторые оценки производных от функций u^h, пред лом которых является функция $u(x)$.

В силу единственности обобщенного решения, функция $u(x)$ не зави сит от специального выбора аппроксимирующих коэффициентов A_{ij}^h, B C^h и F^h в уравнении (5). Выберем эти коэффициенты в некоторой мал окрестности ω точки P_0 из S так, чтобы в локальных коорд натах $y_1, \ldots, y_n$, при которых P_0 является началом координат и коо динатная плоскость $y_n = 0$ совпадает с поверхностью разрыва коэ

фициентов, они были усреднениями [см. ([6]), стр. 18] соответствующих функций

$$a_{ij}, \quad ab_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} a_{ij}, \quad ac, \quad af.$$

Очевидно, что при этом A^h_{ij}, B^h_i, C^h и F^h имеют в ω равномерно ограниченные по h производные по $y_1, \ldots, y_{n-1}$ до порядка k, если коэффициенты a_{ij}, b_i, c, f и $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ имеют ограниченные производные до порядка k в $\omega - S$.

Будем оценивать в окрестности P_0 производные от u^h. Оценим сначала производные первого порядка. Эту оценку мы проведем независимо от полученной выше тем же путем, что и для производных высшего порядка. Запишем уравнение (5) в координатах y_i:

$$\sum_{k,l,i=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta^h_{il} \frac{\partial u^h}{\partial y_l}\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma^h_i \frac{\partial u^h}{\partial y_i} + C^h u^h = F^h, \tag{7}$$

где α_{ki} — гладкие функции, определяемые преобразованием координат от x_i к y_i, а β^h_{il} и γ^h_i — линейные комбинации A^h_{ij} и B^h_i с коэффициентами, не зависящими от h. Умножим уравнение (7) на $u^h V_1$, где

$$V_1 = \prod_{i=1}^{n} (y_i^2 - \alpha^2)^2$$

и $\alpha > 0$ — некоторое достаточно малое число, и проинтегрируем по области $\omega_1 \{|y_i| \leqslant \alpha,\ i = 1, \ldots, n\}$. Интегрируя по частям, получим (для сокращения записи значок h мы опускаем):

$$0 = \iint\limits_{\omega_1} V_1 u \left[\sum_{k,l,i=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\beta_{il} \frac{\partial u}{\partial y_l}\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu - F \right] d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{\omega_1} \left[- \sum_{k,l,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}(V_1 u \alpha_{ki}) \beta_{il} \frac{\partial u}{\partial y_l} + V_1 u \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + V_1 C u^2 - V_1 u F \right] d\Omega.$$

Отсюда следует:

$$\iint\limits_{\omega_1} \sum_{k,l=1}^{n} V_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \beta_{il} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_l} d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_1} \left[- \sum_{k,l,i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}(V_1 \alpha_{ki}) \beta_{il} \frac{\partial u}{\partial y_l} u + \sum_{i=1}^{n} V_1 u \gamma_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + V_1 C u^2 - V_1 u F \right] d\text{[illegible]}$$

После элементарных преобразований, используя неравенст[illegible] ([illegible]), [illegible]айдем:

$$\iint\limits_{\omega_1} V_1 \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_l} d\Omega \leqslant \frac{1}{2} \iint\limits_{\omega_1} \Bigg[\varepsilon_1^2 V_1 \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y_l}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} V_1 \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i,k=\text{[illegible]}}^{n} \frac{\partial \text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} \text{[illegible]}_{l} u \right)^2 +$$

$$+ \varepsilon_2^2 V_1 \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y_l}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k,i=1}^{n} \frac{\frac{\partial V_1}{\partial y_k} \alpha_{ki} \beta_{il}}{\sqrt{V_1}} \right)^2 + \varepsilon_3^2 V_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon_3^2} \sum_{i=1}^{n} V_1 (u\gamma_i)^2 + 2(V_1 C u^2 - V_1 u F) \Bigg] d\Omega,$$

где ε_1, ε_2 и ε_3 — произвольные числа,

$$\gamma_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \beta_{il},$$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \xi_k \xi_l \geqslant \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2.$$

Так как величины $\frac{\partial V_1}{\partial y_i} \Big/ \sqrt{V_1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ограничены, то при достаточно малых ε_1, ε_2 и ε_3 получим:

$$\iiint_{\omega_1} V_1 \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{kl} \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_l} d\Omega \leqslant C_2$$

и

$$\iiint_{\omega_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2 d\Omega \leqslant C_3,$$

где ω_2 — параллелепипед $\left\{|y_i| \leqslant \frac{\alpha}{2}\right\}$, а постоянные C_1, C_2 не зависят от h.

Пусть ω_l — область $\left\{|y_i| \leqslant \frac{\alpha}{l}\right\}$. Предположим, что мы показали, что u^h имеют равномерно по h ограниченные в $L_2(\omega_{k+1})$ производные вида

$$\frac{\partial^k u^h}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}} \partial y_i} \quad (i = 1, \ldots, n, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + 1 = k).$$

Покажем, что в области ω_{k+2} равномерно ограничены по h в норме $L_2(\omega_{k+2})$ также производные

$$\frac{\partial^{k+1} u^h}{\partial y_1^{k_1'} \ldots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}'} \partial y_i} \quad (i = 1, \ldots, n, \quad k_1' + \ldots + k_{n-1}' = k),$$

если коэффициенты a_{ij}, b_i, c, $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ и f имеют ограниченные производные порядка k вне $\omega - S$. Применяя обозначения С. М. Никольского (2), получим, что функции $v^h = u^h \psi$, где ψ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторой области $\widetilde{\omega} \subset \omega_{k+1}$ и тождественно равная 1 в окрестности точки P_0, принадлежат пространству $H_2^{k+1, \ldots, k+1,}$ и имеют там равномерно по h ограниченные нормы.

Чтобы доказать это, применим к обеим частям уравнения (7) операцию дифференцирования

$$D^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}}},$$

умножим полученное уравнение на $V_{k+1} D^k u^h$ и проинтегрируем по области ω_{k+1}. Здесь

$$V_k = \prod_{i=1}^{n} \left(y_i^2 - \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)^2.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$0=\iint\limits_{\omega_{k+1}} V_{k+1} D^k u\left[D^k\left\{\sum_{i,s,\rho=1}^{n}\alpha_{si}\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\beta_{i\rho}\frac{\partial u}{\partial y_\rho}\right)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+Cu-F\right\}\right]d\Omega=$$

$$=-\iint\limits_{\omega_{k+1}} V_{k+1}\sum_{s,\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{si}\beta_{i\rho}\frac{\partial D^k u}{\partial y_s}\frac{\partial D^k u}{\partial y_\rho}d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\omega_{k+1}}\left[V_{k+1}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{m=0}^{k}\varkappa_{m\rho}D^k u\frac{\partial D^m u}{\partial y_\rho}+\sum_{\rho,s=1}^{n}\sum_{m=0}^{k}\frac{\partial V_{k+1}}{\partial y_s}D^k u\times\right.$$

$$\left.\times\varkappa'_{m\rho s}\frac{\partial D^m u}{\partial y_\rho}+\sum_{s,\rho=1}^{n}\sum_{m=0}^{k-1}V_{k+1}\varkappa''_{s\rho m}\frac{\partial D^k u}{\partial y_s}\frac{\partial D^m u}{\partial y_\rho}\right]d\Omega+$$

$$+\iint\limits_{\omega_{k+1}} V_{k+1}D^k u\left[D^k\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i}+Cu-F\right)\right]d\Omega,$$

где $\varkappa_{m\rho}$, $\varkappa'_{m\rho s}$, $\varkappa''_{s\rho m}$ — некоторые функции, равномерно ограниченные относительно h, $D^m u$ — некоторая производная порядка m. Отсюда, пользуясь тем, что $\left(\frac{\partial V_{k+1}}{\partial y_i}\right)^2 \Big/ V_{k+1}$ ограничено, как и в предыдущей оценке, находим, что

$$\iint\limits_{\omega_{k+1}} V_{k+1}\sum_{s,\rho=1}^{n}\gamma_{s\rho}\frac{\partial D^k u}{\partial y_s}\frac{\partial D^k u}{\partial y_\rho}d\Omega<C_4$$

и

$$\iint\limits_{\omega_{k+2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial D^k u}{\partial y_i}\right)^2 d\Omega<C_5,$$

где C_4, C_5 не зависят от h.

Следовательно, если коэффициенты уравнения (1) имеют в $\omega - S$ ограниченные производные до порядка k, то v^h принадлежат пространству $H_2^{k+1,\ldots,k+1,1}$ и имеют там равномерно по h ограниченные нормы. Применим теорему С. М. Никольского [см. (2), стр. 267, теорема 12]. Возьмем $p'=\infty$ и $m=n$. Тогда

$$\varkappa=1-\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{k+1}+1\right)>0,$$

если $k\geqslant n-1$, и функции v^h принадлежат пространству $H_\infty^{\rho,\ldots,\rho,\varkappa}$, $\rho=\varkappa(k+1)$, и имеют там равномерно по h ограниченные нормы. Это означает, что функции u^h удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем и константой, не зависящими от h. То же самое, как легко видеть, справедливо и для производных вида

$$\frac{\partial^s u^h}{\partial y_1^{s_1}\ldots\partial y_{n-1}^{s_{n-1}}},$$

если $k\geqslant n-1+s$.

Таким образом, обобщенное решение $u(x)$ и его производные вида

$$\frac{\partial^s u}{\partial y_1^{s_1}\ldots\partial y_{n-1}^{s_{n-1}}} \qquad (s = 1, \ldots, k-n+1)$$

непрерывны в окрестности точки P_0, если $k \geqslant n-1+s$.

Пользуясь уравнением (1), установим существование других производных от u^h в окрестности P_0 в замкнутых областях $y_n \leqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$. Запишем уравнение (1) при $y_n \leqslant 0$ в координатах $y_1, \ldots, y_n$ в виде:

$$\frac{\partial}{\partial y_n}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ni}\frac{\partial u}{\partial y_i} + l_n u\right) = \sum_{i,j=1}^{n-1} l_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + lu + f. \qquad (8)$$

Все коэффициенты уравнения (8) имеют при $y_n \leqslant 0$ производные до порядка k, так как мы предполагаем, что поверхности разрыва S имеют в локальных координатах все непрерывные производные до порядка $k+2$. Правая часть этого уравнения, по доказанному, имеет непрерывные производные по y_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ в ω при $y_n \leqslant 0$ до порядка $k-n-1$, значит, этими же производными обладает сумма

$$\sum_{i=1}^{n} l_{ni}\frac{\partial u}{\partial y_i} + l_n u$$

и, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial y_n}$. Далее, выражая из уравнения (8) $\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}$ через остальные члены и дифференцируя это уравнение, мы установим существование всех производных от $u(x)$ по $y_1, \ldots, y_n$ до порядка $k-n$ в окрестности P_0 при $y_n \leqslant 0$ и, аналогично, при $y_n \geqslant 0$ $(k \geqslant n+2)$.

Покажем, что для $u(x)$ выполняется условие (2). Так как при преобразовании координат конормаль переходит в конормаль, то равенство (2) достаточно доказать в координатах $y_1, \ldots, y_n$. Проинтегрируем уравнение (7) по области

$$\{|y_n| \leqslant \beta, \quad |y_i| \leqslant \delta, \quad i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Пользуясь тем, что u^h, $\frac{\partial u^h}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ равномерно ограничены по h, а $\frac{\partial u^h}{\partial y_n}$ равномерно ограничены в L_2, и устремляя h и β к нулю, получим:

$$\iint\limits_{\substack{|y_i| \leqslant \delta,\ y_n=0 \\ i=1,\ldots,n-1}} a_k \frac{\partial u}{\partial N_k}\, dy_1 \ldots dy_{n-1} = \iint\limits_{\substack{|y_i| \leqslant \delta,\ y_n=0 \\ i=1,\ldots,n-1}} a_l \frac{\partial u}{\partial N_l}\, dy_1 \ldots dy_{n-1}, \qquad (9)$$

если $P_0 \subset S_{kl}$. Так как $\delta > 0$ — любое достаточно малое число, то из (9) следует условие (2).

Мы уже отмечали, что $u(x)$ удовлетворяет условию (2) в среднем. Легко доказать обычным путем [см., например, ([9]), ([10])], что $u(x)$ принимает заданные значения φ в тех точках P_1 границы σ, где существует барьер, т. е. такая функция $W_{P_1}(x)$, что

1) $W_{P_1}(x)$ определена в пересечении μ некоторой окрестности точки P_1 и $\Omega+\sigma$;

2) $L_h(W_{P_1})\leqslant 0$ в точках $\mu\cap\Omega$;

3) W_{P_1} непрерывна, $W_{P_1}=0$ в точке P_1 и $W_{P_1}>0$ в $\mu-P_1$.

Если точка P_1 границы σ не принадлежит S, то

$$W_{P_1}(x)=\frac{1}{r(A,\,P_1)^{\nu}}-\frac{1}{r(A,\,P)^{\nu}},$$

где ν — достаточно большое число, $r(P_1,\,P_2)$ — расстояние между точками P_1 и P_2, точка A — центр сферы, лежащей вне Ω и касающейся σ в точке P_1, $P=(x_1,\,\ldots,\,x_n)$.

Можно также легко построить барьеры для тех точек σ, принадлежащих S, в окрестности которых $a_{ij}=\beta C_{ij}$, где C_{ij} — гладкие функции, β — функция, равная гладкой функции β_k в области $\bar\Omega_k$. В этом случае новые координаты $y_1,\ldots,\,y_n$ в окрестности P_1 можно выбрать так, что в уравнении (5) коэффициенты при производных

$$\frac{\partial u^h}{\partial y_n\,\partial y_i}\quad (i=1,\,\ldots,\,n-1)$$

будут равны нулю. При этом легко проверить, что функция

$$W_{P_1}(P)=\frac{1}{r(A,\,P_1)^{\nu}}-\frac{1}{r(A,\,P)^{\nu}},\quad P=(y_1,\,\ldots,\,y_n),$$

при достаточно большом ν удовлетворяет всем требованиям барьера.

Замечание. При построении решения $u(x)$ мы воспользовались единственностью обобщенного решения задачи (1) — (3), а именно тем, что предел u^h не зависит от специального вида коэффициентов уравнения (5), и для установления дифференциальных свойств $u(x)$ на S специальным образом выбирали эти коэффициенты. Однако можно построить классическое решение задачи (1)—(3) при условии $c\leqslant 0$, не рассматривая обобщенного решения этой задачи и тем самым снимая ограничения на коэффициенты уравнения, которые мы накладывали при доказательстве теоремы единственности.

Для этого построим коэффициенты A^h_{ij}, B^h_i, C^h и F^h специальным образом и проведем все предыдущие рассмотрения. Покроем область Ω шарами $R_1,\ldots,\,R_N$ настолько малого радиуса, чтобы в каждом шаре R_k, содержащем точки S, можно было ввести координаты $y^k_1,\ldots,\,y^k_n$ с указанными выше свойствами. При этом потребуем, чтобы в пересечении двух шаров R_l и R_k при переходе от одной системы координат y^l_i к другой y^k_i выполнялось равенство

$$y^k_n=y^l_n.$$

Пусть ξ_k $(k=1, \ldots, N)$ — гладкая функция, равная нулю вне шара R_k и в некоторой окрестности его границы, причем всюду в точках Ω $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{N} \xi_k \equiv 1$. Положим

$$A_{ij}^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (aa_{ij})_k^h,$$

где $(aa_{ij})_k^h$ обозначает усреднение функции aa_{ij} в координатах $y_1^k, \ldots, y_n^k$ в шаре R_k с радиусом усреднения h. Аналогично определяем B_i^h, C^h и F^h. Далее мы можем так же, как в уже рассмотренном случае, исследовать дифференциальные свойства $u(x)$ в окрестности точки P_0 из S, так как коэффициенты A_{ij}^h, B_i^h, C^h и F^h имеют ограниченные производные до порядка k относительно $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

3. Уравнения параболического типа. Рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, следуя тому пути, который был указан в предыдущем замечании для уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$a_0(t, x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(t, x)u + f(x) \quad (10)$$

в цилиндре $Q\{\Omega \times [0, T]\}$. Пусть коэффициенты уравнения (10) — гладкие функции всюду в Q, кроме точек конечного числа гладких n-мерных поверхностей таких, что в некоторой окрестности любой точки поверхности возможно невырожденное преобразование координат

$$\tau = t, \quad y_i = \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

при котором поверхность разрыва переходит в кусок плоскости $y_n = 0$ (в случае двух независимых переменных t, x разрывы коэффициентов уравнения (10), очевидно, допускаются на конечном числе гладких непересекающихся линий $x = x_i^0(t)$, $i = 1, \ldots, m$). На этих поверхностях коэффициенты уравнения (10) имеют разрывы первого рода. Они разбивают Q на конечное число областей Q_i, $i = 1, \ldots, m$. Поверхность, которая служит границей для Q_l и Q_k, обозначим через Γ_{kl}. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_{kl}.\}$ Мы предполагаем, что

$$a_0(t, x) \geqslant a_0 > 0, \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j > 0$$

при $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$ и $c \leqslant 0$.

Решением первой краевой задачи для уравнения (10) назовем функцию $u(t, x)$, непрерывную в $\overline{Q}$, удовлетворяющую уравнению (10) в $Q - \Gamma$ и условиям:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (11)$$

$$u|_{\gamma} = \varphi, \quad \gamma = \sigma \times [0, T], \quad (12)$$

$$a_l \frac{du}{dN_l} = a_k \frac{du}{dN_k} \text{ на } \Gamma_{kl}. \tag{13}$$

При этом, как и раньше, σ — граница области Ω,

$$\frac{d}{dN} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cos(n, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где n — нормаль к поверхности, полученной сечением поверхности Γ_{kl} плоскостью $t = \text{const}$, $a_k(t, x)$ — некоторая гладкая функция в $\bar{Q}_k$.

Доказательство единственности решения задачи (10)—(13). Единственность решения задачи (10)—(13) следует из того, что решение $u(t, x)$ однородной задачи (10)—(13) не может принимать в точке из Γ наибольшее или наименьшее значение, если функция $u(t, x)$ не постоянна при всех меньших значениях t, в силу условия (4) и теоремы 1 работы ([11]), соответствующей лемме 1 работы ([7]) для эллиптического уравнения. Отметим, что теорема 1 работы ([11]) справедлива и для областей с гладкой подвижной боковой границей, касательная плоскость которой ни в одной точке не перпендикулярна к оси t. Этому условию, очевидно, удовлетворяют области Q_i.

Доказательство существования решения задачи (10)—(13). Решение задачи (10)—(13) мы получим как предел при $h \to 0$ решений $u^h(t, x)$ в Q уравнения

$$A_0^h \frac{\partial u^h}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} + C^h u^h + F^h \tag{14}$$

с условиями:

$$u^h|_{t=0} = u_0(x), \quad u^h|_\gamma = \varphi.$$

Коэффициенты уравнения (14) строятся следующим образом. Цилиндр Q покрываем конечным числом достаточно малых областей R_i ($i = 1, \ldots, N$) таких, что в областях R_s, содержащих точки Γ, возможен переход к координатам τ^s, $y_1^s, \ldots, y_n^s$ с указанными выше свойствами. При этом потребуем, чтобы в пересечении R_l и R_k при переходе от одной системы координат τ^l, $y_1^l, \ldots, y_n^l$ к другой τ^k, $y_1^k, \ldots, y_n^k$ выполнялось равенство

$$y_n^k = y_n^l.$$

Пусть $\xi_k(t, x)$, $k = 1, \ldots, N$, — гладкие функции, равные нулю вне R_k и в некоторой окрестности границы R_k, причем всюду в точках Q $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{N} \xi_k \equiv 1$. В уравнении (14) положим

$$A_0^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\tilde{a}_0)_k^h, \quad A_{ij}^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\tilde{a}_{ij})_k^h,$$

$$B_i^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\tilde{b}_i)_k^h, \quad C^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\tilde{c})_k^h, \quad F^h = \sum_{k=1}^{N} \xi_k (\tilde{f})_k^h,$$

где

$$(\widetilde{a}_0)_k^h, \quad (\widetilde{a}_{ij})_k^h, \quad (\widetilde{b}_i)_k^h, \quad (\widetilde{c})_k^h, \quad (\widetilde{f})_k^h$$

обозначают усреднения с радиусом усреднения h соответствующих функций

$$aa_0, \quad aa_{ij}, \quad ab_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_j} a_{ij}, \quad ac, \quad af$$

в области R_k по переменным τ^k, $y_1^k, \ldots, y_n^k$, которые мы определили выше (в областях R_k, не содержащих точек Γ, за τ, $y_1, \ldots, y_n$ принимаем t, $x_1, \ldots, x_n$).

В силу принципа максимума, функции u^h равномерно ограничены в Q. Из последовательности u^h можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся во всех точках $Q - \Gamma$ при $h \to 0$ к функции $u(t, x)$, удовлетворяющей в $Q - \Gamma$ уравнению (10) и обладающей производными по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $l-1$, если коэффициенты уравнения (10) имеют в $Q - \Gamma$ ограниченные производные до l-го порядка включительно ($l \geqslant 3$). Это следует из того, что в любой замкнутой области, лежащей в $Q - \Gamma$, коэффициенты уравнения (14) имеют равномерно по h ограниченные производные до порядка l и производные от u^h по $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $l-1$ будут равномерно ограничены по h в силу известных оценок С. Н. Бернштейна ([12]). Далее из уравнения (10) следует существование производных $\dfrac{\partial^k u}{\partial x^{k_1} \partial t^{k_2}}$, где $k_1 + 2k_2 \leqslant l - 1$. Более точный результат можно получить с помощью работы ([15]).

Исследуем теперь дифференциальные свойства $u(t, x)$ в окрестности G точки P_0, принадлежащей Γ_{kl}. Пусть G содержится в R_s. Перейдем в R_s к локальным координатам τ, $y_1, \ldots, y_n$ и будем считать P_0 началом координат. Тогда уравнение (14) примет вид:

$$A_0^h \frac{\partial u^h}{\partial \tau} = \sum_{k,i,j=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial u^h}{\partial y_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^h \frac{\partial u^h}{\partial y_i} + C^h u^h + F^h. \qquad (15)$$

Так как переход от одних локальных координат к другим в пересечении R_i и R_j таков, что $y_n^i = y_n^j$, то все коэффициенты в уравнении (14) имеют производные порядка l по τ, $y_1, \ldots, y_{n-1}$, равномерно ограниченные по h. Коэффициенты уравнения (15) также имеют равномерно ограниченные по h производные по τ, $y_1, \ldots, y_{n-1}$ до порядка l, так как они являются линейными комбинациями коэффициентов уравнения (14) с гладкими коэффициентами, не зависящими от h. Мы предполагаем, что функции φ_i, определяющие преобразование координат, имеют $l + 2$ производных.

Установим интегральные оценки для функций u^h (значок h в дальнейших выкладках мы опускаем). Пусть

$$\Phi_k = \left(\tau^2 - \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)^2 \prod_{i=1}^{n} \left(y_i^2 - \left(\frac{\alpha}{k}\right)^2\right)^2,$$

где $\alpha > 0$ — некоторое достаточно малое число, и пусть G_k — область $\left\{ |\tau| \leqslant \frac{\alpha}{k}, \quad |y_i| \leqslant \frac{\alpha}{k} \right\}$. Умножим уравнение (15) на $u\Phi_1$ и проинтегрируем

по области G_1. Имеем:

$$\iint_{G_1}\Phi_1 u A_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} dQ = \iint_{G_1}\Phi_1 u \Big[\sum_{k,i,j=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\Big] dQ =$$

$$= \iint_{G_1}\Big\{-\sum_{k,i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(\Phi_1 u \alpha_{ki})\,\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j} + u\Phi_1\Big[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\Big]\Big\} dQ.$$

Отсюда следует:

$$\iint_{G_1}\Phi_1 \sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j} dQ = \iint_{G_1}\Big\{-\sum_{k,i,j=1}^{n} u\frac{\partial}{\partial y_i}(\Phi_1\alpha_{ki})\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j} +$$

$$+ u\Phi_1\Big[\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\Big]\Big\} dQ + \iint_{G_1}\frac{\partial}{\partial\tau}(\Phi_1 A_0)\frac{u^2}{2} dQ.$$

Пользуясь тем, что $\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}\right)^2 \Big/ \Phi_1$ и $\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_i}\right)^2 \Big/ \Phi_1$ $(i = 1, \ldots, n)$ ограничены, мы, как и в эллиптическом случае, с помощью (6) получим, что левая часть последнего равенства ограничена независимо от h, и, следовательно, производные $\frac{\partial u^h}{\partial y_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеют равномерно по h ограниченные интегралы от квадратов в G_2.

Умножая уравнение (15) на $\Phi_2\frac{\partial u}{\partial\tau}$ и интегрируя по G_2, получим:

$$\iint_{G_2} A_0\Phi_2\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 dQ = \iint_{G_2}\Phi_2\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big[\sum_{k,i,j=1}^{n}\alpha_{ki}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\Big] dQ.$$

Преобразуем это равенство при помощи интегрирования по частям. Мы имеем:

$$\iint_{G_2}\Phi_2 A_0\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)^2 dQ = \iint_{G_2}\Big[-\Phi_2\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) -$$

$$-\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}(\Phi_2\alpha_{ki})\frac{\partial u}{\partial\tau}\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j} + \Phi_2\frac{\partial u}{\partial\tau}\Big(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\Big)\Big] dQ.$$

Интегрируя по частям первый член правой части и применяя к остальным членам неравенство (6), получим, как и выше, что интеграл левой части равномерно ограничен по h.

Таким образом, функции u^h имеют все производные первого порядка, равномерно ограниченные по h в $L_2(G_3)$.

Докажем по индукции, что u^h имеют равномерно ограниченные по h в $L_2(G_{2l+1})$ производные вида

$$\frac{\partial^l u^h}{\partial\tau^{l_0}\partial y_1^{l_1}\ldots\partial y_{n-1}^{l_{n-1}}} \quad\text{и}\quad \frac{\partial^l u^h}{\partial\tau^{l'_0}\partial y_1^{l'_1}\ldots\partial y_{n-1}^{l'_{n-1}}\partial y_n},$$

где $l_i \geqslant 0$, $l'_i \geqslant 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} l_i = l$, $\sum_{i=0}^{n-1} l'_i = l - 1$. Предположим, что это верно для $l - 1$, и покажем, что тогда это справедливо и для l.

Применим к обеим частям уравнения (15) оператор дифференцирования

$$D^{l-1} \equiv \frac{\partial^{l-1}}{\partial\tau^{l_0}\partial y_1^{l_1}\ldots\partial y_{n-1}^{l_{n-1}}},$$

умножим его на $\Phi_{2l-1}D^{l-1}u$ и проинтегрируем по области G_{2l-1} $\left(\sum_{i=0}^{n-1} l_i = l-1\right)$. Мы имеем:

$$\iint_{G_{2l-1}} D^{l-1}u\Phi_{2l-1}D^{l-1}\left(A_0\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)dQ =$$

$$= \iint_{G_{2l-1}} D^{l-1}u\Phi_{2l-1}\left[D^{l-1}\left(\sum_{k,i,j=1}^{n}\alpha_{ki}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\right)\right]dQ.$$

Последнее равенство можно записать в виде:

$$\iint_{G_{2l-1}}\left[\frac{1}{2}\Phi_{2l-1}A_0\frac{\partial(D^{l-1}u)^2}{\partial\tau} + \Phi_{2l-1}D^{l-1}u\sum_{k=0}^{l-2}\mu_k D^k\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\right]dQ =$$

$$= \iint_{G_{2l-1}}\Phi_{2l-1}D^{l-1}u\left[D^{l-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\right)\right]dQ +$$

$$+ \iint_{G_{2l-1}}\Phi_{2l-1}D^{l-1}u\left[\sum_{k,i,j=1}^{n}\sum_{m=1}^{l-1}\mu_{kim}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(D^m\left(\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\right)\right]dQ, \qquad (16)$$

где μ_k и μ_{kim} — некоторые функции, равномерно ограниченные относительно h. Последний интеграл, который мы обозначим через I_1, преобразуем при помощи интегрирования по частям:

$$I_1 = \iint_{G_{2l-1}}\sum_{k,i,j=1}^{n}\sum_{m=0}^{l-1} - \frac{\partial}{\partial y_i}(\Phi_{2l-1}D^{l-1}u\mu_{kim})\,D^m\left(\beta_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)dQ =$$

$$= \iint_{G_{2l-1}} - \Phi_{2l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i}\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_j}dQ +$$

$$+ \iint_{G_{2l-1}}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{l-1}\Phi_{2l-1}\mu_{mj}D^{l-1}u\frac{\partial D^m u}{\partial y_j} +\right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i,j=1}^{n}\nu_{ijm}\frac{\partial\Phi_{2l-1}}{\partial y_i}D^{l-1}u\frac{\partial D^m u}{\partial y_j} + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{m=0}^{l-2}\Phi_{2l-1}\tilde{\nu}_{ijm}\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i}\frac{\partial D^m u}{\partial y_j}\right]dQ.$$

Здесь μ_{mj}, ν_{ijm} и $\tilde{\nu}_{ijm}$ — функции, равномерно ограниченные относительно h.

Левую часть уравнения (16), которую обозначим через I_2, можно также преобразовать при помощи интегрирования по частям:

$$I_2 = \iint_{G_{2l-1}}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(\Phi_{2l-1}A_0)(D^{l-1}u)^2 + \Phi_{2l-1}D^{l-1}u\sum_{k=0}^{l-2}\mu_k D^k\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\right]dQ.$$

Очевидно, что последний интеграл ограничен равномерно относительно h в силу предположения индукции.

Далее, пользуясь предположением индукции, неравенством (6) и ограниченностью $\left(\frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial y_i}\right)^2 \Big/ \Phi_{2l-1} (i=1, \ldots, n)$, из равенства (16) и выражений для I_1 и I_2 выводим, что

$$\iint\limits_{G_{2l-1}} \Phi_{2l-1} \sum_{j,\, j=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\partial D^{l-1} u}{\partial y_i} \frac{\partial D^{l-1} u}{\partial y_i}\, dQ < C_6$$

и

$$\iint\limits_{G_{2l}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial D^{l-1} u}{\partial y_i}\right)^2 dQ < C_7,$$

где C_6 и C_7 не зависят от h.

Таким образом, мы доказали, что производные вида

$$\frac{\partial D^{l-1} u}{\partial y_i} = \frac{\partial^l u}{\partial \tau^{l_0} \partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}} \partial y_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

имеют равномерно ограниченные по h нормы в $L_2(G_{2l})$.

Применим к обеим частям уравнения (15) оператор дифференцирования D^{l-1}, умножим его на $\frac{\partial D^{l-1} u}{\partial \tau} \Phi_{2l}$ и проинтегрируем по области G_{2l}. Мы получим:

$$\iint\limits_{G_{2l}} \Phi_{2l} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) D^{l-1} \left(A_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) dQ =$$

$$= \iint\limits_{G_{2l}} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) \Phi_{2l} \left[D^{l-1} \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ki} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + Cu + F\right)\right] dQ. \tag{18}$$

Левая часть этого равенства имеет вид

$$\iint\limits_{G_{2l}} \Phi_{2l} A_0 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u)\right]^2 dQ + \iint\limits_{G_{2l}} \Phi_{2l} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) \sum_{s=0}^{l-2} \varkappa_s D^s \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) dQ,$$

где $\varkappa_s$ — некоторые функции, ограниченные при всех h.

Далее,

$$\iint\limits_{G_{2l}} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) \Phi_{2l} D^{l-1} \left[\sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\right] dQ =$$

$$= \iint\limits_{G_{2l}} \frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) \Phi_{2l} \left[\sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \varkappa_{iks} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(D^s \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}\right)\right)\right] dQ =$$

$$= - \iint\limits_{G_{2l}} \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial D^{l-1} u}{\partial \tau} \Phi_{2l} \varkappa_{iks}\right) D^s \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j}\right) dQ =$$

$$= -\iint\limits_{G_{2l}} \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \left\{ \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial y_i} (\Phi_{2l} \varkappa_{iks}) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_j} \right) \Phi_{2l} \varkappa_{iks} \right\} D^s \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dQ =$$

$$= \iint\limits_{G_{2l}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \Phi_{2l} \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial \tau} \tilde{\varkappa}_{js} D^s \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dQ +$$

$$+ \iint\limits_{G_{2l}} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial \tau} \frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_i} \varkappa_{sij} D^s \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dQ -$$

$$- \iint\limits_{G_{2l}} \sum_{i,j,k=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i} \right) \Phi_{2l} \varkappa_{ik} D^s \left(\beta_{jk} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) dQ.$$

Здесь $\varkappa_{ik}$, $\tilde{\varkappa}_{js}$, $\varkappa_{sij}$ — некоторые функции, равномерно ограниченные относительно h. Преобразуем последний интеграл при помощи интегрирования по частям, представляя его в виде:

$$\iint\limits_{G_{2l}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i} \right) \Phi_{2l} \eta_{ij} \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_j} + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-2} \Phi_{2l} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i} \right) \eta_{ijs} D^s \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \right] dQ =$$

$$= -\iint\limits_{G_{2l}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_{2l} \eta_{ij}) \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i} \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{s=0}^{l-2} \frac{\partial D^{l-1}u}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\Phi_{2l} \eta_{ijs} D^s \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \right) \right] dQ.$$

Подставляя полученные выражения в равенство (18), пользуясь установленными оценками, неравенством (6) и ограниченностью отношений $\left(\frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial \tau} \right)^2 \Big/ \Phi_{2l}$ и $\left(\frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_i} \right)^2 \Big/ \Phi_{2l}$, $i = 1, \ldots, n$, найдем, что интеграл

$$\iint\limits_{G_{2l}} \Phi_{2l} A_0^h \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u^h) \right]^2 dQ$$

ограничен постоянной, не зависящей от h. Отсюда следует, что

$$\iint\limits_{G_{2l+1}} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (D^{l-1} u) \right]^2 dQ < C_8,$$

где C_8 не зависит от h.

Таким образом, функции $v^h = u^h \psi$, где ψ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне некоторой малой окрестности точки P_0, в пространстве $(\tau, y_1, \ldots, y_n)$ принадлежат классу $H_2^{l, \ldots, l, 1}$ и имеют равномерно по h ограниченные нормы, если коэффициенты уравнения имеют ограниченные производные в $G - \Gamma$ до порядка l. Согласно теоремам вложения [см. ([2])], v^h принадлежит классу $H_\infty^{\rho, \ldots, \rho, \varkappa}$, $\varkappa > 0$, $\rho = \varkappa l$, если $l > n$. Как и в эллиптическом случае, получаем, что функция $u(t, x)$ и ее производные по $\tau, y_1, \ldots, y_{n-1}$ до порядка $l - n - 1$ непрерывны в окрестности точки P_0, если $l - n - 1 \geqslant 0$.

Существование всех производных до порядка $l-n-2$ в окрестности P_0 при $y_n \leqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$, а также выполнение условия (13) доказываем точно так же, как и в эллиптическом случае.

Поведение функции $u(t, x)$ при $t=0$ и на боковой поверхности Γ цилиндра Q исследуем с помощью барьеров.

Рассмотрим сначала точки плоскости $t=0$. Функция $u(t, x)$ принимает при $t=0$ в точке P_1 заданное значение $u_0(x)$, если существует функция $w_{P_1}(t, x)$ (барьер) со следующими свойствами:

1) $w_{P_1}(t, x)$ определена в пересечении $\mathfrak{S}$ окрестности P_1 и $t \geqslant 0$;

2) $L_h(w_{P_1}) - A_0^h \frac{\partial w_{P_1}}{\partial t} \leqslant 0$ в $\mathfrak{S}$ при $t > 0$;

3) $w_{P_1}(t, x) = 0$ в точке P_1 и $w_{P_1} > 0$ во всех остальных точках $\mathfrak{S}$.

Доказательство этого предложения проводится точно так же, как для уравнения теплопроводности [см. ([9]), стр. 344].

Для точек P_1 на плоскости $t=0$, не принадлежащих Γ, а также для любой точки в случае $n=1$ за барьер можно взять функцию

$$w_{P_1}(t, x) = t + \sum_{i=1}^{n} x_i^4, \tag{19}$$

предполагая, что P_1 — начало координат. Эта же функция (в координатах $\tau, y_1, \ldots, y_n$) может служить барьером и для такой точки P_1 из Γ на плоскости $t=0$ (при $n>1$), в некоторой малой окрестности которой

$$a_{ij} = \alpha b_{ij}, \tag{20}$$

где b_{ij} — гладкие функции, а функция $\alpha(t, x)$ равна гладкой функции α_i в области $\bar{Q}_i$. В этом случае координаты $y_1, \ldots, y_{n-1}$ в окрестности P_1 выберем так, чтобы в уравнении (15) коэффициенты при производных

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial y_i \, \partial y_n} \quad (i=1, \ldots, n-1)$$

были равны нулю.

Если $u_0(x) \equiv 0$, то, пользуясь принципом максимума, легко показать, что $u(t, x) \to 0$ при $t \to 0$. Действительно, функция $\tilde{u}^h = Mt \pm u^h$ при достаточно большом $M > 0$ положительна на γ и при $t=0$. Так как

$$L_h(\tilde{u}^h) - A_0 \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial t} < 0,$$

то, в силу принципа максимума, $\tilde{u}^h \geqslant 0$ в Q. Поэтому $|u^h| \leqslant Mt$ и, следовательно, $|u(t, x)| \leqslant Mt$ в Q.

Для исследования поведения функции $u(t, x)$ на боковой поверхности γ цилиндра Q можно использовать барьеры точно так же, как для уравнения теплопроводности [см. ([9])]. Если точка $P_1(t_1, x_1)$ не принадлежит Γ или если $n=1$, то в качестве барьера при $t \leqslant t_1$ можно взять функцию

$$w_{P_1}(t, x) = (t_1 - t) + \frac{1}{r(A, P_1)^{\nu}} - \frac{1}{r(A, P)^{\nu}}$$

и функцию (19) при $t \geqslant t_1$. Здесь ν — достаточно большое число, A — центр сферы, лежащей вне Q и касающейся Q в точке P_1, $r(P_1, P_2)$ — расстояние между проекциями точек P_1 и P_2 на плоскость $t = 0$, $P = (t, x_1, \ldots, x_n)$. Эти же барьеры в координатах τ, $y_1, \ldots, y_n$ применимы при $n > 1$ в тех точках из Γ на боковой поверхности γ, в малой окрестности которых выполнено условие (20).

Поступило
24. XII. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Олейник О. А., Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 6 (1959), 1219 — 1222.

[2] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1954), 244 — 278.

[3] Ким Е. И., Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и некоторых задачах теплопроводности для кусочно-однородных сред, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, Докторская диссертация, 1956.

[4] Самарский А. А., Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами, Доклады Ак. наук СССР, 121 (1958), 225 — 228.

[5] Олейник О. А., Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами, Успехи матем. наук, XIV, вып. 5 (89) (1959), 164—166.

[6] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Издательство ЛГУ, 1950.

[7] Олейник О. А., О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, Матем. сборн., 30 (72): 3 (1952), 695—702.

[8] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

[9] Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, Москва, 1953.

[10] Олейник О. А., О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа, Матем. сборн., 24 (66): 1 (1949), 3 — 14.

[11] Выборны Р., О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа, Доклады Ак. наук СССР, 117, № 4 (1957), 563 — 566.

[12] Бернштейн С. Н., Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа, Доклады Ак. наук СССР, 18, № 7 (1938), 385— 388.

[13] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33 (75) : 2 (1953), 261 — 326.

[14] Егоров Ю. В., О гиперболических уравнениях с разрывными коэффициентами, Доклады Ак. наук СССР, т. 134, № 3 (1960), 514 — 517.

[15] Friedman A., Boundarc petimates for second order parabolic equations and their applications, J. Math. and Mech., 7, № 5 (1958), 771 — 791.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 21 — 86

В. И. АРНОЛЬД

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ. I

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

В первой части работы показано, что мало отличающееся от поворота аналитическое преобразование окружности, число вращения которого иррационально и удовлетворяет некоторым арифметическим требованиям, может быть превращено в поворот аналитической заменой переменной. Во второй части рассмотрено пространство отображений окружности на себя и место, занимаемое в этом пространстве отображениями разных типов. Указаны приложения к исследованию траекторий на торе и к задаче Дирихле для уравнения струны.

Введение

Непрерывные отображения окружности на себя изучались Пуанкаре [см. ([1]), гл. XV, стр. 165—191] в связи с качественным исследованием траекторий на торе. К таким отображениям приводит также задача Дирихле для уравнения струны, но топологическое исследование оказывается здесь недостаточным [см. ([5])]. В первой части настоящей работы излагается попытка аналитического уточнения завершающей теорию Пуанкаре теоремы Данжуа ([2]).

Пусть $F(z)$ — действительная на действительной оси и аналитическая в ее окрестности периодическая функция $F(z+2\pi)=F(z)$, причем $F'(z)\neq -1$ при $\operatorname{Im} z=0$. Тогда отображению полосы комплексной плоскости $z\to Az\equiv z+F(z)$ соответствует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм B окружности точек $w(z)=e^{iz}$:

$$w=w(z)\to w(Az)\equiv Bw.$$

В этом смысле мы говорим, что A есть аналитическое отображение окружности на себя.

Пусть число вращения * A равно $2\pi\mu$. Из теоремы Данжуа следует, что при иррациональном μ существует непрерывная обратимая действительная функция $\varphi(z)$ действительного z, периодическая в том смысле, что

$$\varphi(z+2\pi)=\varphi(z)+2\pi,$$

и такая, что

$$\varphi(Az)=\varphi(z)+2\pi\mu. \tag{1}$$

---

* Предполагается, что читатель знаком с результатами работ ([1]) (стр. 165—191 и 322—335) и ([2]), вошедшими в учебники ([3]) (стр. 65—76) и ([4]) (стр. 442—456).

Мы будем говорить, что φ — новый параметр и что в параметре φ преобразование A превращается в поворот на угол $2\pi\mu$. Такая функция φ может быть только одна (с точностью до аддитивной постоянной).

В § 1 показано, что при некоторых иррациональных μ, несмотря даже на аналитичность $F(z)$, функция φ в (1) может оказаться не абсолютно непрерывной. Идея этого примера состоит в следующем. Так как при поворотах окружности длина сохраняется, то приведение преобразования к повороту надлежащим выбором параметра есть отыскание инвариантной меры преобразования. В случае рационального числа вращения инвариантная мера сосредоточена, как правило, в отдельных точках — точках циклов преобразования. Если же число вращения иррационально, но чрезвычайно хорошо аппроксимируется рациональными, то инвариантная мера сохраняет сингулярный характер, хотя и распределена по окружности всюду плотно.

Представляется правдоподобной следующая гипотеза:

Существует такое множество $M \subseteq [0, 1]$ меры 1, что для каждого $\mu \in M$ решения уравнения (1) *при любом аналитическом преобразовании A с числом вращения $2\pi\mu$ являются аналитическими.*

Пока это доказано только для достаточно близких к повороту на угол $2\pi\mu$ аналитических преобразований (§ 4, теорема 2)*. Доказательство заключается в построении решения уравнения (1) путем решения уравнений вида

$$g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z). \tag{2}$$

При решении этого уравнения с помощью ряда Фурье появляются малые знаменатели, затрудняющие сходимость. Вычисление последовательных поправок, приспосабливающих решение уравнения (2) к уравнению (1), производится методом типа метода Ньютона, и быстрая сходимость этого метода обеспечивает возможность осуществить не только все приближения теории возмущений, но и предельный переход.

Метод Ньютона был применен с такой целью А. Н. Колмогоровым (6). Теорема 2 настоящей работы есть своего рода дискретный аналог его теоремы о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. В отличие от работы (6), мы не располагаем аналитическим интегральным инвариантом, а ищем его; кроме того, мы доказываем (в теореме 2) аналитичность зависимости от малого параметра ε, откуда следует сходимость обычных в теории возмущений рядов по степеням ε.

---

* Примечание при корректуре. Во время печатания настоящей работы автору стали известны труды A. Finzi (38), (39). Из результатов работы (38) вытекает, что если число вращения достаточно гладкого отображения окружности на себя удовлетворяет известным арифметическим требованиям, то преобразование можно превратить в поворот *непрерывно дифференцируемой* заменой переменной. Таким образом, метод A. Finzi не требует, чтобы преобразование было близко к повороту; это отчасти подтверждает высказанную выше гипотезу. A. Finzi указывает, однако, что он не видит возможности распространить свой метод на случай, когда требуется бо́льшая гладкость замены переменной. Настоящая работа содержит частичный ответ на некоторые из поставленных им вопросов; частичный ответ на некоторые вопросы, поставленные здесь, читатель найдет в упомянутых статьях A. Finzi.

Прямое доказательство сходимости этих рядов не удается, в связи с чем А. Н. Колмогоров высказал даже * (до изучения работы К. Л. Зигеля (7)) гипотезу об их расходимости.

Другая гипотеза А. Н. Колмогорова, высказанная им в докладе (8), оказалась верной: вопросы, в которых участвуют малые знаменатели, связаны с моногенными функциями Бореля (9). Для нашего случая это установлено в §§ 7, 8 и используется в § 11.

Некоторые важные задачи с малыми знаменателями решены К. Л. Зигелем [см. (7), (33), (34), (35)]. Непосредственное отношение к отображениям окружности имеет проблема центра для уравнения Шредера: *можно ли аналитической заменой переменной* $\varphi(z) = z + b_2z^2 + \ldots$ *превратить в поворот на угол* $2\pi\mu$ *отображение окрестности нуля комплексной плоскости, определяемое аналитической функцией* $f(z) = e^{2\pi i\mu} z + a_2z^2 + \ldots$

Результат Зигеля (7) аналогичен нашей теореме 2 и может быть получен тем же способом. Проблема центра есть особый случай задачи об отображении окружности, радиус которой, в особом случае, равен нулю. По сравнению с общим случаем здесь положение проще, так как решение (ряд Шредера) формально выписывается сразу. Применение метода Ньютона тоже дает ряд Шредера; в отличие от теоремы 2, каждый коэффициент решения будет точно определен после конечного числа приближений.

Во второй части работы приводится классификация отображений окружности на себя и обсуждается вопрос о типичности различных случаев. В § 9 вводится функция $\mu(T)$ (число вращения) на пространстве отображений окружности. Далее изучаются множества рационального (§ 10) и иррационального (§ 11) уровня μ с точки зрения их устройства (теоремы 6 и 7) и массивности (теоремы 5 и 8). Топологически подавляющим оказывается случай грубых в смысле А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина (10) отображений с нормальными циклами и рациональным числом вращения; они образуют открытое всюду плотное множество**. С точки зрения меры в конечномерных подпространствах типичным является также и эргодический случай. В § 12 рассмотрено двумерное подпространство отображений $x \to x + a + \varepsilon \cos x$.

В §§ 13 и 14 предыдущие результаты применяются к качественному исследованию траекторий на торе и к задаче Дирихле для уравнения струны.

Выражаю благодарность А. Н. Колмогорову за ценные советы и помощь, оказанные им автору.

ЧАСТЬ I

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

Основное содержание первой части работы заключено в §§ 4—6 (теорема 2). Для понимания доказательства теоремы 2 (§§ 5, 6) необходимы п. п. 2.1, 2.3 § 2 и п. 3.3 § 3. К леммам о неявной функции и о конечном приращении, содержащимся в § 3, можно обращаться по мере ссылок.

---

* В докладе Московскому математическому обществу 13.I.1959.

** Примечание при корректуре. Этот результат получен также В. А. Плиссом в статье (13), опубликованной во время печатания настоящей работы.

Каждый из §§ 1, 2, 7 можно читать независимо от всего остального. В § 8 доказывается обобщение теоремы 2 (теорема 3), используемое во второй части работы.

§ 1. Случай, когда новый параметр не есть абсолютно непрерывная функция старого параметра

1.1. В этом параграфе строятся аналитическое преобразование A окружности C, подмножества окружности G_n ($n = 1, 2, \ldots$) и натуральные числа N_n ($n = 1, 2, \ldots$) такие, что:

1. $\operatorname{mes} G_n \to 0$ при $n \to \infty$.
2. $A^{N_n}(C \setminus G_n) \subset G_n$.
3. Число вращения μ преобразования A иррационально.

Это преобразование A не может быть превращено в поворот абсолютно непрерывной заменой переменной. Действительно, пусть φ—непрерывный параметр, в котором преобразование A превращается в поворот на угол $2\pi\mu$ (φ существует по теореме Данжуа). Степени A также превращаются в повороты. Пусть $G \subset C$. Мера множества $\varphi(G)$ значений $\varphi(x)$, $x \in G$ совпадает с мерой $\varphi(A^N G)$, так как эти множества совмещаются при повороте. Поэтому из условия 2 вытекает:

$$2\pi - \operatorname{mes} \varphi(G_n) \leqslant \operatorname{mes} \varphi(G_n)$$

и

$$\operatorname{mes} \varphi(G_n) \geqslant \pi.$$

Ввиду условия 1, φ не есть абсолютно непрерывная функция на C.

1.2. При построении используются следующие леммы.

ЛЕММА α. *Пусть A — полуустойчивое вперед * аналитическое в окрестности действительной оси преобразование окружности, и пусть точки z_0, $z_k = A(z_{k-1})$ $(0 < k < n)$ образуют цикл, т. е. $A(z_{n-1}) = z_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в указанной окрестности действительной оси существует отличающееся от A меньше чем на ε преобразование A', имеющее ровно один цикл, а именно $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.*

Доказательство. Построим аналитическую в рассматриваемой полосе поправку $\Delta(z)$, обращающуюся в нуль в точках $z_0, \ldots, z_{n-1}$ и положительную в остальных действительных точках.

Положим

$$A'(z) = A(z) + \varepsilon' \Delta(z);$$

при достаточно малом $\varepsilon' > 0$ $|\varepsilon' \Delta(z)| < \varepsilon$ в указанной полосе и $A'(z)$ есть преобразование окружности. Очевидно, преобразование $(A')^n$ сдвигает вперед все точки z не меньше, чем преобразование A^n и при этом точки $z_0, \ldots, z_{n-1}$ сдвигаются на $2\pi m$, а остальные точки — больше, чем на $2\pi m$; лемма α доказана.

---

* Это значит, что при некоторых целых m, n и любом действительном z $A^n(z) \geqslant z + 2\pi m$, причем равенство достигается.

Определение. Пусть A — преобразование окружности C, G — множество на ней. Будем говорить, что преобразование A обладает свойством 2 относительно G и N, если $A^N(C \setminus G) \subset G$.

ЛЕММА β. *Преобразование A с единственным циклом $z_0, \ldots, z_{n-1}$ при любом $\varepsilon > 0$ обладает свойством 2 относительно множества G_ε точек ε-окрестности цикла и любого N, превосходящего некоторое $N_0(\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $z_i < x < z_j$, где $z_i z_j$ — одна из дуг, на которые цикл делит окружность. Точки $A^{kn}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ лежат на дуге $z_i z_j$ и образуют монотонную последовательность (подробнее см. § 10). Отсюда следует, что в случае, если преобразование A полуустойчиво вперед (случай полуустойчивости назад вполне аналогичен),

$$A^{kn}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} z_j.$$

Действительно, пусть λ — предел монотонной последовательности $A^{kn}(x)$; тогда λ инвариантно относительно A^n и принадлежит циклу, удовлетворяя неравенствам

$$z_i < \lambda \leqslant z_j.$$

Итак,

$$\lim_{k \to \infty} A^{kn+l}(x) = A^l(z_j).$$

То же верно для других интервалов, на которые цикл делит окружность.

Рассмотрим точки $x_i = z_i + \varepsilon$. По доказанному, начиная с некоторого $N_0(\varepsilon)$, все точки $A^N x_i$ лежат в ε-окрестности цикла. Очевидно, это N_0 — искомое.

ЛЕММА γ. *Пусть преобразование A обладает свойством 2 относительно G и N, и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что всякое преобразование B, отличающееся от A меньше чем на δ, обладает свойством 2 относительно N и ε-окрестности G.*

Доказательство. Лемма очевидным образом вытекает из непрерывной зависимости A^N от A.

ЛЕММА δ. *Пусть A — полуустойчивое вперед преобразование, $B(z) = A(z) + h$, $h > 0$. Тогда число вращения μ преобразования B строго больше, чем число вращения $\frac{m}{n}$ преобразования A.*

Доказательство. Очевидно, $\mu \geqslant \frac{m}{n}$. При этом $B^n(z) > A^n(z)$ и потому B не имеет цикла порядка n. Значит, $\mu > \frac{m}{n}$.

ЛЕММА ε (вырожденный случай теоремы Лиувилля). *Если неравенство $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{c}{|n|}$ при любом $c > 0$ имеет бесконечное множество несократимых решений $\frac{m}{n}$, то число α иррационально.*

Доказательство. Если $\alpha = \frac{p}{q}$, то при $n > q$

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| > \frac{\frac{1}{|q|}}{|n|},$$

так как дробь $\frac{m}{n}$ несократима и, значит, $|pn - qm| \neq 0$ при $q < n$.

1.3. Преобразование A строится как предел последовательности преобразований A_n с рациональными числами вращения. Начнем с преобразования $z \to A_1(z)$; будем предполагать, что оно обладает следующими свойствами:

1_1. A_1 аналитично в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$ и в этой полосе $|A_1(z)| < \frac{C}{2}$.

2_1. Число вращения A_1 рационально. $\mu_1 = \frac{p_1}{q_1}$.

$3_{1а}$. A_1 полуустойчиво вперед.

$3_{1б}$. A_1 имеет ровно один цикл.

Существование такого A_1 очевидно: из всякого A_1'' со свойством 1_1 надлежащим выбором $h > 0$ можно получить $A_1' = A_1'' + h$ со свойствами 1_1, 2_1 и 3_1, а затем исправить A_1' в A_1 согласно лемме α. Последующие преобразования A_n получаются из предыдущих с помощью процесса, в основании которого лежит нижеследующая

ИНДУКТИВНАЯ ЛЕММА. *Пусть* $\delta_n > 0$ *и пусть даны преобразования* A_k $(k = 1, 2, \ldots; n)$ *и* $R > 0$, $C > 0$ *такие, что*

1_n. *При* $|\operatorname{Im} z| < R$ A_k *аналитичны и удовлетворяют неравенствам*

$$|A_k(z) - A_{k-1}(z)| < \frac{C}{2^k} \quad (A_0(z) \equiv 0).$$

2_n. *Числа вращений* A_k *рациональны и при* $k > 1$

$$\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| < \frac{1}{(k-1)^2 (\max\limits_{l<k} q_l)^2}.$$

3_n. A_k *полуустойчивы вперед и имеют по одному единственному циклу.*

Тогда можно построить преобразование A_{n+1} *так, что последовательность* A_k $(k = 1, 2, \ldots, (n+1)$ *будет обладать свойствами* 1_{n+1}, 2_{n+1}, 3_{n+1} *и*

4_{n+1}. $$|A_{n+1}(z) - A_n(z)| < \delta_n \text{ при } \operatorname{Im} z = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразования A_λ: $z \to A_n(z) + \lambda$, $\lambda > 0$. Очевидно, существует $\lambda_0 > 0$ такое, что при $\lambda < \lambda_0$

$$|A_\lambda(x) - A_n(z)| < \frac{C}{2^{n+2}} \quad (|\operatorname{Im} z| < R),$$

$$|A_\lambda(z) - A_n(z)| < \frac{\delta_n}{2} \quad (\operatorname{Im} z = 0)$$

и число вращения A_λ строго больше $\frac{p_n}{q_n}$ (лемма δ) и меньше

$$\frac{p_n}{q_n} + \frac{1}{n^2 (\max\limits_{l \leq n} q_j)^2}$$

(непрерывность числа вращения, см. § 9). Пусть число вращения A_{λ_0} есть μ; выберем рациональное число $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$,

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < \mu,$$

и среди всех λ, для которых число вращения A_λ есть $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, выберем наибольшее — пусть это будет λ_1. Преобразование A_{λ_1} обладает свойствами 1_{n+1}, 2_{n+1}, 4_{n+1} и, как легко видеть, полуустойчиво вперед. Применим к нему лемму α; тогда мы получим преобразование A_{n+1}, удовлетворяющее всем требованиям индуктивной леммы.

1.4. Преобразование A_1 удовлетворяет условиям 1_1, 2_1, 3_1 индуктивной леммы при тех же C, R. Опишем выбор δ_n при проведении индукции от A_n к A_{n+1}. Обозначим через G_n^* ε-окрестность единственного цикла A_n, где $\varepsilon > 0$ таково, что мера G_n^* меньше 2^{-n-2}. По лемме β, найдется N_n такое, что A_n обладает свойством 2 относительно G_n^* и N_n. По лемме γ, существует $\delta_n^* > 0$, для которого преобразование A обладает свойством 2 относительно N_n и G_n-окрестности G_n^* меры 2^{-n-1}, если на действительной оси

$$|A(z) - A_n(z)| < \delta_n^*.$$

Выберем

$$\delta_{n+1} = \min\left(\frac{\delta_n}{2}, \frac{\delta_n^*}{2}\right)$$

(формально считаем $\delta_0 = 0$). Применяя индуктивную лемму, мы получим A_{n+1}.

Если преобразования A_n ($n = 1, 2, \ldots$) построены описанным способом, то, ввиду свойства 1_n, эта последовательность сходится равномерно в полосе $|\operatorname{Im} z| < R$, так что предел A есть аналитическое преобразование. Очевидно,

$$|A(z) - A_n(z)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |A_{k+1}(z) - A_k(z)| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \delta_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant \delta_n \quad (\operatorname{Im} z = 0)$$

при любом n и поэтому A обладает свойством 2 относительно G_n и N_n ($n = 1, 2, \ldots$). Из свойства 2_n и непрерывности числа вращения на основании леммы ε заключаем, что число вращения A иррационально. Действительно, при любом n

$$\left|\mu - \frac{p_n}{q_n}\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 (\max\limits_{l \leqslant k} q_l)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2 q_n^2} < \frac{2}{q_n^2}.$$

Таким образом, все три свойства п. 1.1 выполнены, так что A есть искомое преобразование.

1.5. Замечание. Рассматривая построение примера, нетрудно заметить, что преобразование A с указанными свойствами можно найти в любом семействе аналитических преобразований

$$z \to A_\Delta z \equiv z + \Delta + F(z)$$

и притом в любой окрестности любого преобразования с иррациональным числом вращения, если только семейство обладает следующим свойством: среди преобразований A_Δ^n нет поворотов. Вероятно, семей-

ство $z \to z + \Delta + \frac{1}{2}\cos z$ обладает этим свойством; в таком случае пример может быть дан простой аналитической формулой.

§ 2. О функциональном уравнении * $g(z+2\pi\mu) - g(z) = f(z)$

2.1. Пусть $f(z)$ — функция периода 2π, μ — действительное число. Требуется определить из уравнения

$$g(z+2\pi\mu) - g(z) = f(z) \tag{1}$$

функцию $g(z)$, имеющую период 2π.

Очевидно, в случае разрешимости уравнения (1)

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,dz = 0.$$

Далее, если $g(z)$ — решение, то $g(z) + C$ — тоже решение. Поэтому мы будем рассматривать только в среднем равные нулю правые части и искать только в среднем равные нулю решения. В каждой функции $\varphi(z)$ на $[0, 2\pi]$ мы выделим постоянную часть

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\,dz$$

и переменную

$$\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z) - \bar{\varphi}.$$

Необходимым условием разрешимости уравнения (1) является, таким образом, равенство $\bar{f} = 0$; под решением (1) в дальнейшем всегда понимается переменная часть $g(z)$.

Если $\mu = \frac{m}{n}$, т. е. рационально, то для существования решения необходимо, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(z + 2\pi\frac{k}{n}\right) = 0,$$

так как эта сумма выражается через решение в виде

$$\sum_{k=1}^{n} g\left(z + 2\pi\frac{m}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} g\left(z + 2\pi\frac{k}{n}\right),$$

а в этих двух суммах слагаемые одинаковы. Если такое условие выполнено, то решение существует, но определено лишь с точностью до про-

---

* Гильберт (12) указывает на это уравнение, как на пример, когда аналитическая задача имеет неаналитическое решение. Оно встречается в исследованиях по метрической теории динамических систем [см. (13), (14)] и представляет собой простейший пример задачи с малыми знаменателями.

Примечание при корректуре. Предлагаемая работа была уже сдана в печать, когда автору стала известна статья A. Wintner'а (40), в которой рассматриваемое уравнение, по-видимому, впервые изучено с современной точки зрения.

извольной функции периода $\frac{2\pi}{n}$, так как таковая удовлетворяет однородному уравнению

$$g\left(z+2\pi\frac{m}{n}\right)-g(z)=0.$$

Если же μ иррационально, то решение единственно, а именно:

1) *При иррациональном* μ *уравнение* (1) *не может иметь двух разных непрерывных решений.*

Доказательство. Разность двух непрерывных решений уравнения (1) удовлетворяет уравнениям

$$g(z+2\pi)-g(z)=0,$$
$$g(z+2\pi\mu)-g(z)=0,$$

т. е. эта непрерывная функция имеет два несоизмеримых периода. Такая функция есть постоянная [см. ([15]), стр. 55—56]; она принимает одно и то же значение во всех точках вида $2\pi k+2\pi\mu l$, которые образуют всюду плотное множество. Так как

$$\int_0^{2\pi} g(z)\,dz=0,$$

то указанная постоянная есть нуль.

2) *При иррациональном* μ *уравнение* (1) *не может иметь двух измеримых, не почти всюду совпадающих решений.*

Доказательство. Рассмотрим снова разность двух решений функцию $g(z)$. Ее можно рассматривать как функцию на окружности так как она имеет период 2π. По условию,

$$g(z+2\pi\mu)-g(z)=0,$$

т. е. $g(z)$ не меняется при повороте на угол $2\pi\mu$. Поэтому множество E_a точек окружности, где $g(z)>a$, инвариантно относительно поворота на угол $2\pi\mu$. Если функция $g(z)$ (почти всюду) постоянна, то эта постоянная, как и в случае 1), есть нуль. Если $g(z)$ не постоянна, то при некотором a множество E_a имеет меру $0<\operatorname{mes}E_a<2\pi$. Но хорошо известно, что множество, инвариантное относительно поворота на несоизмеримый с 2π угол, имеет меру нуль или полную меру [см., например, ([3]); для доказательства достаточно воспользоваться теоремой о точке плотности]. Итак, $g(z)=0$ (почти всюду).

Если функция $f(z)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{n\neq 0} f_n e^{inz},$$

то для коэффициентов Фурье $g(z)$ имеем:

$$g_n e^{2\pi i\mu n}-g_n=f_n,$$

т. е.

$$g_n=\frac{f_n}{e^{2\pi i\mu n}-1},\quad g(z)=\sum_{n\neq 0} g_n e^{inz}. \tag{2}$$

При рациональном μ некоторые из знаменателей обращаются в нуль

При иррациональном μ среди знаменателей есть сколь угодно малые. Заметим, что

$$|e^{2\pi i \mu n} - 1| > |\mu n - m| \qquad (3)$$

при любом целом n и некотором целом m. Поэтому малость знаменателей в (2) зависит от приближений μ рациональными числами.

ЛЕММА 1 [см. ([16])]. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для почти каждого (в смысле меры Лебега) μ, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, существует $K > 0$ такое, что*

$$|\mu n - m| \geqslant \frac{K}{n^{1+\varepsilon}} \qquad (4)$$

при любых целых m и $n > 0$.

Доказательство. Выберем какое-нибудь $K > 0$ и оценим меру множества E_K точек μ, $0 < \mu < 1$, не удовлетворяющих неравенству (4), которое перепишем в виде

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^{2+\varepsilon}}.$$

Это множество содержит все точки $\frac{m}{n}$ с окрестностями радиуса $\frac{K}{n^{2+\varepsilon}}$. При фиксированном n число этих точек будет равно $n+1$, и общая длина окрестностей (на [0, 1]) равна $\frac{K}{n^{1+\varepsilon}}$. Поэтому

$$\operatorname{mes} E_K \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^{1+\varepsilon}} = c(\varepsilon) K.$$

Множество точек μ, для которых требуемое в лемме число K не существует, входит в E_K при любом $K > 0$, поэтому его мера меньше $c(\varepsilon) K$ при любом K, т. е. равна нулю.

2.2. Покажем, что при почти всех μ малые знаменатели лишь немного ухудшают сходимость ряда (2).

ЛЕММА 2 [см. ([17])]. *Ряд*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{|n\mu - m_n|} \qquad (5)$$

сходится при любом $\varepsilon > 0$ и любых целых m_n, если μ таково, что

$$|\mu n - m| \geqslant \frac{K}{n^{1+\varepsilon-\delta}} \quad (K > 0, \quad 0 < \delta < \varepsilon) \qquad (6)$$

при всех целых m и $n > 0$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $|\mu n - m_n| < 1$. Рассмотрим ряды S_i того же вида, что и S, но в которых суммирование распространяется лишь на те индексы $n = n_k^{(i)}$, для которых

$$\frac{1}{2^{i+1}} \leqslant |\mu n_k^{(i)} - m_{n_k^{(i)}}| < \frac{1}{2^i} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots; \; n_{k+1}^{(i)} > n_k^{(i)}). \qquad (7)$$

Ряды S_i в совокупности содержат все члены S, так что достаточно показать, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i < \infty.$$

Для оценки S_i отметим, что в силу (6) последовательные номера $n_k^{(i)}$, $n_{k+1}^{(i)}$ членов ряда S_i значительно удалены: так как из (7) следует неравенство

$$|\mu(n_k^{(i)} - n_{k+1}^{(i)}) - m| < \frac{1}{2^{i-1}},$$

то из (6) выводим:

$$\frac{1}{2^{i-1}} > \frac{K}{N_i^{1+\varepsilon-\delta}},$$

где

$$N_i = \min_{0<k<\infty} (n_{k+1}^{(i)} - n_k^{(i)}).$$

Отсюда получаем:

$$N_i > (2^{i-1}K)^{\frac{1}{1+\varepsilon-\delta}}. \tag{8}$$

Очевидно, что $n_1^{(i)} > N_i$ и вообще $n_k^{(i)} > kN_i$, так что в силу (5), (7), (8) имеем:

$$S_i < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{(kN_i)^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{i+1}}{N_i^{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{2^{i+1}}{2^{(i-1)\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}}} L(\varepsilon, K) \quad (L(\varepsilon, K) > 0),$$

$$S_i < 2^{1+\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}} L 2^{i\left(1-\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}\right)} = L'(\varepsilon, \delta, K)\,\theta^i.$$

Здесь

$$\theta = 2^{1-\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon-\delta}} < 1,$$

поэтому

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Как известно, если $f(x)$ — функция $p+\varepsilon$ раз дифференцируемая *, то ее коэффициенты Фурье имеют порядок убывания

$$f_n = O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\varepsilon},$$

а если

$$f_n = O\left(\frac{1}{n}\right)^{p+1+\varepsilon},$$

то $f(x)$ дифференцируема $p+\varepsilon$ раз. В силу этого, из неравенства (3) и лемм 1, 2, примененных к ряду (2), получаем следующий результат:

Если функция $f(z)$ $p+1+\varepsilon+\delta$ раз дифференцируема, то при почти всех μ уравнение (1) *имеет $p+\varepsilon$ раз дифференцируемое решение.*

С другой стороны, нетрудно построить такие примеры, когда число μ столь хорошо аппроксимируется рациональными, что, несмотря на быстрое

---

* Т. е. функция, у которой p-я производная удовлетворяет условию Гёльдера степени ε: $|f^{(p)}(x+h) - f^{(p)}(x)| < Ch^{\varepsilon}$.

убывание числителей f_n, ряд (2) сходится медленно или вовсе расходится. Поэтому даже если $f(z)$ аналитична, могут встретиться случаи, когда $g(z)$ не аналитична, но бесконечно дифференцируема, или только конечное число раз дифференцируема, или только непрерывна, или даже разрывна, или решение неизмеримо [см. ([14]), ([17])] *.

2.3. Рассмотрим уравнение (1) в классе аналитических функций. Для исследования этого случая напомним две леммы о коэффициентах Фурье аналитических функций.

ЛЕММА 3. *Если функция $f(z)$ периода 2π в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$ аналитична и в этой полосе $|f(z)| \leqslant C$, то ее коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам*

$$|f_n| \leqslant Ce^{-|n|R}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\, e^{-inz}\, dz.$$

Ввиду периодичности $f(z)\, e^{-inz}$,

$$\int_0^{i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz = \int_{2\pi}^{2\pi+i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz,$$

поэтому

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0+i\tau}^{2\pi+i\tau} f(z)\, e^{-inz}\, dz$$

при любом $\tau \in [-R, R]$. Интегрируя в случае $n > 0$ по прямой $\tau = -R$ и при $n < 0$ по $\tau = R$, получаем:

$$|f_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Ce^{-|n|R}\, dz,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Пусть коэффициенты Фурье функции $f(z)$ удовлетворяют неравенствам $|f_n| \leqslant Ce^{-|n|R}$. Тогда $f(z)$ аналитична и удовлетворяет при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-\delta$, $0 < \delta < R$, неравенству*

$$|f(z)| \leqslant \frac{2C}{1-e^{-\delta}},$$

а ее производная — неравенству

$$|f'(z)| \leqslant \frac{2C}{(1-e^{-\delta})^2}.$$

---

* А. Н. Колмогоров ([14]) высказал гипотезу, что последний случай реализуется всегда, если ряд $\sum\limits_{n \neq 0} \dfrac{|f_n^2|}{|e^{2\pi i\mu n}-1|^2}$ расходится.

Доказательство. При $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-\delta$, $0<\delta<R$, очевидно, что

$$|e^{inz}| \leqslant e^{|n|(R-\delta)}.$$

Поэтому

$$|f_n e^{inz}| \leqslant Ce^{-|n|\delta}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n e^{inz}| \leqslant 2 \sum_{n=0}^{\infty} Ce^{-n\delta} \leqslant \frac{2C}{1-e^{-\delta}} .$$

Точно так же и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n ine^{inz}| \leqslant 2C \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\delta} \leqslant \frac{2C}{(1-e^{-\delta})^2} .$$

В полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-\delta$ ряды сходятся абсолютно равномерно. Лемма доказана.

Теперь нетрудно исследовать аналитические решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(z)=\widetilde{f}(z)$ — аналитическая функция периода 2π и при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$ $|f(z)| \leqslant C$. Пусть μ — иррациональное число, $K>0$ и*

$$\left|\mu-\frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^3} \tag{9}$$

при любых целых m и $n>0$. Тогда уравнение

$$g(z+2\pi\mu)-g(z)=f(z)$$

имеет аналитическое решение $g(z)=\widetilde{g}(z)$, и при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R-2\delta$ и любом $\delta<1$, $0<\delta<\frac{R}{2}$,

$$|g(z)| \leqslant \frac{4C}{K\delta^3} , \tag{10}$$

$$|g'(z)| \leqslant \frac{8C}{K\delta^4} . \tag{11}$$

Доказательство. Применяя для оценки коэффициентов Фурье f_n функции $f(z)$ лемму 3 и используя неравенства (3), (9), мы получаем из (2):

$$|g_n| \leqslant \frac{C}{K} n^2 e^{-|n|R}. \tag{12}$$

Отметим простое неравенство

$$|n|^p \leqslant \left(\frac{p}{e}\right)^p \frac{e^{|n|\delta}}{\delta^p} , \tag{13}$$

справедливое при любом $\delta>0$. $\Big($В самом деле, $p\ln x < p\ln\frac{p}{e}+x$, ибо функция x $p\ln x - x$ имеет максимум при $\frac{p}{x}=1$; полагая $x=\delta|n|$, получаем (13). $\Big)$ Применяя (13) к (12) (при $p=2$), имеем:

$$|g_n| \leqslant \frac{Ce^{-|n|R}e^{|n|\delta}}{K\delta^2} = \frac{Ce^{-|n|(R-\delta)}}{K\delta^2} ,$$

откуда, на основании леммы 4, находим в полосе $|\operatorname{Im} z| \leqslant R - 2\delta$:

$$|g(z)| \leqslant \frac{2C}{K\delta^2(1-e^{-\delta})}, \quad |g'(z)| \leqslant \frac{2C}{K\delta^2(1-e^{-\delta})^2}.$$

Так как при $\delta < 1$ $|1-e^{-\delta}| > \frac{\delta}{2}$, то отсюда получаем неравенства (10), (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, если $f(z)$ на действительной прямой действительна, то и решение действительно.

Замечание 2. Если функция $f(z, \lambda)$ аналитически зависит от параметра λ, то и решение (в условиях теоремы 1) аналитично по параметру.

2.4. Рассмотрим уравнение (1) при комплексных μ. В этом случае решением однородного уравнения

$$g(z+2\pi\mu) - g(z) = 0$$

является любая двоякопериодическая функция с периодами 2π и $2\pi\mu$, поэтому решение задачи заведомо не единственно. Если требовать, чтобы $g(z)$ была аналитична в полосе шириной $> |\operatorname{Im} 2\pi\mu|$, то решение (1) определяется однозначно с точностью до постоянной. Действительно, полоса такой ширины содержит параллелограмм периодов, и аналитическое в ней решение однородного уравнения ограничено на всей плоскости, т. е. есть постоянная. Условие $\bar{g} = 0$ выделяет единственное решение, которое дается рядом (2). Этот ряд сходится при любом недействительном μ, но нас интересуют оценки, поэтому окрестности рациональных μ надо исключить. Обозначим через M_K^r множество точек μ из прямоугольника на комплексной плоскости $0 \leqslant \operatorname{Re} \mu \leqslant 1$, $|\operatorname{Im} \mu| \leqslant r$ таких, что при всех целых m, n выполнено неравенство

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3}.$$

Очевидно, вместе с μ в M_K^r входят $\bar{\mu}$, $1-\mu$, $1-\bar{\mu}$.

Вместо неравенства (3) имеем:

$$|e^{2\pi i z} - 1| \geqslant \min\left(\frac{1}{2}, \pi|z-m|\right) \tag{14}$$

для любого комплексного z при некотором целом m. Докажем неравенство (14). Если $|e^{2\pi i z} - 1| \geqslant \frac{1}{2}$, то (14) доказано. Если $|e^{2\pi i z} - 1| < \frac{1}{2}$, то соединим точки 1 и $e^{2\pi i z}$ отрезком и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_1^{e^{2\pi i z}} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}(\ln e^{2\pi i z} - \ln 1) = z - m,$$

где $\ln w$ — одна из ветвей логарифма и $\ln 1 = 2\pi i m$ (m — целое). Так как отрезок интегрирования целиком лежит в круге

$$|w-1| < \frac{1}{2}.$$

а в этом круге $|w| > \frac{1}{2}$, то

$$\left| \int_1^{e^{2\pi i z}} \frac{dw}{w} \right| \leqslant 2\,|e^{2\pi i z} - 1|.$$

Поэтому

$$|z - m| \leqslant \frac{1}{\pi}\,|e^{2\pi i z} - 1|,$$

что и требовалось доказать.

Если $\mu \in M_K^r$, то, применяя (14) к $z = \mu n$, находим:

$$|e^{2\pi i \mu n} - 1| \geqslant \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi K}{n^2}\right).$$

Итак, *если* $\mu \in M_K^r$, *где* $K < \frac{1}{2\pi}$, *то*

$$|e^{2\pi i \mu n} - 1| \geqslant \frac{\pi K}{n^2}. \qquad (15)$$

ТЕОРЕМА 1'. *Пусть* $f(z) = \tilde{f}(z)$ — *аналитическая функция периода* 2π *а при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$ $|f(z)| \leqslant C$, *и пусть* $\mu \in M_K^r$, $K < \frac{1}{2\pi}$. *Тогда уравнение*

$$g(z + 2\pi\mu) - g(z) = f(z) \qquad (1)$$

имеет аналитическое решение $g(z) = \tilde{g}(z)$, *и при* $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| < R - 2\delta$ *и любом* $\delta < 1$, $0 < \delta < \frac{R}{2}$,

$$|g(z)| \leqslant \frac{4C}{\pi K \delta^3}, \quad |g'(z)| \leqslant \frac{8C}{\pi K \delta^4}. \qquad (16)$$

Доказательство. Согласно формуле (2) и лемме 3, имеем:

$$|g_n e^{inz}| \leqslant \frac{Ce^{-|n|R}}{e^{2\pi i \mu n} - 1}\, e^{in(z - 2\pi\mu + 2\pi\mu)}. \qquad (17)$$

Но при $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| < R - 2\delta$

$$|e^{in(z - 2\pi\mu)}| < e^{|n|(R - 2\delta)},$$

так что из (17) вытекает:

$$|g_n e^{inz}| \leqslant \frac{Ce^{-2\delta|n|}}{1 - e^{-2\pi i \mu n}}.$$

Так как $1 - \mu \in M_K^r$, то, в соответствии с (15),

$$|1 - e^{-2\pi i \mu n}| \geqslant \frac{\pi K}{n^2},$$

и, значит,

$$|g_n e^{inz}| \leqslant \frac{Ce^{-2\delta|n|} n^2}{\pi K}.$$

Отсюда, в силу (13), вытекает сходимость рядов $g(z)$ и $g'(z)$, а следовательно, и справедливость неравенств (16) (см. доказательства теоремы 1 и леммы 4).

Замечание 1. Замечание 2 к теореме 1 применимо и к теореме 1'.

Замечание 2. Зафиксируем функцию f и число z и будем рассматри-вать зависимость найденного решения от μ:

$$g(\mu) = \sum_{n \neq 0} \frac{f_n}{e^{2\pi i \mu n} - 1} e^{inz}. \qquad (2$$

Функция $g(\mu)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях, но ос $\operatorname{Im} \mu = 0$ есть купюра. Ряд (2) сходится и на ней почти всюду, н к всюду разрывному пределу. Это не помешает нам в § 7 дифференци-ровать решение по μ даже при $\operatorname{Im} \mu = 0$, пользуясь идеями Бореля ([9]) Пока же считаем, что формула

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = -\sum_{n \neq 0} \frac{2\pi i n e^{2\pi i \mu n} f_n}{(e^{2\pi i \mu n} - 1)^2} e^{inz}$$

имеет смысл только в верхней и нижней полуплоскостях отдельно.

§ 3. Леммы, необходимые для доказательства теоремы 2

3.1. ЛЕММА 5. *Если в каждой точке отрезка $z_1 z_2$ функция $f(z$ аналитична и $\left|\frac{df}{dz}\right| \leqslant L$, то $|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L |z_2 - z_1|$.*

Доказательство. Действительно,

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{df(z)}{dz} dz,$$

откуда следует:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{df(z)}{dz} \right| |dz| \leqslant L |z_2 - z_1|.$$

Замечание. Пример $f(z) = e^{iz}$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$ показывает, чт в комплексной области теорема о конечном приращении в виде

$$f(z_2) - f(z_1) = \frac{df(\xi)}{dz} (z_2 - z_1)$$

или

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \frac{df(\xi)}{dz} \right| |z_2 - z_1|$$

неверна.

3.2. ЛЕММА 6 (о неявной функции). *Пусть функции $F(\varepsilon)$, $\Phi(\varepsilon, \Delta$ аналитичны и при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$*

$$|F(\varepsilon)| \leqslant M_1, \quad |\Phi(\varepsilon, \Delta)| \leqslant M_2 |\Delta|,$$

где $\frac{M_1}{1 - M_2} < \frac{\Delta_0}{3}$ и $M_2 < \frac{1}{6}$. Тогда

1. *Уравнение $\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta) = 0$ имеет аналитическое решени $\Delta^*(\varepsilon)$, удовлетворяющее при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ неравенству $|\Delta^*(\varepsilon)| \leqslant \frac{M_1}{1 - M}$*

2. *Уравнение $\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta) = \Delta_1$ имеет аналитически зависящ от Δ_1 и ε, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, корень $\Delta = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, причем*

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2 |\Delta_1|.$$

Доказательство. 1. Круг $|\Delta| < \frac{M_1}{1-M_2}$ находится при $\frac{M_1}{1-M_2} < \Delta_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ в области, где $|F(\varepsilon)| \leqslant M_1$, $|\Phi(\varepsilon, \Delta)| < M_2|\Delta|$, а потому преобразованием $\Delta \to -F(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon, \Delta)$ переводится внутрь себя:

$$|F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta)| \leqslant M_1 + \frac{M_1}{1-M_2} M_2 = \frac{M_1}{1-M_2}.$$

Неподвижная точка преобразования есть искомое решение $\Delta^*(\varepsilon)$; аналитичность следует из обычной теоремы о неявной функции, так как

$$\frac{\partial}{\partial \Delta}(\Delta + F(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon, \Delta)) \neq 0,$$

что вытекает из оценки $\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta}$ с помощью интеграла Коши: при $|\Delta| \leqslant \frac{2\Delta_0}{3}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta}\right| \leqslant \frac{M_2 \Delta_0}{\frac{\Delta_0}{3}} < \frac{1}{2}.$$

2. При отображении $w \to w + \Phi(w, \varepsilon)$ точка $\Delta^*(\varepsilon)$ переходит в $-F(\varepsilon)$, а точки w круга $|w - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2|\Delta_1|$ — в точки

$$w + \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon) + [\Phi(w, \varepsilon) - \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon)].$$

Так как в условиях леммы для точек этого круга

$$|\Phi(w, \varepsilon) - \Phi(\Delta^*(\varepsilon), \varepsilon)| \leqslant |\Delta_1|$$

(лемма 5), то образ круга $|w - \Delta^*(\varepsilon)| \leqslant 2|\Delta_1|$ содержит весь круг $|w + F(\varepsilon)| \leqslant \Delta_1$ и имеет точку $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, переходящую в $\Delta_1 - F(\varepsilon)$. Эта точка удовлетворяет неравенству

$$|\Delta - \Delta^*| \leqslant 2|\Delta_1|$$

и уравнению

$$\Delta = \Delta_1 - F(\varepsilon) - \Phi(\varepsilon, \Delta).$$

Единственность и аналитичность следует из неравенства $\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta}\right| < \frac{1}{2}$.

Замечание. Легко видеть, что если в условиях леммы 6 функции $F(\varepsilon)$ и $\Phi(\varepsilon, \Delta)$ действительны при действительных ε, Δ, то $\Delta^*(\varepsilon)$ и $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ действительны при действительных Δ_1, ε.

3.3. Метод Ньютона [см. ([18]), ([6])]. Пусть ищется решение уравнения $f(x) = 0$ (рис. 1). Определим x грубо как x_0 и найдем точку пересечения x_1 касательной в x_0 к кривой $y = f(x)$ с осью x:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

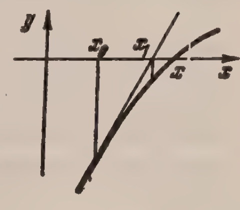


Рис. 1

Далее, определим последовательно

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

и оценим скорость сходимости процесса *. Пусть x — искомое решение

* Здесь не приводятся точные предпосылки и оценки. Они даны в работе ([15]) в весьма общей форме, в которую, однако, не укладываются рассуждения следующих параграфов.

и $|x_0 - x| = \varepsilon$. Тогда отклонение кривой от касательной к ней в точке имеет в точке x порядок ε^2, и, значит, $|x_1 - x|$ есть величина поря ка ε^2. Таким образом, после n-го шага ошибка будет порядка ε^{2^n} — сх димость чрезвычайно быстрая.

Мы применим метод типа метода Ньютона к решению линейно функционального уравнения, аппроксимируемого уравнением, рассмо ренным в § 2. Быстрая сходимость будет парализовать появляющие на каждом шагу малые знаменатели.

§ 4. Теорема 2 и основная лемма

4.1. Наводящие соображения. Преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu$$

есть поворот окружности. Преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \varepsilon F(z)$$

есть поворот, возмущенный членом $\varepsilon F(z)$, который мал вместе с ε. Е число вращения, даже если $\overline{F} = 0$, может отличаться от $2\pi\mu$. Одна можно отыскать $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ такое, что преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)$$

будет иметь число вращения, равное $2\pi\mu$. Мы покажем, что *для но мально приближаемых рациональными числами* μ *и достаточно малы*

1) $\Delta(\varepsilon)$ *аналитически зависит от* ε;

2) *преобразование* $z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)$ *может быть превраще в поворот на угол* $2\pi\mu$ *аналитической заменой переменной* $\varphi(z) = z + g($

Здесь $g(z)$ — малая вместе с ε поправка, и свойство 2) означает, ч

$$\varphi(z + 2\pi\mu + \Delta(\varepsilon) + \varepsilon F(z), \varepsilon) = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu,$$

или, что то же (зависимость g от ε подразумевается),

$$g(z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F(z)) - g(z) = -\Delta - \varepsilon F(z). \quad ($$

Это уравнение отличается от рассмотренного в § 2 только малыми вт рого порядка, поэтому естественно в первом приближении выбра $\Delta = \Delta_1(\varepsilon)$ так, чтобы правая часть уравнения (1) была в среднем рав нулю:

$$\Delta_1 = -\varepsilon\overline{F}$$

и искать $g_1(z)$ как решение уравнения

$$g_1(z + 2\pi\mu) - g_1(z) = -\varepsilon\tilde{F}(z).$$

Определенное отсюда g_1 имеет порядок ε и в переменной $\varphi_1 = z$ – наше преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \varepsilon F(z)$$

имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \varepsilon F(z)) &= z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F + \\ + g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) &= z + g_1(z) + 2\pi\mu + \\ &+ [g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) - g_1(z + 2\pi\mu)] + \\ &+ [g_1(z + 2\pi\mu) - g_1(z) + \varepsilon\tilde{F}(z)] + (\Delta_1 + \varepsilon\overline{F}).\end{aligned}$$

Два последних члена, благодаря выбору Δ_1 и $g_1(z)$, обращаются в нуль, и мы получаем:

$$\varphi_1(z) \to \varphi_1(z) + 2\pi\mu + F_2(z, \varepsilon).$$

Теперь «возмущение» имеет вид:

$$F_2(z, \varepsilon) = g_1(z + 2\pi\mu + \Delta_1 + \varepsilon F) - g_1(z + 2\pi\mu) = \frac{dg_1(\xi)}{dz}(\Delta_1 + \varepsilon F).$$

Здесь $\frac{dg_1}{dz}$, как и g_1, есть величина порядка ε, и, так как то же относится ко второму сомножителю, возмущение в параметре φ_1 имеет порядок ε^2. С преобразованием

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + F_2$$

можно поступить таким же образом и определить «поправку в частоту» Δ_2 и новый параметр φ_2 так, чтобы преобразование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2$$

в параметре φ_2 превращалось в преобразование

$$\varphi_2 \to \varphi_2 + 2\pi\mu + F_3,$$

где $F_3 \sim \varepsilon^4$. Однако при этом в параметре z преобразование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2$$

не будет иметь вида

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + \varepsilon F.$$

Поэтому надо начать с преобразования

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_1'(\Delta_2) + \varepsilon F;$$

тогда при должном выборе $\Delta_1'(\Delta_2)$ можно в параметре φ_1 получить преобразование

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_2 + F_2'(\varphi_1),$$

в параметре φ_2 — преобразование

$$\varphi_2 \to \varphi_2 + 2\pi\mu + F_3',$$

и т. д. Быстрая сходимость метода $(F_n \sim \varepsilon^{2^{n-1}})$ позволяет провести предельный переход и в пределе получить новый параметр $\varphi(z, \varepsilon)$ и окончательную поправку $\Delta(\varepsilon)$, обладающие свойствами 1) и 2).

Обычный в теории возмущений путь решения нашей задачи состоял бы в том, что $\Delta(\varepsilon)$ и $\varphi(z, \varepsilon)$ искались бы в виде рядов по степеням ε, причем коэффициенты рядов определялись бы последовательно из условий выполнения равенства (1) в первом приближении, втором и т. д. Доказать сходимость таких рядов прямыми оценками не удается, однако она вытекает из нижеследующей основной теоремы настоящей работы.

4.2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть даны аналитически зависящее от двух параметров* ε, Δ *семейство аналитических преобразований окружности*

$$z \to A(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) \tag{2}$$

и числа $R > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $K > 0$, $L > 0$ *такие, что*

1) $F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$;

2) *при* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varepsilon = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} F(z, \varepsilon) = 0$;

3) *при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|F(z, \varepsilon)| \leqslant L|\varepsilon|; \tag{3}$$

4) *иррациональное число* μ *при любых целых* m *и* n *удовлетворя*
неравенству

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3}.$$

Тогда существуют числа ε' *и* R', $0 < \varepsilon' \leqslant \varepsilon_0$, $0 < R' \leqslant R$, *и функц* $\Delta(\varepsilon)$, $\varphi(z, \varepsilon)$, *действительные при действительных* ε *и* z *и аналити ские при* $|\varepsilon| < \varepsilon'$, $|\operatorname{Im} z| < R'$, *такие, что*

$$\varphi(A(z, \varepsilon, \Delta(\varepsilon)), \varepsilon) = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu.$$

Эта теорема доказана в § 6 на основе следующей леммы.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть даны аналитически зависящее от па метров* ε, Δ *семейство аналитических преобразований окружности*

$$z \to A_0(z, \varepsilon, \Delta) \equiv z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$$

и числа $R_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $K > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$, $0 < \Delta_0 < 1$ *такие, что*

1) $F(z + 2\pi, \varepsilon) = F(z, \varepsilon)$, $\Phi(z + 2\pi, \varepsilon, \Delta) = \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$;

2) *при* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \varepsilon = \operatorname{Im} \Delta = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} \Phi = 0$;

3) *при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$|F(z, \varepsilon)| \leqslant C < \delta^8,$$
$$|\Phi(z, \varepsilon, \Delta)| < \delta |\Delta|;$$

4) *иррациональное число* μ *при любых целых* m *и* n *удовлетворя неравенству* (4);

5) *число* δ *удовлетворяет неравенствам*

$$\delta < \frac{K}{64}, \quad \delta < \frac{R_0}{8},$$
$$\delta < \frac{1}{36}, \quad (1$$

и, кроме того,

$$C < \frac{\Delta_0}{6}. \quad (1$$

Тогда существуют аналитические функции $z(\varphi, \varepsilon)$, $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, $F_1(\varphi,$ $\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$ *такие, что*

1. *Тождественно*

$$z[A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1), \varepsilon] = A_0[z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)], \quad (1$$

где

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) \equiv \varphi + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1). \quad (1$$

2. $F_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon) = F_1(\varphi, \varepsilon)$, $\Phi_1(\varphi + 2\pi, \varepsilon, \Delta_1) = \Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$; $z(\varphi + 2\pi, \varepsilon) = z(\varphi, \varepsilon) + 2\pi$.

3. *При* $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \Delta_1 = \operatorname{Im} \varepsilon = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Im} F_1 = \operatorname{Im} \Phi_1 =$

4. *При* $|\Delta_1| \leqslant C$, $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 7\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|F_1(\varphi, \varepsilon)| \leqslant \frac{C^2}{\delta^6}, \quad ($$
$$|\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)| \leqslant \delta^2 |\Delta_1|, \quad ($$
$$|z(\varphi, \varepsilon) - \varphi| \leqslant \frac{C}{\delta^4}, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right| < 2, \quad (1$$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| \leqslant \Delta_0, \quad \left|\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1}\right| < 2. \tag{17}$$

Основная лемма показывает, что малое (порядка C) возмущение поворота $z \to z + 2\pi\mu$ можно компенсировать изменением параметра $z \to \varphi$ при $\Delta = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ так, что в новом параметре отличие от поворота будет порядка C^2. Доказательство леммы изложено в следующем параграфе.

4.3. В § 11 мы используем следующее утверждение.

Следствие теоремы 3. *Пусть иррациональное число μ удовлетворяет неравенству (4) теоремы 2, и пусть $R > 0$. Тогда существует $C(R, K) > 0$ такое, что если преобразование*

$$Az: z \to z + 2\pi\mu + F(z)$$

имеет число вращения $2\pi\mu$ и $|F(z)| \leqslant C$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, то Az можно превратить в поворот на угол $2\pi\mu$ аналитической заменой переменной.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{\max\limits_{|\operatorname{Im} z| \leqslant R} |F(z)|}$$

и семейство преобразований

$$A_\varepsilon z: z \to z + 2\pi\mu + \varepsilon F_1(z),$$

удовлетворяющее условиям теоремы 2 при $L = 1$, так как $|F_1(z)| \leqslant 1$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$. По теореме 2, существует $\varepsilon'(R, K) > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon'$ преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta(\varepsilon) + \varepsilon F_1(z).$$

может быть превращено в поворот на угол $2\pi\mu$. Выберем $C(R, K) < \varepsilon'$. Тогда если $|F(z)| \geqslant C$ при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$, то существует Δ такое, что

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta + F(z)$$

может быть аналитическим преобразованием координаты превращено в поворот на угол $2\pi\mu$, ибо

$$F(z) = \max_{|\operatorname{Im} z| \leqslant R} |F(z)| F_1(z),$$

а

$$\max |F(z)| \leqslant C < \varepsilon'.$$

Но число вращения Az равно $2\pi\mu$, откуда следует, что $\Delta = 0$ (см. п. 2 доказательства теоремы 4 в § 10, где показано, что при сколь угодно малом Δ число вращения преобразования $z \to z + 2\pi\mu + \Delta + F(z)$ больше $2\pi\mu$). Следствие доказано.

Утверждение следствия можно получить и непосредственно, используя построения, аналогичные построениям теоремы 2. Ввиду отсутствия параметров ε, Δ, эти построения будут менее громоздки.

4.4. Замечание о многомерном случае. Все построения §§ 2—8 можно понимать как многомерные, заменив точку окружности точкой тора k измерений. Условие 4) теоремы 2 заменяется следующим

условием «несоизмеримости» для вектора $\vec{\mu}$:

$$|n_0 + (\vec{\mu}, \vec{n})| \geqslant \frac{K}{|\vec{n}|^\omega} \qquad (1$$

при любом целочисленном векторе $\vec{n} = (n_0, \ldots, n_k)$. Здесь $(\vec{\mu}, \vec{n})$ — ск лярное произведение

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i n_i, \quad |\vec{n}| = \sum_{i=0}^{k} |n_i|.$$

При достаточно большом ω условие (18) выполнено для почти вс векторов $\vec{\mu}$.

Не останавливаясь подробно на формулировках и доказательств всех неравенств, лемм и теорем для многомерного случая, привед лишь один результат.

МНОГОМЕРНАЯ ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ — вектор с н соизмеримыми компонентами такой, что при любом целочисленном вектор*

$$|n_0 + (\vec{\mu}, \vec{n})| > \frac{K}{|\vec{n}|^{k+1}}.$$

Тогда существует такое $\varepsilon(R, C, k) > 0$, что для векторного поля $\vec{F}(\vec{z})$ н торе, аналитического и достаточно малого, $|\vec{F}(\vec{z})| < \varepsilon$ при $|\operatorname{Im} \vec{z}| <$ найдется вектор $\vec{a}$, для которого преобразование тора в себя

$$\vec{z} \to \vec{z} + \vec{a} + \vec{F}(\vec{z})$$

превращается в

$$\vec{\varphi} \to \vec{\varphi} + 2\pi\vec{\mu}$$

аналитической заменой переменных.

§ 5. Доказательство основной леммы

5.1. Построение $z(\varphi, \varepsilon)$, $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, $F_1(\varphi, \varepsilon)$ и $\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)$. Фун ция $z(\varphi, \varepsilon)$ строится как обратная к

$$\varphi(z, \varepsilon) = z + g(z, \varepsilon), \qquad ($$

а функция $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ — как обратная к $\Delta_1(\Delta, \varepsilon)$. В п. 4.1 мы видел что эти функции надо выбирать так, чтобы выражение

$$g(A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon) - g(z, \varepsilon) + F(z, \varepsilon) + \Delta + \Phi(z, \varepsilon, \Delta)$$

было мало. Не определяя пока $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ (т. е. считая Δ независимы переменным), определим $g^*(z, \varepsilon, \Delta)$ как решение уравнения

$$g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta) - g^*(z, \varepsilon, \Delta) = -\widetilde{F}(z, \varepsilon) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta). \qquad ($$

Выражая преобразование A_0 [см. § 4, формула (6)] через параметр

$$\varphi^*(z, \varepsilon, \Delta) = z + g^*(z, \varepsilon, \Delta),$$

получаем:

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = z + 2\pi\mu + \Delta + F(z, \varepsilon) + \Phi(z, \varepsilon, \Delta) + \\ + g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta) + g^*(A_0(z, \varepsilon, \Delta)) - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta),$$

или, преобразуя правую часть с помощью (2),

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = z + g^*(z, \varepsilon, \Delta) + 2\pi\mu + \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta) + \\ + g^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta).$$

Таким образом, согласно (1), получаем:

$$\varphi^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] = \varphi^*(z, \varepsilon, \Delta) + 2\pi\mu + \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta) + \\ + g^*[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon, \Delta] - g^*(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta). \quad (3)$$

Определим $\Delta_0^*(\varepsilon)$ как решение уравнения

$$\Delta_0^*(\varepsilon) + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)) = 0 \quad (4)$$

и положим

$$g^*(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)) = g(z, \varepsilon). \quad (5)$$

Теперь новый параметр $\varphi(z, \varepsilon)$ определен равенствами (5) и (1). Представим (3) в виде

$$\varphi[A_0(z, \varepsilon, \Delta), \varepsilon] = \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu + \Delta_1(\varepsilon, \Delta) + \hat{F}_1(z, \varepsilon) + \hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta), \quad (6)$$

где

$$\hat{F}_1(z, \varepsilon) = g(z_{I}, \varepsilon) - g(z_{II}, \varepsilon), \quad (7)$$

$$\hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta) = g(z_{III}, \varepsilon) - g(z_{I}, \varepsilon), \quad (8)$$

$$\Delta_1(\varepsilon, \Delta) = \Delta + \overline{F}(\varepsilon) + \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta), \quad (9)$$

$$z_{I} = z + 2\pi\mu + \widetilde{F}(z, \varepsilon) + \hat{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)), \quad (10)$$

$$z_{II} = z + 2\pi\mu, \quad (11)$$

$$z_{III} = z + 2\pi\mu + \widetilde{F}(z, \varepsilon) + \Delta_1(\varepsilon, \Delta) + \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta). \quad (12)$$

Определим $z(\varphi, \varepsilon)$ из (1), $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$ —из (9) и обозначим

$$F_1(\varphi, \varepsilon) = \hat{F}_1(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \quad (13)$$

$$\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) = \hat{\Phi}_1(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)), \quad (14)$$

$$A_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1) = \varphi[A_0(z(\varphi, \varepsilon), \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)), \varepsilon]. \quad (15)$$

5.2. Докажем, что построенные функции являются искомыми. Утверждения 1, 2 и 3 основной леммы выполнены очевидным образом. Доказательство утверждения 4 базируется на следующих оценках.

1°. Оценка $\Delta_0^*(\varepsilon)$. На основании неравенств (10), (11) § 4 к уравнению (4) применима лемма 6 (§ 3). При этом $M_1 = C$, $M_2 = \delta$, и так как

$$\frac{C}{1-\delta} < \frac{\Delta_0}{3}, \quad \delta < \frac{1}{2}$$

[см. формулы (10), (11) § 4], то

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < \frac{C}{1-\delta}.$$

Принимая во внимание, что $\delta < \frac{1}{2}$, находим при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$:

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < 2C. \quad (16)$$

2°. Оценка $g(z, \varepsilon)$. Неравенство (16) позволяет оценить правую часть уравнения (2). При $|\operatorname{Im} z| < R$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $\Delta = \Delta_0^*(\varepsilon)$ из (16) и неравенств (7), (8), (10) § 4 вытекает:

$$|\widetilde{F}(z, \varepsilon) + \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta)| \leqslant 2C + 2\delta \cdot 2C < 4C. \tag{17}$$

Применяя к уравнению (2) теорему 1 § 2, получаем на основании (5), (17) и условия 4) основной леммы, что при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 2\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и любом $\delta < 1$, $0 < \delta < \frac{R_0}{2}$,

$$|g(z, \varepsilon)| < \frac{8 \cdot 4C}{K\delta^3}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| < \frac{16 \cdot 4C}{K\delta^4},$$

откуда, ввиду неравенства (9) § 4,

$$|g(z, \varepsilon)| < \frac{C}{\delta^4}, \quad \left|\frac{\partial g(z, \varepsilon)}{\partial z}\right| < \frac{C}{\delta^5}. \tag{18}$$

Так как, в силу неравенства (7) § 4, $C < \delta^8$, то отсюда вытекает, что

$$|g(z, \varepsilon)| < \delta.$$

Поэтому при отображении $z \to \varphi(z, \varepsilon) = z + g(z, \varepsilon)$ полоса

$$|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 2\delta$$

перейдет в область, содержащую полосу

$$|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

В последней обратная функция аналитична, ибо $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| > \frac{1}{2}$ при $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 2\delta$. Тем самым доказано неравенство (16) § 4.

3°. Оценка $F_1(\varphi, \varepsilon)$. Пусть $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 3\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Так как, в силу неравенства (16) и условий 3), 5) основной леммы,

$$|\widetilde{F}(z, \varepsilon) + \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon))| < \delta,$$

то мнимые части z_{I} и z_{II} [см. (10) и (11)] не превосходят $R_0 - 2\delta$. Применяя лемму 5 § 3, получаем, на основании (17), (18), что при $|\operatorname{Im} z| < R_0 - 3\delta$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|\hat{F}(z, \varepsilon)| \leqslant \frac{4C^2}{\delta^5}. \tag{19}$$

Заметим, что появление C^2 в этом неравенстве является наиболее существенным моментом доказательства теоремы 2.

При $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 4\delta$ и $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, имеем, в силу 2°:

$$|\operatorname{Im} z(\varphi, \varepsilon)| < R_0 - 3\delta,$$

и поэтому оценка (14) § 4 вытекает из (19) ввиду определения $F_1(\varphi, \varepsilon)$ и неравенства (10) § 4.

4°. Оценка $|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta_0^*(\varepsilon)|$. Уравнение

$$\Delta = \Delta_1 - \overline{F}(\varepsilon) - \overline{\Phi}(\varepsilon, \Delta),$$

определяющее $\Delta(\Delta_1, \varepsilon)$, принадлежит к типу, рассмотренному в лемме 6 § 3. Мы видели [см. (16)], что $|\Delta_0^*(\varepsilon)| < 2C$, откуда, на основании

формулы (11) § 4, вытекает:

$$|\Delta_0^*(\varepsilon)| < \frac{\Delta_0}{3}. \qquad (20)$$

Таким образом, лемма 6 применима, и при $|\Delta_1| \leqslant C < \frac{\Delta_0}{6}$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon) - \Delta_0^*(\varepsilon)| < 2|\Delta_1|. \qquad (21)$$

Сравнивая (20) и (21), находим, что при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| \leqslant C$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| < \frac{2}{3}\Delta_0.$$

При $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $|\Delta| < \frac{2}{3}\Delta_0$ по формуле Коши имеем:

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}\right| < \frac{\delta\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{3}} < \frac{1}{2}$$

[см. неравенства (8), (10) § 4]. Оценка (17) § 4 доказана, ибо очевидно, что

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\Delta_1}\right| = \left|\frac{1}{1 + \frac{\partial\Phi}{\partial\Delta}}\right| < 2.$$

5°. Оценка $|\Phi_1(\varphi, \varepsilon, \Delta_1)|$. Составим разность $z_{III} - z_I$. В силу формул (12), (10), она равна

$$\Delta_1 + \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon)).$$

По лемме 5 § 3, при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$

$$|\widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta(\Delta_1, \varepsilon)) - \widetilde{\Phi}(z, \varepsilon, \Delta_0^*(\varepsilon))| < |\Delta - \Delta_0^*|,$$

так как $\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right| < 1$. Сопоставляя полученное неравенство с неравенством (21), имеем:

$$|z_{III} - z_I| < 3|\Delta_1|. \qquad (22)$$

Применяя лемму 5 § 3 к правой части (8), на основании (22), (18) и неравенств (7), (10) § 4 находим, что

$$|\hat{\Phi}_1(z, \varepsilon, \Delta)| < \frac{C}{\delta^5} 3|\Delta_1| < \delta^2|\Delta_1| \qquad (23)$$

при условии, что $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_1| < \frac{\Delta_0}{6}$,

$$|\operatorname{Im}(z + \Delta_1 + \widetilde{F} + \widetilde{\Phi})| \leqslant R_0 - 2\delta.$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$|\operatorname{Im} z| < R_0 - 6\delta, \quad |\Delta_1| < C, \quad |\varepsilon| < \varepsilon_0.$$

Действительно, тогда

$$|\widetilde{F} + \widetilde{\Phi}| < \delta + 2\delta\Delta_0 < 3\delta$$

[см. формулы (7), (8), (17) § 4 и неравенство (20)] в обоих членах z_{III} и z_I. При $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant R_0 - 7\delta$, $|\Delta_1| < C$ имеем, в силу 2°:

$$|\operatorname{Im} z| < R_0 - 6\delta.$$

Поэтому из (23) следует оценка (15) § 4.

Основная лемма доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 2

6.1. Построение $z(\varphi, \varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Положим в основной лем $\Phi = 0$, а за $F(z, \varepsilon)$ примем функцию $F(z, \varepsilon)$ теоремы 2. Выберем $\delta_1 >$ так, чтобы

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R_0}{8}$, где $\delta_n = \delta_{n-1}^{1\frac{1}{2}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

2) $\delta_1 < \frac{K}{64}$, $\delta_1 < \frac{1}{36}$.

Пусть $6\delta_1^{12} < \Delta_0 < 1$, $R = R_0$, K — то же, что в условии теоремы. Пу $L\varepsilon' < C_1 = \delta_1^{12}$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon_0$, C_1 и δ_1 — соответственно ε_0, C и δ основн леммы. Тогда все ее предположения выполнены, и при $|\operatorname{Im} \varphi_1| \leqslant R - 7$ $\varepsilon| \leqslant \varepsilon'$, $|\Delta_1| \leqslant C_1$ мы получаем:

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi_1, \varepsilon) + \Phi_1(\varphi_1, \varepsilon, \Delta_1),$$

где

$$|F_1(\varphi_1, \varepsilon)| \leqslant \delta_1^{18} = \delta_2^{12},$$

$$|\Phi_1(\varphi_1, \varepsilon, \Delta_1)| \leqslant \delta_1^2 |\Delta_1| < \delta_2 |\Delta_1|,$$

$$|z(\varphi_1, \varepsilon) - \varphi_1| \leqslant \delta_1, \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \varphi_1}\right| < 2,$$

$$|\Delta(\Delta_1, \varepsilon)| \leqslant \Delta_0,$$

$$\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1}\right| < 2.$$

Вообще, если определены функции $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\Delta_{k-1}(\Delta_k, \varepsilon), \quad F_k(\varphi_k, \varepsilon), \quad \Phi_k(\varphi_k, \varepsilon, \Delta_k), \quad \varphi_{k-1}(\varphi_k, \varepsilon)\,^*,$$
$$A_k(\varphi_k, \varepsilon, \Delta_k),$$

удовлетворяющие заключению основной леммы с заменой z на φ_{k-1}^*, φ φ_k, R_0 на R_{k-1}, $R_0 - 7\delta$ на $R_k = R_{k-1} - 7\delta_k$, Δ_0 на δ_{k-1}^*, A_0 на A_{k-1}, на A_k, δ на δ_k, C на $C_k = \delta_k^{12}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$, то мы мож ввести функции φ_{n+1} и Δ_{n+1} так, что заключение основной леммы бу для них справедливо при $k = 1, \ldots, n+1$. Действительно, неравенс (9) и (10) § 4 будут выполнены для δ_n в силу определения δ_1, (следует из неравенства $C_{k+1} = C_k^{1\frac{1}{2}} < \frac{1}{6} C_k$, а все остальные услов леммы входят в заключение (конечно, для функций предыдущего номер Поэтому мы можем считать все указанные выше функции построенным Функции $\varphi_{n-1}(\varphi_n, \varepsilon)$, $\Delta_{n-1}(\Delta_n, \varepsilon)$ $(n = N, \ N-1, \ldots, 1)$ определя функции

$$z^{(N)}(\varphi_N, \varepsilon) = z(\varphi_1(\ldots(\varphi_N, \varepsilon)\ldots), \varepsilon),$$
$$\Delta_0^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon) = \Delta(\Delta_1(\ldots(\Delta_N, \varepsilon)\ldots), \varepsilon).$$

Положим $\Delta_N = 0$, и пусть $\Delta_0^{(N)}(0, \varepsilon) = \Delta'^{(N)}(\varepsilon)$. Тогда

$$\Delta(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} \Delta^{(N)}(\varepsilon),$$

---

* φ_0 означает z, C_0 означает Δ_0; $\Delta_{1-1}(\Delta_1, \varepsilon) = \Delta(\Delta_1, \varepsilon)$.

$$z(\varphi, \varepsilon) = \lim_{N\to\infty} z^{(N)}(\varphi, \varepsilon).$$

Для обоснования сходимости $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$ и $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$ отметим, прежде всего, что, согласно определению δ_n, при $\omega > 0$

$$\lim_{N\to\infty} 2^N \delta_N^{\omega} = 0.$$

6.2. Сходимость $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$. Функции $\Delta_0^{(N)}(\Delta_N, \varepsilon)$, как это следует из формулы (7) и из неравенства (17) § 4, определены при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, $|\Delta_N| \leqslant \delta_N^{12}$. Так как

$$\frac{\partial \Delta_0^{(N)}}{\partial \Delta_N} = \frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1} \cdots \frac{\partial \Delta_{N-1}}{\partial \Delta_N},$$

то в указанной области, на основании (5), выполнено неравенство

$$\left| \frac{\partial \Delta_0^{(N)}}{\partial \Delta_N} \right| < 2^N,$$

а так как

$$|\Delta_N \ [\Delta_{N+1}(\ldots(\Delta_M, \varepsilon)\ldots\varepsilon), \varepsilon]| \leqslant \delta_N^{12},$$

если $|\Delta_M| \leqslant \delta_M^{12}$ $(M \geqslant N)$, то, по лемме 5 § 3,

$$|\Delta_0^N [\Delta_N(\Delta_{N+1}\ldots(\Delta_M, \varepsilon)\ldots, \varepsilon), \varepsilon] - \Delta_0^{(N)}(0, \varepsilon)| < 2^N \delta_N^{12}.$$

Отсюда, в силу (7), выводим:

$$|\Delta^{(N)}(\varepsilon) - \Delta^{(M)}(\varepsilon)| < 2^N \delta_N^{12},$$

откуда непосредственно следует равномерная сходимость $\Delta^{(N)}(\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, а значит, и аналитичность $\Delta(\varepsilon)$.

6.3. Сходимость $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$. Согласно основной лемме, функции $\varphi_{n-1}(\varphi_n, \varepsilon)$ определены при $|\operatorname{Im}\varphi_n| \leqslant R_n$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и, в силу (3), отличаются от своего аргумента φ меньше, чем на δ_n, поэтому

$$|\operatorname{Im}\varphi_{n-1}(\varphi_n, \varepsilon)| < R_{n-1}.$$

Таким образом, формула (6) определяет $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$ в полосе

$$|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant R_n = R_0 - 7\sum_{k=1}^{n} \delta_k.$$

Согласно условию 1) выбора δ_1, все эти полосы содержат полосу $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \frac{R}{8}$, так что в последней определены все функции $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$.

Так как

$$|\varphi_N(\varphi_{N+1}\ldots(\varphi_M, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) - \varphi_M| < \sum_{k=N}^{M} \delta_k,$$

а эта сумма, согласно определению δ_n, не больше $2\delta_N$, то из (6) находим:

$$|z^{(N)}(\varphi, \varepsilon) - z^{(M)}(\varphi, \varepsilon)| < \left|\frac{\partial z^{(N)}}{\partial \varphi}\right| 2\delta_N.$$

На основании (3),

$$\left|\frac{\partial z^{(N)}}{\partial \varphi}\right| < 2^N,$$

следовательно,

$$|z^{(N)}(\varphi, \varepsilon) - z^{(M)}(\varphi, \varepsilon)| < 2^{N+1}\delta_N,$$

что доказывает равномерную сходимость $z^{(N)}(\varphi, \varepsilon)$ при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant$ –
$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

6.4. Определим $\varphi(z, \varepsilon)$ как обратную функцию к $z(\varphi, \varepsilon)$. Из не венств (1), (2), ввиду того, что $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, вытекает, что

$$\varphi(z, \varepsilon) \to \varphi(z, \varepsilon) + 2\pi\mu,$$

когда $z \to A(z, \varepsilon, \Delta(\varepsilon))$. Теорема 2 доказана.

§ 7. О моногенных функциях

7.1. Понятие моногенности. При исследовании зависимо решения уравнения (1) § 2 от параметра μ мы встретились с ана тической в верхней и нижней полупл костях и всюду разрывной на дейст тельной оси функцией. Такими же св ствами обладают (см. § 8) все построенн § 6 функции Δ_n, g_n, φ_n, F_n, Φ_n, р сматриваемые как функции от μ. Функц эти принадлежат к типу тех, кото Борель ([9]) назвал моногенными.

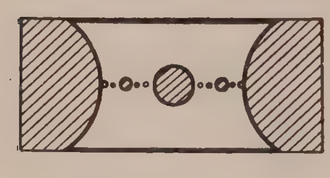


Рис. 2

Моногенные функции Бореля определены на множестве $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}$ ...
где $E_k \subseteq E_{k+1}$ — совершенные компактные подмножества комплекс плоскости. В нашем случае E_k есть множесто M_K^R точек μ прямоуго ника комплексной плоскости $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1$, для которых

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{|n|^3} \quad \left(K = \frac{1}{k}\right),$$

т. е. множество, образованное выкидыванием из прямоугольни $\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\mu \leqslant 1$ заштрихованных на рис. 2 кругов $C_{\frac{m}{n}, K}$
диусов $\frac{K}{|n|^3}$ с центрами в рациональных точках $\frac{m}{n}$.

Определение. Функция $f(\mu)$ *равномерно дифференцируема* совершенном компакте F комплексной плоскости, и функция $g(\mu)$ — производная, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\frac{f(\mu_1) - f(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} - g(\mu_3)\right| < \varepsilon,$$

коль скоро $|\mu_1 - \mu_3| < \delta$, $|\mu_2 - \mu_3| < \delta$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in F$.

Функция *моногенна* на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, если она равномерно дифференцируема на каждом E_k.

В частности, равномерно дифференцируемая на E функция моногенна на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{1} E_k$, и, наоборот, моногенная на $E=\bigcup\limits_{k=1} E_k$ функция равномерно дифференцируема на E. Такие функции мы будем называть моногенными на E, в отличие от моногенных на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

Очевидны следующие свойства моногенных функций.

1) Из моногенности на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ следует непрерывность производной на E_k.

2) Если Γ — спрямляемая кривая, соединяющая две точки α и β в E_k, то

$$\int\limits_{\Gamma} f'(\mu)\,d\mu = f(\beta)-f(\alpha).$$

3) Функция, аналитическая в окрестности каждой точки множества моногенна на нем.

4) Если E_k содержит область, то в ней моногенная на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ функция аналитична.

Пример неаналитической моногенной функции построен в § 2, что доказано в п. 7.4 (см. лемму 10; то, что $g(\mu)$ не аналитична при $\operatorname{Im}\mu=0$, предоставляется доказать читателю).

Свойства моногенной функции могут существенно зависеть от ее области определения $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ и от разложения E на E_k. Если скорость убывания компонент дополнений к E_k достаточно велика, то, как показал Борель, моногенные функции на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ обладают многими свойствами аналитических (интеграл Коши, бесконечная дифференцируемость, единственность моногенного продолжения). Вопрос о том, какие из этих свойств сохраняются в нашем случае, мы оставим в стороне, так как в дальнейшем (§ 8 и § 11) используется только определение равномерной дифференцируемости.

Класс моногенных на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ функций зависит не только от E, но и от E_k. Однако если E получается при помощи другой системы множеств, $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $F_k\subseteq F_{k+1}$, таких, что

$$E_{\alpha k}\subseteq F_k\subseteq E_{\beta k} \quad (\alpha<1<\beta),$$

то классы функций, моногенных на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ и на $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, совпадают. Множества M_K^R (рис. 2) неудобны для исследования моногенных функций ввиду запутанного характера пересечений кругов $C_{\frac{m}{n},K}$. Поль-

зуясь предыдущим замечанием, мы заменим эти множества друг системой множеств, N_K^R, так, что

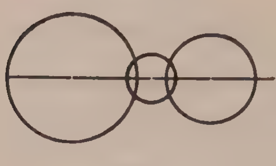


Рис. 3

1. $M_{2K}^R \subseteq N_K^R \subseteq M_{\frac{K}{2}}^R$.

2. Множество N_K^R получается из пр моугольника $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $\operatorname{Re}\mu \in [0,1]$ выкид ванием непересекающихся открытых кругов

Построение N_K^R $\left(K < \frac{1}{9}\right)$ изложено в п. 7 оно громоздко и может быть пропуще читателем.

7.2. П о с т р о е н и е N_K^R. Преобразование M_K^R в N_K^R состоит из дв операций. Сперва выкидываемые круги $C_{\frac{m}{n}, K}$ уменьшаются до круг $C'_{\frac{m}{n}, K}$ так, чтобы в системе $C'_{\frac{m}{n}, K}$ $(m = 0, 1, \ldots; n = 1, 2, \ldots)$ не был «мостов» (см. рис. 3), т. е. троек кругов, из которых меньший перес кается с обоими бо́льшими, тогда как последние между собой не пер секаются. Затем круги C' увеличиваются до $C''_{\frac{m}{n}, K}$ так, чтобы два таки круга либо не пересекались, либо один лежал внутри другого. Пр этом нужно распорядиться таким образом, чтобы

$$C_{\frac{m}{n}, K} \supseteq C'_{\frac{m}{n}, K} \supseteq C_{\frac{m}{n}, \frac{K}{2}},$$
$$C'_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}.$$

Тогда

$$C_{\frac{m}{n}, \frac{K}{2}} \subseteq C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}$$

и после выкидывания из прямоугольника кругов $C''_{\frac{m}{n}, K}$ останется мно жество N_K^R, обладающее обоими нужными свойствами.

ЛЕММА 7. *Пусть круги* $C_{\frac{m}{n}, K}$ *и* $C_{\frac{p}{q}, K}$ $(n \geqslant q)$ *пересекаются и* $K < \frac{1}{9}$. *Тогда* $n > 2\sqrt{q^4}$, *т. е. меньший круг гораздо меньше большего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, сумма радиусов кругов больше расстояния между их центрами, так что

$$\frac{K}{n^3} + \frac{K}{q^3} > \left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right|.$$

Так как $pn - qm \neq 0$, то $\left|\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{1}{qn}$, и

$$K(n^3 + q^3) \geqslant q^2 n^2;$$

ввиду неравенства $n \geqslant q$, получаем:

$$K(n^3+q^3) \geqslant q^4,$$

или

$$n^3 > \frac{q^4}{K} - q^3.$$

Учитывая, что $K < \frac{1}{9}$, имеем:

$$n^3 > 9q^4 - q^3 \geqslant 8q^4,$$

что и требовалось доказать.

Операция 1 — построение $C'_{\frac{m}{n}, K}$. Это построение состоит из бесконечного количества последовательно проводимых этапов таких, что после n-го этапа оказываются построенными круги $C'_{\frac{m}{n}, K}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$, обладающие следующими свойствами:

A_n. Никакой круг $C_{\frac{m_1}{n_1}, K}$ $(n_1 > n)$ не может соединять круг $C'_{\frac{m}{n}, K}$ с кругом $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ $(n_2 \leqslant n)$, если эти круги $C'_{\frac{m}{n}, K}$ и $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ сами не пересекаются.

B_n. $C_{\frac{m}{n}, \frac{K}{2}} \subseteq C'_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, K}$.

Начнем с первого этапа. Пусть $C'_{\frac{m}{1}, K} = C_{\frac{m}{1}, K}$. Тогда свойство B_1 выполнено. Свойство A_1 тоже выполнено, так как диаметр круга $C_{\frac{m_1}{n_1}, K}$ $(n_1 > 1)$ меньше

$$\frac{2K}{n_1^3} < \frac{2}{9\cdot 8} \quad \left(K < \frac{1}{9}\right),$$

а расстояние между кругами $C_{\frac{0}{1}, K}$ и $C_{\frac{1}{1}, K}$ больше

$$1 - 2K > \frac{2}{3}.$$

Первый этап закончен.

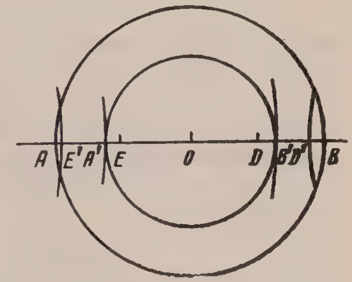


Рис. 4

Предположим, что последовательно проделан $n-1$ этап. Рассмотрим какой-нибудь круг $C = C_{\frac{m}{n}, K}$ (рис. 4). Пусть O — его центр, AB — диаметр, лежащий на действительной оси, E и D — середины AO и OB. Круг C может пересекаться только с теми кругами $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ $(n_2 < n)$, у которых $C_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ пересекается с C (вследствие свойства B_k, $k \leqslant n-1$). Далее,

все такие круги $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ пересекаются и друг с другом (вследствие свойства A_k, $k \leqslant n-1$).

Расположим круги в порядке убывания n_2 (роста кругов):

$$C_i = C_{\frac{m_{2,i}}{n_{2,i}}, K} \quad (n = n_{2,0} > n_{2,1} > \ldots > n_{2,l} \geqslant 1).$$

На основании леммы 7, $n_{2,i} \geqslant 2n_{2,i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant l-1)$, откуда следует, что $n > 2^l$ или $l < \log_2 n$. Таким образом, окружности кругов $C_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ дают в пересечении с диаметром AB не более $2\log_2 n$ точек. Поэтому среди частей, на которые эти точки делят отрезок BD и отрезок AE, найдется по части длины большей, чем $\frac{K}{4n^3 \log_2 n}$. Диаметр же окружности $C_{\frac{m_1}{n_1}, K}$ $(n_1 > n)$, пересекающейся с C, по лемме 7 не превосходит

$$\frac{K}{8n^4} < \frac{K}{4n^3 \log_2 n}.$$

Примем ближние к O концы B' и A' бо́льших частей BD и AE, обозначенных через $B'D'$ и $A'E'$, за концы диаметра $C'_{\frac{m}{n}, K}$. Такой выбор не противоречит свойству B_n. Ясно, что если окружность $C_1 = C_{\frac{m_1}{n_1}, K}$ $(n_1 > n)$ пересекается с $C'_{\frac{m}{n}, K}$, то она лежит внутри C, и из кругов $C_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ $(n_2 \leqslant n)$ может пересекаться только с C_i. Но так как диаметр C_1 меньше длин $B'D'$ и $A'E'$, то C_1 может пересечь лишь те C_i, с которыми пересекается $C'_{\frac{m}{n}, K}$. Поэтому свойство A_n тоже выполнено, и, таким образом, нами указан способ проведения n-го этапа.

По окончании всех этапов получится система кругов $C'_{\frac{m}{n}, K}$, обладающих следующими свойствами:

A. *Никакой круг* $C'_{\frac{m_1}{n_1}, K}$ *не может соединять* $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K}$ *с* $C'_{\frac{m_3}{n_3}, K}$, *если* $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ *и* $C'_{\frac{m_2}{n_2}, K} \cap C'_{\frac{m_3}{n_3}, K} = 0$.

B. $C_{\frac{m}{n}, \frac{K}{2}} \subseteq C'_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, K}$.

Свойство B следует из B_n, а свойство A — из A_{n_2}, если $n_2 \geqslant n_3$, и из A_{n_3}, если $n_3 \geqslant n_2$.

Операция 2 — построение $C''_{\frac{m}{n}, K}$. Теперь мы увеличим круги системы $C'_{\frac{m}{n}, K}$.

Назовем *хвостом* $C = C'_{\frac{m}{n}, K}$ совокупность всех $C'_{\frac{m_i}{n_i}, K}$ $(n_i > n)$, которые соединимы с C монотонной конечной цепочкой попарно пересекаю

щихся кругов $C'_{\frac{m_{j_k}}{n_{j_k}}, K}$ $(0 \leqslant k \leqslant l_i)$:

$$\frac{m_{j_0}}{n_{j_0}} = \frac{m}{n}, \quad n_{j_k} < n_{j_{k+1}}, \quad C'_{\frac{m_{j_k}}{n_{j_k}}, K} \cap C'_{\frac{m_{j_{k+1}}}{n_{j_{k+1}}}, K} \neq 0, \quad \frac{m_{j_{l_i}}}{n_{j_{l_i}}} = \frac{m_i}{n_i}.$$

Очевидно, если круг C_1 входит в хвост круга C_2, то хвост C_1 весь входит в хвост C_2. Более того, если хвосты C_1 и C_2 пересекаются *, то один из хвостов целиком входит в другой. Докажем это. Предположим противное: пусть круги C_1 и C_2 можно соединить с общим кругом их хвостов, C_3, монотонными цепочками. Две такие цепочки вместе соединяют C_1 и C_2. Из соединяющих C_1 и C_2 цепочек выберем состоящую из наименьшего числа кругов. В ней пересекаются только соседние круги (см. рис. 5; в изображенной системе кругов заштрихован хвост наибольшего). Если эта цепочка монотонна, то наше утверждение доказано. Если цепочка не монотонна, то в ней есть круг, соединяющий два превосходящих его, что противоречит свойству А операции 1. Итак, если два хвоста пересекаются, то один из них содержит другой.

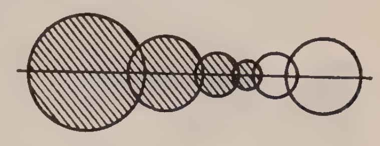


Рис. 5

Пусть α и β — верхняя и нижняя грани точек действительной оси, покрытых хвостом круга $C = C'_{\frac{m}{n}, K}$. Круг с диаметром $\alpha\beta$ и будет кругом $C''_{\frac{m}{n}, K}$. Из сказанного выше следует, что окружности двух таких кругов не пересекаются **. Очевидно, что $C''_{\frac{m}{n}, K} \supseteq C'_{\frac{m}{n}, K}$. Покажем, что

$$C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}.$$

Действительно, основываясь на лемме 7, легко оценить размер хвоста C. Пусть круг C_1 входит в хвост C и монотонная цепочка, соединяющая C_1 с C, состоит из N кругов. Так как каждый следующий из них, по лемме 7, не менее чем в 8 раз меньше предыдущего, то сумма их диаметров не превосходит $\frac{1}{7}$ диаметра C при любом N. Отсюда видно, что α и β удалены от $C'_{\frac{m}{n}, K}$ не более чем на $\frac{1}{7}$ диаметра $C_{\frac{m}{n}, K}$, а от центра $\frac{m}{n}$ — не более чем на $1\frac{2}{7}$ радиуса $C_{\frac{m}{n}, K}$, откуда следует, что

$$C''_{\frac{m}{n}, K} \subseteq C_{\frac{m}{n}, 2K}.$$

---

* Легко видеть, что если два хвоста пересекаются как множества точек, то они имеют общий круг.

** Но могут касаться.

Построение N_K^R закончено.

7.3. Дифференцирование последовательности. Выход в комплексную плоскость μ был предпринят главным образом ради следующей леммы, которая несправедлива, если под множеством N_K^R понимать его часть, лежащую на действительной оси.

ЛЕММА 8. *Пусть последовательность функций $f_n(\mu)$, моногенных на множестве N_K^R, сходится на нем равномерно к $f(\mu)$, а производные сходятся равномерно к $g(\mu)$. Тогда $f(\mu)$ моногенна на N_K^R и $f'(\mu) = g(\mu)$.*

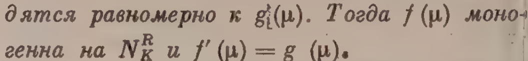


Рис. 6

Доказательство. 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Мы должны найти $\delta > 0$ такое, чтобы

$$\left| \frac{f(\mu_1) - f(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} - g(\mu_3) \right| < \varepsilon,$$

когда $|\mu_1 - \mu_3| < \delta$, $|\mu_2 - \mu_3| < \delta$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in N_K^R$.

Если $\delta > 0$ достаточно мало, то все эти точки лежат в одной компоненте N_K^R.

Покажем, что в таком случае точки μ_1, μ_2 можно соединить в N_K^R спрямляемой кривой Γ так, чтобы выполнялись условия:

1) для любой точки $\mu \in \Gamma$ $|\mu - \mu_3| < 2\delta$;

2) длина Γ меньше $2|\mu_1 - \mu_2|$.

Действительно, соединим точки μ_1 и μ_2 отрезком $\mu_1\mu_2$ (см. рис. 6). Этот отрезок может пересекаться с некоторыми кругами C_i, выкидыванием которых из прямоугольника $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant R$, $\operatorname{Re}\mu \in [0,1]$ образовано множество N_K^R. Эти круги попарно не пересекаются и не отделяют μ_1 от μ_2 в N_K^R, так как точки μ_1 и μ_2 лежат в одной компоненте. Круги C_i высекают на $\mu_1\mu_2$ непересекающиеся интервалы Δ_i. Заменим каждый такой интервал Δ_i меньшей из двух дуг, на которые $\mu_1\mu_2$ делит окружность C_i,— дугой γ_i. Длина Δ_i увеличится при такой замене не более чем в $\frac{\pi}{2}$ раз, поэтому длина Γ будет меньше $2|\mu_1 - \mu_2|$. Расстояние $|\mu_1 - \mu_2|$, по условию, не превосходит 2δ, поэтому все точки γ_i меньше чем на δ удалены от середины Δ_i. Последняя точка, как и все точки отрезка $\mu_1\mu_2$, лежит в круге $|\mu - \mu_3| < \delta$, поэтому для любой точки $\mu \in \gamma_i$

$$|\mu - \mu_3| < 2\delta.$$

Таким образом, кривая Γ — искомая.

2. Мы уже отмечали, что если $\varphi(\mu)$ моногенна в N_K^R и Γ — спрямляемая кривая с концами μ_1 и μ_2, то

$$\int_\Gamma \varphi'(\mu)\, d\mu = \varphi(\mu_2) - \varphi(\mu_1).$$

(Для доказательства достаточно сравнить интеграл с интегральной суммой.)

Применяя это равенство к построенной выше кривой Г и моногенным, по условию, функциям $f_n(\mu)$, получаем:

$$\int_\Gamma f_n'(\mu)\,d\mu = f_n(\mu_2) - f_n(\mu_1).$$

Ввиду равномерной сходимости f_n к f и f_n' к g, слева и справа можно перейти к пределу:

$$\int_\Gamma g(\mu)\,d\mu = f(\mu_2) - f(\mu_1).$$

3. Оценим

$$\left| \frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} - g(\mu_3) \right|.$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_\Gamma (g(\mu) - g(\mu_3))\,d\mu = f(\mu_2) - f(\mu_1) - (\mu_2 - \mu_1)\,g(\mu_3).$$

Мы имеем:

$$\left|\int_\Gamma (g(\mu) - g(\mu_3))\,d\mu\right| \leqslant \int_\Gamma |g(\mu) - g(\mu_3)|\,|d\mu| \leqslant \max_{\mu\in\Gamma} |g(\mu) - g(\mu_3)| \cdot 2\,|\mu_2 - \mu_1|,$$

так как длина Г меньше $2|\mu_2 - \mu_1|$.

Итак,

$$\left| \frac{f(\mu_2) - f(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} - g(\mu_3) \right| \leqslant 2 \max_{\mu\in\Gamma} |g(\mu) - g(\mu_3)|.$$

Правая часть последнего неравенства, согласно свойству 1) кривой Г, есть (удвоенное) приращение $g(\mu)$ на отрезке длиной меньше 2δ и, ввиду равномерной непрерывности непрерывной на компакте N_K^R функции $g(\mu)$, стремится к нулю вместе с δ. Лемма 8 доказана.

7.4. Функции нескольких переменных и действия с ними. В дальнейшем нам понадобятся функции, аналитические по одним переменным и моногенные по другим.

Пусть переменная z — угловая (меняется в полосе $\operatorname{Im} z \in (ab)$ *) и имеет период 2π **, переменные ε и Δ меняются в окрестности нуля, а $\mu \in N_K^R$.

Определение. Функция $f(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *аналитична по* z, ε, Δ *и моногенна по* $\mu \in N_K^R$, если ряд

$$f(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = \sum f_{kmn}(\mu)\, e^{ikz} \varepsilon^m \Delta^n,$$

в котором коэффициенты суть моногенные функции $\mu \in N_K^R$, сходится вместе с производной по μ равномерно при $\mu \in N_K^R$ *и* z, ε, Δ, меняющихся в указанных областях.

Очевидно, такая функция непрерывна, причем

a) при фиксированном μ она аналитична по z, ε, Δ и

b) при фиксированных z, ε, Δ она моногенна по $\mu \in N_K^R$. Свойство b) вытекает из леммы 8.

---

* Границы могут зависеть от μ.

** Т. е. при увеличении z на 2π функции z получают приращение 0 или 2π.

ЛЕММА 9. *Пусть функции* $h_i(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *моногенны по* $\mu \in E$ *и аналитичны по* z, ε, Δ. *Тогда тем же свойством обладают в соответствующих областях:*

1) *функции*

$$h_1(z, \varepsilon, \Delta, \mu) + h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \quad h_1(z, \varepsilon, \Delta, \mu)\, h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu),$$
$$h_1(h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \varepsilon, \Delta, \mu), \quad h_1(z, \varepsilon, h_2(z, \varepsilon, \Delta, \mu), \mu);$$

2) *решение* $\varphi(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *уравнения* $h(\varphi, \varepsilon, \Delta, \mu) = z$;

3) *решение* $\gamma(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$ *уравнения* $h(z, \varepsilon, \gamma, \mu) = \Delta$;

4) *частные производные* h *по* z, ε, Δ;

5) *интеграл по параметру* $\int\limits_0^{2\pi} h(z, \varepsilon, \Delta, \mu)\, dz$,

причем во всех этих случаях применимы обычные правила дифференцирования, например в случае 2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = -\frac{\dfrac{\partial h}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}}.$$

Доказательство повторяет хорошо известные из обычного анализа рассуждения и опускается.

ЛЕММА 10. *Пусть функция* $f(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = \tilde{f}$ *аналитична по* z *в области* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$; ε, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$; $|\Delta| \leqslant \Delta_0$ *и моногенна по* $\mu \in N_K^R$, *и пусть в указанной области*

$$|f| \leqslant C, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \mu}\right| \leqslant L.$$

Тогда решение уравнения

$$g(z + 2\pi\mu, \varepsilon, \Delta, \mu) - g(z, \varepsilon, \Delta, \mu) = f(z, \varepsilon, \Delta, \mu)$$

моногенно по $\mu \in N_K^R$ *и аналитично по* z *в области* $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R - 2\delta$, ε, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, Δ, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$, *причем в этой области*

$$|g| \leqslant \frac{4C}{K\delta^3}, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \leqslant \frac{8C}{K\delta^4}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| \leqslant \frac{10C}{K\delta^5},$$
$$\left|\frac{\partial g}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C+L}{K^2}\frac{10^3}{\delta^6}, \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \mu}\right| \leqslant \frac{C+L}{K^2}\frac{10^3}{\delta^7}.$$

Доказательство. Решение дается при фиксированном μ рядом (2) § 2

$$\sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\mu, \varepsilon, \Delta)}{e^{2\pi i n\mu} - 1} e^{inz},$$

равномерную сходимость которого при $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R - 2\delta$ требуется установить, ибо

$$f_n(\mu, \varepsilon, \Delta) = \sum f_{nkl}(\mu)\, \varepsilon^k \Delta^l.$$

Но равномерная сходимость этого ряда установлена в § 2 вместе с искомыми оценками g и $\frac{\partial g}{\partial z}$ при доказательстве теоремы 1′, ибо

$$N_K^{\frac{1}{2\pi}} \subseteq M_{\underline{K}}^{\frac{1}{2\pi}}.$$

Оценки остальных производных получаются путем дифференцирования ряда по обычным формулам с учетом неравенства (13) § 2.

§ 8. О зависимости построений теоремы 2 от μ

8.1. Мы видели в п. 7.4, что решение линейного уравнения (1) § 2 зависит от μ моногенно. В настоящем параграфе доказывается моногенность по μ функций Δ_n, F_n, Φ_n, g_n, $\Delta^{(n)}$, построенных в § 6.

Оказывается, область моногенности по мере увеличения n сужается (на $|\operatorname{Im} 2\pi\mu|$ за каждый шаг), и автору не удалось установить, моногенно ли зависит от μ решение уравнения (1) § 4.

Моногенность $\Delta^{(n)}$ по μ при действительных μ используется в § 11. Там мы будем опираться также на (равномерную по n) малость $\frac{\partial\Delta^{(n)}}{\partial\mu}$ при малых ε.

Для сокращения громоздких выражений в этом параграфе аргумент ε у всех функций опускается, подобно тому как раньше игнорировалась зависимость от μ и аргументами считались только z, φ, ε, Δ.

Построение $\Delta^{(n)}(\mu)$ в § 6 проводилось следующим образом.

Шаг за шагом строились такие новые параметры $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_{n-1}, \mu)$ и такие $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu)$, что преобразование

$$\varphi_{n-1} \to \varphi_{n-1} + 2\pi\mu + \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu) + F_{n-1}(\varphi_{n-1}, \mu) + \Phi_{n-1}(\varphi_{n-1}, \Delta_{n-1}(\Delta_n, \mu)\,\mu)$$

превращалось в преобразование

$$\varphi_n \to \varphi_n + 2\pi\mu + \Delta_n + F_n(\varphi_n, \mu) + \Phi_n(\varphi_n, \Delta_n, \mu)$$

со значительно меньшими F и Φ, причем $\varphi_0 = z$, $F_0 = F$, $\Phi_0 = 0$, $\Delta_0 = \Delta$.

Далее, строились такие $\Delta^{(n)}(\mu)$, что преобразование

$$z \to z + 2\pi\mu + \Delta^{(n)}(\mu) + F(z)$$

превращалось в переменной φ_n в преобразование

$$\varphi_n \to \varphi_n + 2\pi\mu + F_n(\varphi_n, \mu) + \Phi_n(\varphi_n, 0, \mu),$$

для чего мы полагали

$$\begin{aligned} &\Delta_k^{(n)}(\mu) = \Delta_k(\Delta_{k+1}^{(n)}(\mu), \mu) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &\Delta_n^{(n)}(\mu) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом мы получили:

$$\Delta_0^{(n)}(\mu) = \Delta^{(n)}(\mu).$$

ТЕОРЕМА 3. *В условиях теоремы 2 при достаточно малом* $\varepsilon > 0$, $0 < K < \frac{1}{9}$

$$\Delta(\mu) = \lim_{n\to\infty} \Delta^{(n)}(\mu),$$

где функции $\Delta^{(n)}(\mu)$ *моногенны по* $\mu \in N_K^{r_n}$ $(r_n > 0)$ *и при этих условиях* $\left|\frac{\partial\Delta^{(n)}}{\partial\mu}\right| < 6L|\varepsilon|$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, повторяющую основную лемму [см. §§ 4 и 5].

ЛЕММА 11. *Пусть даны аналитически зависящее от Δ и моногенное от $\mu \in N_K^r$ семейство аналитических отображений окружности*

$$z \to A_0(z, \Delta, \mu) = z + 2\pi\mu + F(z, \mu) + \Delta + \Phi(z, \Delta, \mu)$$

и числа $R_0 > 0$, $\frac{1}{9} > K > 0$, $\delta > 0$, $C > 0$, $0 < \Delta_0 < 1$, $0 < r < \frac{1}{2\pi}$, $2\pi r \leqslant R_0 - 5\delta$ *такие, что*

1) $F(z + 2\pi, \mu) = F(z, \mu)$, $\Phi(z + 2\pi, \Delta, \mu) = \Phi(z, \Delta, \mu)$;

2) *при* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \mu = \operatorname{Im} \Delta = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} \Phi = 0$;

3) *при* $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$|F(z, \mu)| \leqslant C, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial F(z, \mu)}{\partial \mu}\right| \leqslant C, \tag{3}$$

$$|\Phi(z, \mu, \Delta)| \leqslant \delta^2 |\Delta|, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial \Phi(z, \mu, \Delta)}{\partial \mu}\right| \leqslant \delta^2 |\Delta|; \tag{5}$$

4) *число* δ *удовлетворяет неравенству*

$$\delta < \frac{K^2}{5 \cdot 10^4}; \tag{6}$$

5) $C = \delta^{27}$, $\Delta_0 = \delta^{26}$.

Тогда существуют функции $z(\varphi, \mu)$, $\Delta(\Delta_1, \mu)$, *аналитические по* φ, Δ_1 *и моногенные по* $\mu \in N_K^r$, *такие, что*

1. *Тождественно*

$$z(A_1(\varphi, \mu, \Delta_1), \mu) = A_0(z(\varphi, \mu), \Delta(\Delta_1, \mu), \mu),$$

где

$$A_1(\varphi, \mu, \Delta_1) \equiv \varphi + 2\pi\mu + \Delta_1 + F_1(\varphi, \mu) + \Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1).$$

2. $F_1(\varphi + 2\pi, \mu) = F_1(\varphi, \mu)$, $\Phi_1(\varphi + 2\pi, \mu, \Delta_1) = \Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)$.

$$z(\varphi + 2\pi, \mu) = z(\varphi, \mu) + 2\pi.$$

3. *При* $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Im} \Delta_1 = \operatorname{Im} \mu = 0$ *всегда* $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \Delta = \operatorname{Im} F_1 = \operatorname{Im} \Phi_1 = 0$.

4. *При* $|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}$, $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - 7\delta - |\operatorname{Im} 2\pi\mu|$, $\mu \in N_K^r$ *построенные функции аналитичны по* φ, Δ_1, *моногенны по* $\mu \in N_K^r$ *и имеют место соотношения:*

$$|F_1| \leqslant \frac{C^2}{\delta^6}, \tag{7}$$

$$|\Phi_1| \leqslant \frac{C}{\delta^6} |\Delta_1|, \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C^2}{\delta^{18}}, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C}{\delta^{18}} |\Delta_1|, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C}{\delta^7}, \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}\right| \leqslant 4C, \tag{12}$$

$$|\Delta(\Delta_1, \mu)| \leqslant \Delta_0, \tag{13}$$

$$|z(\varphi, \mu) - \varphi| \leqslant \frac{C}{\delta^4}, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \Delta_1}\right| \leqslant 2, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right| \leqslant 2. \tag{16}$$

8.2. Доказательство леммы 11 более громоздко, чем доказательство сновной леммы. Построение повторяет рассуждения п. 5.1 с той разницей, то μ из фиксированного действительного числа превращено в незави-имое комплексное переменное. При построении $\Delta(\Delta_1)$, $z(\varphi)$, g, F_1 и Φ_1, огласно п. 5.1, используются интегрирование по z, решение уравнения 1) § 2, построение обратной функции и подстановка функции в функцию. Согласно леммам п. 7.4 все эти операции не выводят из класса функций, юногенных по $\mu \in N_K^r$ и аналитических по z, Δ, φ, Δ_1 в соответствующих бластях.

Поэтому особого рассмотрения требуют только неравенства (9), (10), 11), (12), которых нет в основной лемме. Их доказательство базируется а следующих оценках.

1°. Оценка $\frac{\partial g^*}{\partial \mu}$. На основании пп. 5.1, 7.4 и в силу условия леммы, ри $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \mu}\right| \leqslant 2C, \quad \left|\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \mu}\right| \leqslant 2\delta^2 |\Delta_0| \leqslant 2C.$$

Таким образом, правая часть уравнения (2) § 5 имеет производную ю μ, не превосходящую $4C$. Применяя лемму 10, находим:

$$|g^*| \leqslant \frac{16C}{K\delta^3}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial z}\right| \leqslant \frac{32C}{K\delta^4}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial z^2}\right| \leqslant \frac{40C}{K\delta^5}, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{5\cdot 10^3 C}{K^2\delta^6}, \tag{20}$$

$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial z \partial \mu}\right| \leqslant \frac{5\cdot 10^3 C}{K^2\delta^7} \tag{21}$$

при $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R - 2\delta$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta| \leqslant \Delta_0$.

2°. Оценка $\frac{\partial \Delta_0^*}{\partial \mu}$. Из уравнения (4) § 5 и п. 7.4 следует, что

$$\frac{\partial \Delta_0^*(\mu)}{\partial \mu} = -\frac{\frac{\partial \overline{F}}{\partial \mu} + \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \mu}}{1 + \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \Delta}}.$$

Оценивая Δ_0^* как в 1° п. 5.2, находим:

$$|\Delta_0^*| < 2C < \frac{\Delta_0}{2}.$$

При $|\Delta| \leqslant \frac{\Delta_0}{2}$ с помощью интеграла Коши получаем из (4):

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta}\right| \leqslant \frac{\delta^2 \Delta_0}{\frac{\Delta_0}{2}} = 2\delta < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \Delta}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \Delta}\right| < 1.$$

Следовательно, $\left|1+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\Delta}\right|>\frac{1}{2}$ при $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$. Поэтому, на основании (3), (5) и леммы 9,

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right|<2(C+\delta^2\Delta_0).$$

Ввиду (6), $\delta^2\Delta_0<C$, так что

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right|<4C \tag{22}$$

при $\mu\in N_N^r$.

3°. Оценка $\frac{\partial g}{\partial\mu}$. Согласно пп. 7.4 и 5.1,

$$\frac{\partial g}{\partial\mu}=\frac{\partial g^*}{\partial\mu}+\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial\mu}=\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\mu}+\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}. \tag{24}$$

Оценим сперва $\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}$ и $\frac{\partial^2 g^*}{\partial z\partial\Delta}$. Заметим, что уравнение

$$g^*(z+2\pi\mu,\ \Delta,\ \mu)-g^*(z,\ \Delta,\ \mu)=-\widetilde{F}\ (z,\ \mu)-\widetilde{\Phi}(z,\ \Delta,\ \mu)$$

при дифференцировании по Δ дает уравнение

$$\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}(z+2\pi\mu,\ \Delta,\ \mu)-\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}(z,\ \Delta,\ \mu)=-\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}$$

того же вида относительно $\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}$, и мы можем воспользоваться леммой 10. С этой целью оценим $\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}$ с помощью интеграла Коши: при $|\operatorname{Im} z|\leqslant R$, $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$

$$\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right|\leqslant\frac{2\delta^2\Delta_0}{\frac{\Delta_0}{2}}<4\delta^2.$$

По лемме 10, при $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R_0-2\delta$, $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$, $\mu\in N_K^r$

$$\left|\frac{\partial g^*}{\partial\Delta}\right|<\frac{4}{K\delta^3}4\delta^2,$$
$$\left|\frac{\partial^2 g^*}{\partial\Delta\,\partial z}\right|<\frac{8}{K\delta^4}4\delta^2.$$

Подставляя эти оценки, оценки (20), (21) и оценку Δ_0^* из п. 2° в формулы (23), (24), находим:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial\mu}\right|<\frac{5C}{K^2}\frac{10^3}{\delta^6}+\frac{16}{K\delta}4C<\frac{C10^4}{K^2\delta^6},$$
$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial\mu}\right|<\frac{5\cdot10^3C}{K^3\delta^7}+\frac{32}{K\delta^2}4C<\frac{C10^4}{K^2\delta^7}$$

при $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R-2\delta$, $\mu\in N_K^r$.

4°. Оценка $\frac{\partial\Delta(\Delta_1,\ \mu)}{\partial\mu}$. Аналогично п. 2°, имеем:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}=-\frac{\frac{\partial\overline{F}}{\partial\mu}+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\mu}}{1+\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial\Delta}},$$

если $|\Delta| \leqslant \frac{\Delta_0}{2}$, то, как в п. 2°, получаем:

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial\mu}\right| < 4C.$$

ля того чтобы выполнялось неравенство $|\Delta| < \frac{\Delta_0}{2}$, достаточно, чтобы $\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$. Действительно, тогда (как это показано в § 5) $|\Delta_0^*| \leqslant 2C$, $\Delta - \Delta_0^*| \leqslant 2|\Delta_1|$, и так как $C = \delta^{27}$, то при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$ имеем:

$$|\Delta(\Delta_1, \mu)| \leqslant 4\delta^{27} < \frac{\delta^{26}}{2} = \frac{\Delta_0}{2}.$$

так, при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$, $\mu \in N_K^r$,

$$\left|\frac{\partial\Delta(\Delta_1, \mu)}{\partial\mu}\right| < 4C. \tag{25}$$

Одновременно мы показали, что при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$ справедливы оцен-
й п. 1°.

5°. Оценка $\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial\mu}$. Из пп. 5.1 и 7.4 имеем:

$$\frac{\partial\hat{F}_1(z, \mu)}{\partial\mu} = \left[\frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial\mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}}, \mu)}{\partial\mu}\right] + \left[\frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial z} - \frac{\partial g(z_{\text{II}}, \mu)}{\partial z}\right] 2\pi + $$
$$+ \frac{\partial g(z_{\text{I}}, \mu)}{\partial z}\left[\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mu} + \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\mu} + \frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right], \tag{26}$$

е

$$z_{\text{I}} = z + 2\pi\mu + \widetilde{F}(z, \mu) + \widetilde{\Phi}(z, \mu, \Delta_0^*(\mu)), \tag{27}$$
$$z_{\text{II}} = z + 2\pi\mu. \tag{28}$$

ервые две скобки в правой части (26) оцениваются при помощи лем-
ы о конечном приращении (лемма 5 § 3). Мы имеем:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial\mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial\mu}\right| \leqslant |z_{\text{I}} - z_{\text{II}}| \left|\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\,\partial z}\right|;$$

одставляя вместо $z_{\text{I}} - z_{\text{II}}$ и $\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\,\partial z}$ их оценки, получаем:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial\mu} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial\mu}\right| \leqslant \frac{4\cdot 10^4 C^2}{K^2\delta^7}$$

аналогично,

$$\left|\frac{\partial g(z_{\text{I}})}{\partial z} - \frac{\partial g(z_{\text{II}})}{\partial z}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right| |z_{\text{I}} - z_{\text{II}}| \leqslant \frac{40\,C_4}{K\delta^5} 4C = \frac{160\,C^2}{K\delta^5}.$$

оследнее слагаемое в правой части (26) оценивается с помощью не-
венств (3), (5), (22), (18) и не превосходит

$$\frac{32\,C}{K\delta^4}(4\,C + 2\,C) < \frac{200\,C^2}{K\delta^4}.$$

Итак,

$$\left|\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial\mu}\right| < C^2\left[\frac{4\cdot 10^4}{K^2\delta^7} + 2\pi\frac{160}{K\delta^5} + \frac{200}{K\delta^4}\right] < \frac{5\cdot 10^4}{K^2\delta^7} C^2.$$

Все эти оценки справедливы, если аргументы z_{I} и z_{II} не выходят
области $|\text{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 2\delta$, где действуют оценки g и ее про-

изводных. Для этого достаточно, например, чтобы $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 3\delta$. Действительно, тогда

$$|\widetilde{F}(z, \mu) + \widetilde{\Phi}(z, \mu, \Delta_0^*(\mu))| \leqslant 2C < \delta,$$

т. е.

$$|\operatorname{Im}(z_1 - 2\pi\mu)| < R_0 - 2\delta.$$

Таким образом, при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 3\delta$, $\mu \in N_K^r$, $|\Delta_1| < \delta^{27}$

$$\left|\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \mu}\right| < \frac{5 \cdot 10^4}{K^2 \delta^7} C^2. \qquad (29)$$

6°. Оценка $\frac{\partial}{\partial \mu}(\Delta - \Delta_0^*)$. Мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\Delta(\Delta_1, \mu) - \Delta_0^*(\mu)) = \frac{\partial \Delta(\Delta_1, \mu)}{\partial \mu} - \frac{\partial \Delta(0, \mu)}{\partial \mu};$$

по лемме о конечном приращении,

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mu}(\Delta - \Delta_0^*)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 \Delta(\Delta_1, \mu)}{\partial \Delta_1 \partial \mu}\right| |\Delta - \Delta_0^*|.$$

Оценим $\left|\frac{\partial^2 \Delta(\Delta_1, \mu)}{\partial \Delta_1 \partial \mu}\right|$ с помощью интеграла Коши как производную от $\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}$. При $|\Delta_1| \leqslant \delta^{27}$, как это следует из (25), $\left|\frac{\partial \Delta}{\partial \mu}\right| < 4C$. Поэтому в круге $|\Delta_1| \leqslant \frac{\delta^{27}}{2}$ всегда

$$\left|\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \Delta_1 \partial \mu}\right| < \frac{4C}{\frac{\delta^{27}}{2}} = 8.$$

В частности, $\left|\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \Delta_1 \partial \mu}\right| < 8$, когда $|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}$. Так как

$$|\Delta - \Delta_0^*| \leqslant 2|\Delta_1|,$$

то при $|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}$, $\mu \in N_K^r$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mu}(\Delta(\Delta_1, \mu) - \Delta_0^*(\mu))\right| < 16|\Delta_1|. \qquad (30)$$

7°. Оценка $\frac{\partial}{\partial \mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta(\Delta_1, \mu)) - \widetilde{\Phi}(\Delta_0^*(\mu))]$. Эта производная равна

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial \mu} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial \mu} + \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta(\Delta_1)}{\partial \mu} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta_0^*}{\partial \mu}.$$

Первую разность оценим по лемме о конечном приращении: при $|\Delta| \leqslant \frac{\Delta_0}{2}$, $\mu \in N_K^r$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant R$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial \mu} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}(\Delta^*)}{\partial \mu}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial \mu \partial \Delta}\right| |\Delta - \Delta_0^*| \leqslant 8\delta^2 |\Delta_1|$$

(здесь $\left|\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial \mu \partial \Delta}\right|$ мы оценили с помощью интеграла Коши: $\left|\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial \mu \partial \Delta}\right| < \frac{2\delta^2 |\Delta_0|}{\frac{|\Delta_0|}{2}} \leqslant 4\delta^2$).

Вторая разность может быть записана в виде

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\Delta}\left(\frac{\partial\Delta(\Delta_1)}{\partial\mu}-\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta)}{\partial\Delta}-\frac{\partial\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)}{\partial\Delta}\right), \tag{31}$$

где первое слагаемое оценивается при помощи неравенства (30) и не превосходит $16\,|\Delta_1|$, ибо $\left|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta}\right|<1$ (см. п. 2°), а второе слагаемое, по лемме о конечном приращении, не превосходит

$$\left|\frac{\partial\Delta^*}{\partial\mu}\right|\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}\right|\,|\Delta(\Delta_1)-\Delta_0^*|\leqslant 4\,C\,\frac{16}{\delta^{24}}\,2\,|\Delta_1|.$$

Здесь новой является только оценка $\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}$. Для ее нахождения мы воспользовались выражением для второй производной, получаемым из интеграла Коши:

$$\left|\frac{\partial^2\widetilde{\Phi}}{\partial\Delta^2}\right|\leqslant 2\,\frac{2\delta^2\Delta_0}{\left(\frac{\Delta_0}{2}\right)^2}=\frac{16}{\delta^{24}}$$

при $|\Delta|\leqslant\frac{\Delta_0}{2}$, для чего, как мы видели в п. 4°, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|\Delta_1|\leqslant\delta^{27}$. Сопоставляя все три полученные оценки, находим:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta)-\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*)]\right|<8\delta_3^2|\Delta_1|+16\,|\Delta_1|+128\,\delta^3\,|\Delta_1|.$$

Окончательно имеем:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}[\widetilde{\Phi}(\Delta(\Delta_1,\mu))-\widetilde{\Phi}(\Delta_0^*(\mu))]\right|<100\,|\Delta_1| \tag{32}$$

при $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $|\operatorname{Im} z|\leqslant R_0$, $\mu\in N_K^r$.

8°. Оценка $\frac{\partial}{\partial\mu}\hat{\Phi}_1(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))$. Нам будет удобнее рассмотреть сразу функцию от z, μ и Δ_1, а не от z, μ, Δ. Мы имеем:

$$\frac{\partial\hat{\Phi}_1}{\partial\mu}=\left[\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial\mu}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial\mu}\right]+\left[\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial z}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial z}\right]\frac{\partial z_{\mathrm{I}}}{\partial\mu}+\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial z}\left[\frac{\partial z_{\mathrm{III}}}{\partial\mu}-\frac{\partial z_{\mathrm{I}}}{\partial\mu}\right], \tag{33}$$

где

$$z_{\mathrm{I}}=z+2\pi\mu+\overline{F}(z,\mu)+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta_0^*(\mu)), \tag{27}$$

$$z_{\mathrm{III}}=z+2\pi\mu+\Delta_1+\overline{F}(z,\mu)+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))+\Delta_1. \tag{34}$$

Первые две скобки в правой части (33) оценим как в п. 5°:

$$\left|\frac{\partial g(z_{\mathrm{III}})}{\partial\mu}-\frac{\partial g(z_{\mathrm{I}})}{\partial\mu}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2 g}{\partial\mu\,\partial z}\right|\,|z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}|\leqslant\frac{C\,10^4}{K^2\delta^7}\,3\,|\Delta_1|,$$

так как

$$z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}=\Delta_1+\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta)-\widetilde{\Phi}(z,\mu,\Delta^*(\mu))$$

и, в силу оценки (22) § 5,

$$|z_{\mathrm{III}}-z_{\mathrm{I}}|\leqslant 3\,|\Delta_1|.$$

Аналогично,

$$\left|\left(\frac{\partial g(z_{\rm III})}{\partial z}-\frac{\partial g(z_{\rm I})}{\partial z}\right)\frac{\partial z_{\rm I}}{\partial \mu}\right|\leqslant\left|\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right|\,|z_{\rm III}-z_{\rm I}|\left|\frac{\partial z_{\rm I}}{\partial \mu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{40\,C}{K\delta^5}3\,|\Delta_1|\left|2\pi+\frac{\partial\widetilde F}{\partial\mu}+\frac{\partial\widetilde\Phi}{\partial\mu}+\frac{\partial\widetilde\Phi}{\partial\Delta}\frac{\partial\Delta_0^*}{\partial\mu}\right|\leqslant\frac{40\,C}{K\delta^5}3\,|\Delta_1|\,(2\pi+6\,C)\leqslant\frac{1600\,C}{K\delta^5}|\Delta_1|,$$

где множитель $\left|\frac{\partial z_{\rm I}}{\partial\mu}\right|$ оценен с помощью условия 3) леммы 11 и оценки (22) с учетом того, что $C<1$. Нам остается оценить $\frac{\partial}{\partial\mu}(z_{\rm III}-z_{\rm I})$. Мы имеем:

$$z_{\rm III}-z_{\rm I}=\Delta_1+\widetilde\Phi(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))-\widetilde\Phi(z,\mu,\Delta_0^*(\mu)).$$

В силу оценки (32), находим:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(z_{\rm III}-z_{\rm I})\leqslant 100\,|\Delta_1|,$$

где $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $\mu\in N_K^r$.

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial g(z_{\rm III})}{\partial z}\left(\frac{\partial z_{\rm III}}{\partial\mu}-\frac{\partial z_{\rm I}}{\partial\mu}\right)\right|\leqslant 100\,|\Delta_1|\frac{32\,C}{K\delta^4}\leqslant\frac{10^4C}{K\delta^4}|\Delta_1|.$$

Сопоставляя оценки всех трех слагаемых правой части равенства (33), находим:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\mu}\hat\Phi_1(z,\mu,\Delta(\Delta_1,\mu))\right|\leqslant\frac{C\,10^4}{K^2\delta^7}3\,|\Delta_1|+\frac{1600\,C}{K\delta^5}|\Delta_1|+\frac{C\,10^4}{K\delta^4}|\Delta_1|\leqslant\frac{C\,10^5}{K^2\delta^7}|\Delta_1|.$$

Все эти оценки выведены в предположении, что $|\Delta_1|\leqslant\delta^{28}$, $\mu\in N_K^r$ и $z_{\rm I}$, $z_{\rm III}$ не выходят из полосы $|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R_0-2\delta$, где действует лемма 10. Для этого достаточно, например, чтобы $|\operatorname{Im} z|\leqslant R_0-4\delta$, ибо тогда

$$|\Delta_1+\widetilde F(z,\varepsilon)+\widetilde\Phi(z,\varepsilon,\Delta)|\leqslant\delta+2C+2C<2\delta,$$
$$|\operatorname{Im}(z_{\rm III}-2\pi\mu)|\leqslant R_0-4\delta+2\delta=R_0-2\delta.$$

9°. Оценка $\frac{\partial z}{\partial\mu}$. Функция $g(z,\mu)$ определена при

$$|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R_0-2\delta.$$

Значит, в той же полосе определена и функция

$$\varphi(z,\mu)=z+g(z,\mu).$$

Так как в указанной полосе $|g(z,\mu)|<\delta$ [см. (6), (17)], то образ этой полосы при $z\to\varphi$ содержит полосу

$$|\operatorname{Im}(\varphi-2\pi\mu)|\leqslant R_0-3\delta,$$

которая при $\varphi\to z$ переходит в область, содержащую полосу

$$|\operatorname{Im}(z-2\pi\mu)|\leqslant R_0-4\delta.$$

Из пп. 5.1 и 7.4 следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial\mu}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial\mu}}{1+\frac{\partial g}{\partial z}}.$$

огласно неравенству (18) и условиям 4), 5) леммы 11, $\left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| < \frac{1}{2}$, так то, применяя оценку (23), мы получаем:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{10^4 C}{K^2 \delta^6}$$

ри $|\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 2\delta$, $\mu \in N_K^r$ и, в частности, при

$$|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

10°. Оценка $\frac{\partial}{\partial \mu} F_1(\varphi, \mu)$, $\frac{\partial}{\partial \mu} \Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)$. Согласно п. 5.1,

$$F_1(\varphi, \mu) = \hat{F}_1(z(\varphi, \mu), \mu),$$

$$\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1) = \hat{\Phi}_1(z(\varphi, \mu), \mu, \Delta(\Delta_1, \mu)).$$

Функция $z(\varphi, \mu)$ определена при $|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta$, $\mu \in N_K^r$, если

$$\operatorname{Im}(z - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 4\delta,$$

о для этого z найдется такое φ, что $z = z(\varphi, \mu)$, и

$$|\operatorname{Im}(\varphi - 2\pi\mu)| \leqslant R_0 - 3\delta.$$

Функции $\hat{F}_1(z)$, $\hat{\Phi}_1(z)$ определены при $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 4\delta$ и поэтому ункции $F_1(\varphi, \mu)$, $\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)$ определены при

$$|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| - 5\delta$$

предположении, что $|\operatorname{Im} 2\pi\mu| \leqslant R_0 - 5\delta$, т. е. что $2\pi r \leqslant R_0 - 5\delta$. В этой бласти

$$\frac{\partial F_1}{\partial \mu} = \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \mu} + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} = \frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial \mu} + \frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mu},$$

де при вычислении $\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial \mu}$ независимыми переменными считаются z, μ и $_1$, как в п. 8°.

Для оценок $\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}$ и $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z}$ воспользуемся интегралом Коши. Отступив а δ от края полосы, где известны оценки $\hat{F}_1$ и $\hat{\Phi}_1$, мы из оценок 3° 5° § 5 получим:

$$\left|\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial z}\right| \leqslant \frac{4C^2}{\delta^6}, \quad \left|\frac{\partial \hat{\Phi}_1}{\partial z}\right| \leqslant \frac{3C|\Delta_1|}{\delta^6}$$

ри $|\operatorname{Im} z| \leqslant R_0 - 5\delta$; применяя оценки 5°, 8° и 9°, находим из (35):

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{5 \cdot 10^4 C^2}{K^2 \delta^7} + \frac{10^4 C}{K^2 \delta^6}\frac{4C^2}{\delta^6},$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C \cdot 10^5 |\Delta_1|}{K^2 \delta^7} + \frac{3C|\Delta_1|}{\delta^6}\frac{10^4 C}{K^2 \delta^6}.$$

аким образом, при

$$|\Delta_1| \leqslant \delta^{28}, \quad \mu \in N_K^r, \quad 2\pi r \leqslant R_0 - 5\delta, \quad |\operatorname{Im} \varphi| \leqslant R_0 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| - 6\delta$$

меем:

$$|F_1(\varphi, \mu)| \leqslant \frac{C^2}{\delta^6}, \qquad |\Phi_1(\varphi, \mu, \Delta_1)| < \frac{|\Delta_1|}{\delta^6},$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C^2}{\delta^{13}}, \qquad \left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right| \leqslant \frac{C|\Delta_1}{\delta^{13}}$$

ибо

$$\frac{5\cdot 10^4}{K^2}\delta < 1. \qquad (6$$

Точно так же и все остальные оценки $1^\circ - 9^\circ$, в силу условий 4) и 5) леммы 11, можно привести к виду (7) — (16).

Лемма 11 доказана.

8.3. Доказательство теоремы 3. Теорема 3 выводится из леммы 11 так же, как теорема 2 выводилась из основной леммы в § 6.

Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R}{8}$, где $\delta_n = \delta_{n-1}^{1\frac{1}{2}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$,

2) $\delta_1 < \frac{K^2}{5\cdot 10^4}$.

Пусть $R = R_0$, K — то же, что в условии теоремы 2, $\mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+1)}}$, $\Delta_0 = \delta_1^{26}$, $L\varepsilon_0 < C_1$, где

$$C_1 = \delta_1^{27}, \qquad (35$$

и C_1, δ_1 — соответственно C, δ леммы 11. Тогда из неравенств (7) — (16) получаем:

$$|F_1| < \frac{\delta_1^{54}}{\delta_1^{13}} < \delta_1^{40,5} = (\delta_1^{1\frac{1}{2}})^{27} = \delta_2^{27},$$

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\right| < \delta_2^{27},$$

$$|\Phi_1| \leqslant \frac{\delta_1^{27}}{\delta_1^{13}}|\Delta_1| < \delta_1^{14}|\Delta_1| = \delta_2^{2}|\Delta_1|,$$

$$\left|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right| < \delta_2^{2}|\Delta_1|$$

при

$$|\Delta_1| < \delta_2^{26} = \delta_1^{39} < \delta_1^{28}, \qquad |\operatorname{Im} \varphi_1| \leqslant R_0 - 7\delta_1 - |\operatorname{Im} 2\pi\mu| = R_1, \quad \mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+1)}}.$$

Таким образом, мы снова находимся в условиях леммы 11, но с уменьшенным на $7\delta_1 + \frac{R}{8(n+1)}$ радиусом R_1. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \frac{R}{8},$$

то мы сможем произвести n последовательных приближений, и последнее будет действовать при

$$|\operatorname{Im} \varphi_n| \leqslant \frac{R}{8(n+1)}, \quad \mu \in N_K^{\frac{R}{16\pi(n+1)}}, \quad |\Delta_n| < \delta_{n+1}^{26}.$$

Опуская обычное (см. § 6) доказательство сходимости приближений при действительных μ, оценим $\left|\frac{\partial \Delta^{(n)}}{\partial \mu}\right|$.

Из п. 8.1 следует, что

$$\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}=\frac{\partial\Delta_k}{\partial\mu}+\frac{\partial\Delta_k}{\partial\Delta_{k+1}}\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}.$$

Полагая $C_k=\delta_k^{27}$, на основании леммы 11 находим:

$$\left|\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}\right|\leqslant 4C_{k+1}+2\left|\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}\right|.$$

Если

$$\left|\frac{\partial\Delta_{k+1}^{(n)}}{\partial\mu}\right|<C_{k+1},$$

то

$$\left|\frac{\partial\Delta_k^{(n)}}{\partial\mu}\right|<6C_{k+1}<C_k.$$

Так как

$$\left|\frac{\partial\Delta_n^{(n)}}{\partial\mu}\right|=0,$$

то

$$\left|\frac{\partial\Delta_0^{(n)}}{\partial\mu}\right|<6C_1.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Точно так же можно было бы доказать моногенность функций g_n, F_n, Φ_n, φ_n и получить аналогичные оценки.

ЧАСТЬ II

О ПРОСТРАНСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ НА СЕБЯ

Задача изучения зависимости числа вращения от коэффициентов уравнения была поставлена Пуанкаре [1]. Рассмотрение числа вращения как функции на пространстве отображений помогает уяснению вопроса о типичных и исключительных случаях.

Угловые координаты точки на окружности будем обозначать строчными греческими буквами; φ и $\varphi+2\pi$ есть одна и та же точка окружности. Преобразования будем обозначать прописными буквами:

$$T:\varphi\to T\varphi.$$

Мы будем рассматривать только непрерывные взаимно однозначные прямые (сохраняющие ориентацию) преобразования. Примером может служить поворот на угол $\theta:\varphi\to\varphi+\theta$. Каждому преобразованию сопоставляется «сдвиг» — функция на окружности, показывающая, насколько сдвигается каждая точка. Сдвиг будем обозначать той же буквой, что преобразование, но только строчной:

$$T:\varphi\to T_\varphi=\varphi+t(\varphi).$$

Здесь $t(\varphi)$ — сдвиг. Если T — поворот на угол θ, то $t(\varphi)\equiv\theta$. Вообще говоря, сдвиг, как и φ, определен лишь с точностью до кратного 2π, однако, определив $t(\varphi)$ в одной точке, мы можем однозначно продолжить его по непрерывности.

Если T — гладкое преобразование, то $t(\varphi)$ — гладкая периодическая функция:

$$t(\varphi + 2\pi) = t(\varphi).$$

Обозначим через

$$T^n\varphi = \varphi + t^{(n)}(\varphi)$$

n-ю степень преобразования T. При этой записи предполагается, что ветвь $t^{(n)}(\varphi)$ выбрана соответствующей ветви $t(\varphi)$:

$$t^{(n)}(\varphi) = t^{(n-1)}(\varphi) + t(T^{n-1}(\varphi)) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

При этом условии $t^{(n)}(\varphi)$ называется сдвигом за n шагов.

§ 9. Функция $\mu(T)$ и ее множества уровня

Рассмотрим пространства

$$C \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^n \supset \ldots \supset C^\infty \supset A$$

взаимно однозначных прямых отображений окружности на себя, непрерывных, непрерывно и бесконечно дифференцируемых и аналитических в окрестности действительной оси с обычной в этих пространствах топологией. Каждая следующая топология сильнее предыдущей и каждое из пространств всюду плотно в предыдущем *.

Пуанкаре ([1]) определил для каждого преобразования $T \in C$ число вращения $2\pi\mu$; таким образом, на пространстве C дана функция $\mu(T)$. Следующая теорема высказана Пуанкаре без доказательства.

ТЕОРЕМА 4. *Функция $\mu(T)$ непрерывна в каждой точке C.*

Доказательство. Покажем, что $\mu(T)$ непрерывна в точке T_0. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем целое $n > \frac{2}{\varepsilon}$ так, чтобы

$$\frac{m}{n} < \mu(T_0) < \frac{m+1}{n}.$$

Тогда при преобразовании

$$T_0^n : \varphi \to \varphi + t_0^{(n)}(\varphi)$$

каждая точка сдвигается больше чем на $2\pi m$. Действительно, если бы некоторые точки сдвигались меньше, а другие больше чем на $2\pi m$, то нашлась бы точка, сдвигающаяся ровно на $2\pi m$, т. е. точка, неподвижная для T_0^n; тогда, очевидно, вопреки выбору n, мы имели бы

$$\mu = \frac{m}{n}.$$

Если бы все точки сдвигались меньше чем на $2\pi m$, то мы получили бы $\mu \leqslant \frac{m}{n}$, что снова противоречит выбору n.

Аналогично доказывается, что каждая точка сдвигается за n шагов меньше чем на $2\pi(m+1)$. Итак,

$$2\pi m < t_0^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1).$$

* Если T входит в одно из пространств $C^1, C^2, \ldots, A$, причем не важно, в какое именно, то мы будем называть T *гладким* преобразованием.

Ввиду непрерывности $t_0^{(n)}(\varphi)$,

$$2\pi m + \eta < t_0^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1) - \eta$$

при некотором $\eta > 0$, а ввиду непрерывной зависимости T^n от T найдется такое $\delta > 0$, что

$$|t^{(n)}(\varphi) - t_0^{(n)}(\varphi)| < \eta,$$

коль скоро преобразование T отличается от T_0 меньше чем на δ:

$$|t(\varphi) - t_0(\varphi)| < \delta.$$

Для таких T

$$2\pi m < t^{(n)}(\varphi) < 2\pi(m+1)$$

и, значит,

$$\frac{m}{n} < \mu(T) < \frac{m+1}{n}.$$

Итак, $|\mu(T) - \mu(T_0)| < \varepsilon$ при $|t(\varphi) - t_0(\varphi)| < \delta$. Теорема доказана.

Замечание. Даже в самых хороших случаях функция $\mu(T)$ только непрерывна. Например, рассмотрим семейство преобразований

$$T_h : \varphi \to \varphi + h + 0{,}1 \sin^2 \varphi,$$

где h — параметр. По доказанному, $\mu(T_h)$ — непрерывная функция h. С ростом h функция $\mu(T_h)$ растет, но задерживается на каждом рациональном значении μ: ему отвечает целый отрезок $[h_1 h_2]$ значений h. Зато при $h > h_2$ функция $\mu(T_h)$ увеличивается очень быстро: Э. Г. Белага показал, что, например, в окрестности нуля $\mu(T_h)$ растет по крайней мере как $\frac{C\sqrt{h}}{-\log h}$.

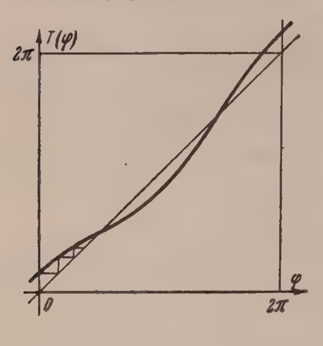
Множества уровня $\mu(T)$ суть множества преобразований с одним и тем же числом вращения $2\pi\mu$. К таким преобразованиям относятся поворот на угол $2\pi\mu$, преобразования, превращающиеся в поворот на угол $2\pi\mu$ при надлежащей замене переменной, и, быть может, другие преобразования.

Структура множества уровня $\mu(T) = \mu$ существенно зависит от того, рационально μ или иррационально.

§ 10. Случай рационального μ

10.1. Если $\mu(T) = \frac{m}{n}$, то, как показал Пуанкаре, T^n имеет неподвижные точки: $t^{(n)}(a) = 2\pi m$. Множество их инвариантно относительно T и замкнуто, как множество уровня непрерывной функции $t^{(n)}(a)$. Точки $a, Ta, \ldots, T^{n-1}a$ называются *циклом*. Для исследования цикла удобно рассмотреть график преобразования T^n и график функции $t^{(n)}(\varphi)$ (см. рис. 7; на этом рисунке изображен график $T(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi$ и

указаны образы 0 при нескольких итерациях T). Цикл называется *изолированным*, если в некоторой окрестности его точек нет точек других циклов. Изолированный цикл *устойчив*, если его точка (а значит и все его точки) имеет сколь угодно малые окрестности, переходящие при преобразовании T^n внутрь себя. Легко видеть, что при $n \to +\infty$ точки такой окрестности стремятся к точкам цикла, чем и объясняется название. Устойчивый цикл преобразования T^{-1} называется *неустойчивым* циклом T. Изолированный цикл *полуустойчив вперед* (*назад*), если все точки некоторой окрестности точки цикла (исключая ее самое) сдвигаются преобразованием T^n вперед (назад), т. е. если в этой окрестности



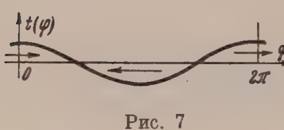


Рис. 7

$$t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m > 0 \quad (< 0).$$

Преобразование $T \in C^1$ *нормально*, если в точках его циклов

$$\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi} \neq 0.$$

Очевидно, нормальное преобразование имеет конечное число циклов, причем все его циклы устойчивы или неустойчивы. Именно, те корни $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$, где $\frac{dt^{(n)}}{d\varphi} < 0$, суть точки устойчивых циклов, а те, где $\frac{dt^{(n)}}{d\varphi} > 0$, — точки неустойчивых циклов. Отсюда вытекает, что точки устойчивых и неустойчивых циклов нормального преобразования перемежаются.

10.2. ТЕОРЕМА 5. *Нормальные преобразования образуют множество, открытое в C^1 и всюду плотное в A.*

Доказательство. 1. Точками цикла являются те точки, где $t^{(n)}(\varphi) = 2\pi m$. В них $\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi} \neq 0$. Поэтому при малом вместе с первой производной изменении $t^{(n)}(\varphi)$ функция $t^n(\varphi) - 2\pi m$ не приобретает новых корней и старые не исчезают, а сдвигаются непрерывно, причем производная в корне сохраняет знак. Это значит, что преобразование T с такой измененной функцией $t^{(n)}(\varphi)$ будет нормальным. Ввиду непрерывной зависимости $t^{(n)}(\varphi)$ от T, первое утверждение теоремы доказано.

2. Покажем, что в любой близости к любому преобразованию есть аналитическое преобразование с циклом. Очевидно, это достаточно доказать для аналитического преобразования и аналитической близости. Пусть T — аналитическое преобразование с иррациональным числом вращения, и пусть $\varepsilon > 0$. Среди точек $\varphi_n = T^n\varphi_0$ есть удаленная от φ_0 меньше чем на ε, например, назад:

$$2\pi m - \varepsilon < t^{(n)}(\varphi_0) < 2\pi m$$

(теорема Данжуа). Рассмотрим семейство аналитических преобразований

$T_\lambda\,(\lambda \geqslant 0,\ T_0 = T)$:

$$T_\lambda : \varphi \to \varphi + t(\varphi) + \lambda.$$

Как нетрудно видеть, при $\lambda = \varepsilon$ T_λ^n сдвигает φ_0 вперед:

$$t_\lambda^{(n)}(\varphi_0) \geqslant 2\pi m.$$

Отсюда, ввиду непрерывности $t_\lambda^{(n)}(\varphi_0)$ по λ, вытекает, что при некотором $\lambda_0 \leqslant \varepsilon$ T_{λ_0} имеет цикл $\varphi_0,\ T_{\lambda_0}\varphi_0,\ \ldots$:

$$t_{\lambda_0}^{(n)}(\varphi_0) = 2\pi m.$$

3. Аналитическое преобразование с циклом сколь угодно малым изменением можно превратить в нормальное. В самом деле, пусть T — аналитическое преобразование, и среди его циклов нет устойчивых (стало быть, нет и неустойчивых). Выберем цикл $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ и введем аналитическую функцию $\Delta(\varphi)$, обращающуюся в этих точках в 0 и имеющую в них отрицательную производную. Преобразование

$$T_\theta : t_\theta(\varphi) = t(\varphi) + \theta\Delta(\varphi)$$

при малом θ сколь угодно близко к T и имеет по крайней мере один устойчивый цикл $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда исходное преобразование T имеет устойчивый цикл. Построим по T аналитическую функцию $\delta(\varphi)$, которая

1) равна нулю и имеет отрицательную (положительную) производную в точках устойчивых (неустойчивых) циклов T;

2) положительна (отрицательна) в точках циклов T, полуустойчивых вперед (назад).

Существование такой функции очевидно, так как число всех циклов T конечно, ибо аналитическая функция $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ имеет изолированный корень и потому не есть тождественный нуль.

Рассмотрим преобразование $T_\theta : \varphi \to \varphi + t(\varphi) + \theta\delta(\varphi)$. При малом θ это преобразование нормально; формальное доказательство того, что устойчивые циклы T при малых θ лишь несколько сдвигаются, причем корни $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ делаются однократными, а полуустойчивые циклы исчезают, предоставляется читателю. При достаточно малом θ преобразование T_θ — искомое.

Теорема 5 доказана.

10.3. Строение нормального преобразования легко усмотреть из графика функции $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$. Ее корни — точки циклов преобразования — делят окружность на дуги. Каждая такая дуга $\alpha\beta$ ограничена с одной стороны точкой α устойчивого, а с другой стороны — точкой β неустойчивого цикла. При $n \to +\infty$ точки дуги наматываются на устойчивый цикл, а при $n \to -\infty$ — на неустойчивый цикл, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} T^{kn}(\gamma) = \alpha \pmod{2\pi}, \qquad \lim_{k\to-\infty} T^{kn}(\gamma) = \beta \pmod{2\pi},$$

где $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Утверждения такого типа хорошо известны в качественной теории дифференциальных уравнений, и мы опускаем их доказательства.

Таким образом, топологически нормальное преобразование характеризуется тремя целыми числами: m, n, k, где $\frac{m}{n}$ — число вращения, а k — число устойчивых (а значит, и неустойчивых) циклов. Два преобразования с одинаковыми m, n, k устроены одинаково в том смысле, что одно из них может быть превращено в другое непрерывной заменой переменной на окружности (т. е. $T_2 = \Phi T_1 \Phi^{-1}$, где $\Phi \in C$). Инвариантом гладкой замены переменной является также производная $\frac{dt^{(n)}(\varphi)}{d\varphi}$ в точках цикла, характеризующая скорость наматывания на цикл. Вероятно, других инвариантов не существует, но я не сумел этого доказать.

ТЕОРЕМА 6. *Множество $E_{\frac{m}{n}}$ уровня $\mu = \frac{m}{n}$ в любом из пространств $C^1, \ldots, A$ связно и состоит из*

1) плотного в $E_{\frac{m}{n}}$ и открытого в $C^p(A)$ ядра $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E^k_{\frac{m}{n}}$ нормальных преобразований. Ядро состоит из связных компонент $E^k_{\frac{m}{n}}$ преобразований с k устойчивыми и k неустойчивыми циклами. Два преобразования одной компоненты $E^k_{\frac{m}{n}}$ могут быть превращены одно в другое непрерывной заменой переменной;

2) границ $E_{\frac{m}{n}}$ и $E^k_{\frac{m}{n}}$. Граница $E_{\frac{m}{n}}$ состоит из преобразований T, у которых $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ не меняет знака. Ее части $F_+ (t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m \geqslant 0)$ и $F_- (t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m \leqslant 0)$ содержат полуустойчивые вперед и назад преобразования, связны и пересекаются по связному множеству F_0. Преобразования из F_0 превращаются гладкой заменой переменной в поворот; F_0 входит в границу каждой компоненты $E^k_{\frac{m}{n}}$.

Доказательство. 1. Множества $E_{\frac{m}{n}}$, F_+, F_- связны. Для доказательства соединим, не выходя из взятого множества, любое преобразование $T \in E_{\frac{m}{n}} (F_+, F_-)$ с поворотом T_2 на угол $2\pi \frac{m}{n}$ дугой $T_\theta (0 \leqslant \theta \leqslant 2,\ T_0 = T)$. Пусть $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ — цикл T. При помощи гладкой замены переменной

$$\varphi \to \Psi\varphi = \varphi + \psi(\varphi)$$

переведем точки $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ в $2\pi \frac{m}{n} l$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$. Положим

$$\Psi_\theta \varphi = \varphi + \theta\psi(\varphi)$$

и рассмотрим

$$T_\theta \varphi = \Psi_\theta T \Psi_\theta^{-1} \varphi = \varphi + t_\theta(\varphi) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Это преобразование является преобразованием T, записанным в переменной Ψ_θ, и принадлежит $E_{\frac{m}{n}} (F_+, F_-)$.

Рассмотрим теперь отрезок, соединяющий T_1 и T_2:

$$T_\theta\varphi = \varphi + (\theta - 1)\, 2\pi \frac{m}{n} + (2 - \theta)\, t_1(\varphi) \quad (1 \leqslant \theta \leqslant 2).$$

Точки $2\pi \frac{m}{n} l$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$ образуют цикл T_θ при всех $1 \leqslant \theta \leqslant 2$ и поэтому линия T_θ лежит целиком в $E_{\frac{m}{n}}$ (соответственно, F_+, F_-). Связность доказана.

2. Множество $E^k_{\frac{m}{n}}$ нормальных преобразований с данными m, n, k связно в любом из пространств $C^1, \ldots, A$. Для доказательства соединим в выбранном пространстве преобразования T_0, T_2 дугой T_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2)$. Произведем гладкую замену переменной

$$\Psi\varphi = \varphi + \psi(\varphi),$$

переводящую точки циклов T_0 в соответствующие точки циклов T_2 (что нетрудно сделать, так как число этих точек одинаково и они следуют в одинаковом порядке). Преобразование $T_1 = \Psi T_0 \Psi^{-1}$ действует на точки циклов T_2 как преобразование T_2; легко видеть, что других циклов оно не имеет. Полагая

$$\Psi_\theta(\varphi) = \varphi + \theta\psi(\varphi)$$

и

$$T_\theta = \Psi_\theta T_0 \Psi_\theta^{-1} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

мы соединим T_0 с T_1 кривой, лежащей в $E^k_{\frac{m}{n}}$.

Рассмотрим преобразования

$$T_1(\varphi) = \varphi + t_1(\varphi), \quad T_2(\varphi) = \varphi + t_2(\varphi).$$

Функции $t_1(\varphi)$ и $t_2(\varphi)$ совпадают в точках циклов, поэтому все преобразования

$$T_\theta(\varphi) = \varphi + (2 - \theta)\, t_1(\varphi) + (\theta - 1)\, t_2(\varphi) \quad (1 \leqslant \theta \leqslant 2)$$

имеют одни и те же циклы. Следовательно, линия T_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2)$, соединяющая T_0 с T_2, целиком лежит в $E^k_{\frac{m}{n}}$.

3. Доказательство того, что множество $E^k_{\frac{m}{n}}$ открыто и что множество $\bigcup\limits_k E^k_{\frac{m}{n}}$ нормальных преобразований с числом вращения $\frac{m}{n}$ всюду плотно в $E_{\frac{m}{n}}$ аналогично доказательству теоремы 5 (пп. 1 и 3).

4. Если $T_1, T_2 \in E^k_{\frac{m}{n}}$, то можно произвести непрерывную замену переменной $\Psi = \varphi + \psi(\varphi)$ такую, что T_1 перейдет в $T_2: T_2 = \Psi T_1 \Psi^{-1}$. В самом деле, обозначим точки устойчивых циклов T_1 через a^l_i $(1 \leqslant l \leqslant k,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ T_1 a_i = a_{i+1},\ a_{n+1} = a_1)$ и точки неустойчивых циклов T_1 — через b^l_i (через l мы обозначаем номер

цикла в порядке следования на окружности). При этом на дуге $a_1^1 b_1^1$ нет точек циклов (значит, то же относится к каждой дуге $a_i^l b_i^l$ и $b_i^l a_i^{l+1}$ *).

Пусть, далее, c_i^l и d_i^l — занумерованные аналогичным образом точки устойчивых и неустойчивых циклов T_2. Замена переменной Ψ переводит точки a_i^l, b_i^l в c_i^l, d_i^l, и нам остается доопределить Ψ на дугах $a_i^l b_i^l$, $b_i^l a_i^{l+1}$. Выберем точки x и y внутри дуг $a_1^1 b_1^1$ и $c_1^1 d_1^1$. Точки $T_1^n x$ и $T_2^n y$ лежат в тех же дугах соответственно ближе к a_1^1 и c_1^1. Отобразим при помощи Ψ дугу $(x, T_1^n x)$ на дугу $(y, T_2^n y)$ гомеоморфно и прямо: $x \to y$, $T_1^n x \to T_2^n y$. Очевидно, при преобразованиях T_1^p образы дуги $[x, T_1^n x]$ (соответственно дуги $[y, T_2^n y]$ при преобразованиях T_2^p) целиком покроют все дуги $a_i^1 b_i^1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (соответственно все дуги $c_i^1 d_i^1$). Таким образом, мы определяем $\Psi(\varphi)$ на дуге $T_1^p x$, $T_1^{p+n} x$ как $T_2^p \Psi T_1^{-p}$. Аналогичное построение можно проделать на дугах $a_i^l b_i^l$ и $b_i^l a_i^{l+1}$. Доказательство того, что найденная замена переменной является искомой, несложно, и мы его опускаем.

5. Строение границ. Если $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ меняет знак, то T есть внутренняя точка $E_{\frac{m}{n}}$, ибо при малом изменении T $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m$ будет по-прежнему менять знак и T сохранит цикл. Поэтому граница $E_{\frac{m}{n}}$ входит в сумму F_+ ($T \in F_+$, если $t^{(n)}(\varphi) - 2\pi m \geqslant 0$) и F_-. Чтобы превратить преобразование $T \in F_0 = F_+ \cap F_-$ в поворот, надо гладкой заменой переменной перевести точки одного цикла в $2\pi \frac{m}{n} l$ и затем переопределить параметр на всех дугах $\left[2\pi \frac{ml}{n}, 2\pi \frac{ml+1}{n}\right]$, кроме одной ($l = 0$), по формуле

$$\Psi(\varphi) = 2\pi \frac{ml}{n} + T^{-l}(\varphi).$$

Малым изменением поворота на угол $2\pi \frac{m}{n}$ можно превратить его в преобразование из любого $E_{\frac{m}{n}}^k$ — примерно так, как это сделано при доказательстве теоремы 5 (п. 3). Из предыдущего рассуждения следует, что то же верно и для всех преобразований из F_0, что доказывает последнее утверждение теоремы 6.

10.4. Из теоремы 6 (п. 4 доказательства) вытекает, что нормальные преобразования являются грубыми в смысле Андронова — Понтрягина ([10]). Так как, в силу теоремы 5, множество всех нормальных преобразований всюду плотно, то никакое не нормальное преобразование не может быть грубым.

С топологической точки зрения нормальные преобразования заполняют подавляющую часть пространства преобразований — всюду плотное

* Под $l+1$ при $l = k$ понимается 1.

открытое множество. В следующем параграфе будет показано, что с точки зрения меры типичным является также эргодический случай.

§ 11. Случай иррационального μ

11.1. Рассмотрим теперь множество E_μ иррационального уровня μ. В пространствах $C^2, \ldots, A$, по теореме Данжуа, каждое преобразование $T \in E_\mu$ может быть превращено в поворот на угол $2\pi\mu$ непрерывной заменой переменной. Нас же будут интересовать преобразования, превращающиеся в поворот гладкой заменой переменной. Множество таких преобразований мы обозначим через $E_\mu^{C^p}$ (соответственно через E_μ^A; общее обозначение — E'_μ).

ТЕОРЕМА 7. 1°. *Множество E_μ^A всюду плотно в E_μ по топологии C. Все множества E'_μ связны.*

2°. *Если μ таково, что $\left|\mu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{|n|^3}$ при любых целых m и $n \neq 0$, то множество E_μ^A открыто в E_μ по топологии A.*

Доказательство. 1°. Пусть T_0 обозначает поворот на угол $2\pi\mu$, и пусть $T_1 \in E'_\mu$. Тогда существует гладкая замена переменной

$$\Psi(\varphi) = \varphi + \psi(\varphi)$$

такая, что $T_1 = \Psi T_0 \Psi^{-1}$. Замена

$$\Psi_\theta(\varphi) = \varphi + \theta\psi(\varphi) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$$

превращает T_0 в $T_\theta = \psi_\theta T_0 \psi_\theta^{-1}$; таким образом, линия T_θ, соединяющая T_0 с T_1, лежит целиком в E'_μ. Связность E'_μ доказана.

Построим в E_μ^A преобразование T^* в заданной окрестности $T \in E_\mu$. По теореме Данжуа, существует непрерывная замена переменной $\Psi(\varphi)$ такая, что $T = \Psi T_0 \Psi^{-1}$. Построим аналитическую замену $\Psi^*(\varphi)$ переменной φ так, чтобы Ψ и Ψ^*, Ψ^{-1} и Ψ^{*-1} мало отличались в метрике C. Тогда $T^* = \Psi^* T_0 \Psi^{*-1}$ аппроксимирует T в метрике C и принадлежит E_μ^A. Утверждение 1° доказано полностью.

2°. То, что множество E_μ^A открыто в $E_\mu \cap A$, вытекает из теоремы 2. Очевидно, достаточно показать, что некоторая окрестность поворота T_0 в $E_\mu \cap A$ входит в E_μ^A. Преобразование $T \in E_\mu \cap A$ можно записать в виде

$$\varphi \to \varphi + 2\pi\mu + F(\varphi),$$

причем окрестность $U_{R,C}$ преобразования T_0 задается неравенством $|F(\varphi)| < C$ при $|\operatorname{Im}\varphi| < R$. Но в силу следствия теоремы 2 (см. п. 4.3) при данном R существует C такое, что все преобразования $T \in U_{R,C} \cap E_\mu$ аналитически приводятся к повороту. Теорема 7 доказана.

11.2. При подходе к [вопросу о типичности с точки зрения меры (см. [8])] мы наталкиваемся на отсутствие разумной меры в функциональных пространствах и поэтому вынуждены ограничиться конечномерными подпространствами.

Рассмотрим двумерное пространство аналитических преобразований

$$A_{a,\,b}: z \to z + a + F(z,\,b),$$

где при $|\operatorname{Im} z| < R$, $|b| < b_0$ $F(z,\,b)$ есть аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству $|F(z,\,b)| < L|b|$.

ТЕОРЕМА 8.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{mes} E_\theta}{2\pi\theta} = 1, \tag{1}$$

где E_θ — множество точек плоскости (ab), $a \in [0,\,2\pi]$, $b \in [0,\,\theta]$, таких, что преобразование A_{ab} превращается в поворот аналитической заменой координаты z.

Доказательство. 1. Рассмотрим множество M_K — компактное множество точек $0 < \mu < 1$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| \geqslant \frac{K}{n^3}$$

при всех $m, n > 0$. По теореме 2, для любого $\mu \in M_k$ существуют $C = C(K,\,R) > 0$ и аналитическая по b функция $\Delta(b,\,\mu)$ такие, что преобразования $A_{2\pi\mu+\Delta(b,\,\mu),\,b}$ при $\mu \in M_K$, $|b| < C$ могут быть превращены в поворот аналитическим изменением параметра: $(2\pi\mu + \Delta(b,\,\mu),\,b) \in E_\theta$. Обозначим через $M_K(b)$ множество точек $\mu + \frac{\Delta(b,\,\mu)}{2\pi}$, $\mu \in M_K$, при фиксированном b. Тогда преобразование $D_b: \mu \to \mu + \frac{\Delta(b,\,\mu)}{2\pi}$ переведет M_K в множество $M_K(b)$.

Положим $\varepsilon > 0$ и выберем $K > 0$ так, чтобы $\operatorname{mes} M_{2K} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ (по лемме 1 § 2 это возможно). Мы покажем, что при достаточно малом b справедливо неравенство

$$\operatorname{mes} M_{\frac{K}{2}}(b) > 1 - \varepsilon,$$

из которого теорема 8 будет следовать непосредственно, ибо очевидно, что

$$2\pi\theta \geqslant \operatorname{mes} E_\theta \geqslant 2\pi \int_0^\theta \operatorname{mes} M_{\frac{K}{2}}(b)\, db.$$

2. В § 7 построено совершенное множество $N_K^0 = N_K$, $M_{2K} \subseteq N_K \subseteq M_{\frac{K}{2}}$. Очевидно, достаточно показать, что при достаточно малом b

$$\operatorname{mes} N_K(b) > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

(Поскольку $K > 0$ фиксировано, индекс K будем теперь опускать: $N_K = N$.)

Согласно теореме 3, отображение $D_b: N \to N(b)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности моногенных отображений

$$D_b^n: \mu \to \mu + \frac{1}{2\pi} \Delta^n(b,\,\mu).$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $b(\varepsilon)$ такое, что при $b < b(\varepsilon)$ и любом n

$$\operatorname{mes} D_b^n(N) > 1 - \varepsilon. \tag{3}$$

В силу теоремы 3, найдется такое $b(\varepsilon)$, что при всех n, $b < b(\varepsilon)$, $\mu \in N$ будет справедливо неравенство

$$\left|\frac{\partial \Delta^n}{\partial \mu}\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

т. е. при отображении D_b^n N отображается почти без растяжения.

Докажем, что это $b(\varepsilon)$ искомое (индекс n будет всюду опущен, так как рассуждения теперь ведутся при n фиксированном). Пусть $b < b(\varepsilon)$. По определению моногенности, для $\frac{\varepsilon}{3}$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\Delta(\mu_1) - \Delta(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\partial \Delta(\mu_3)}{\partial \mu}\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

если $|\mu_1 - \mu_3| < \delta$, $|\mu_2 - \mu_3| < \delta$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in N$. Тогда при тех же условиях

$$\left|\frac{\Delta(\mu_1) - \Delta(\mu_2)}{\mu_1 - \mu_2}\right| < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

согласно выбору $b(\varepsilon)$.

3. Разобьем N на непересекающиеся (разумеется, измеримые) части N^i, $\bigcup\limits_{i=1}^{L} N^i = N$, диаметр каждой из которых меньше δ, и пусть $N^i(b)$ — их образы при преобразовании D_b^n. Так как при этом преобразовании расстояния между двумя точками N^i могут уменьшаться, как это явствует из (4), не более чем в $1 - \frac{2\varepsilon}{3}$ раз, то

$$\operatorname{mes} N^i(b) > \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \operatorname{mes} N^i,$$

откуда следует:

$$\sum_{i=1}^{L} \operatorname{mes} N^i(b) > \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \sum_{i=1}^{L} \operatorname{mes} N^i.$$

Таким образом,

$$\operatorname{mes} N(b) > \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right) \operatorname{mes} N,$$

и, так как

$$\operatorname{mes} N > 1 - \frac{\varepsilon}{3},$$

получаем:

$$\operatorname{mes} N(b) > \left(1 - \frac{2\varepsilon}{3}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) > 1 - \varepsilon,$$

и неравенство (3) доказано. Из него следует неравенство (2), ибо справедлива следующая

ЛЕММА. *Пусть* $E \subseteq [0,1]$ *— совершенное множество,* f_n *— последовательность его непрерывных отображений на* $F_n \subseteq [0,1]$*, равномерно сходящаяся к отображению* $f: E \to F$*, и пусть* $0 \leqslant \Delta < 1$*. Если* $\operatorname{mes} F_n > 1 - \Delta$ *при всех* n*, то* $\operatorname{mes} F \geqslant 1 - \Delta$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество D_ε смежных интервалов F, превосходящих ε. Их будет конечное число, и при достаточно большом n эти интервалы будут сколь угодно мало отличаться

от соответствующих смежных интервалов F_n. Сумма длин последних при любом n меньше Δ, так как mes $F_n > 1 - \Delta$. Поэтому общая длина D не превосходит Δ. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, мера всего дополнения к F тоже не больше Δ, что и требовалось доказать.

Полагая $E = N$, $f_n = D_b^n$, $F_n = D_b^n(N)$, $\Delta = \varepsilon$, получим из (3) неравенство (2). Теорема 8 доказана.

§ 12. Пример

Рассмотрим двумерное пространство отображений окружности на себя вида

$$\varphi \to \varphi + a + \varepsilon \cos \varphi \equiv T_{a,\varepsilon}(\varphi). \tag{1}$$

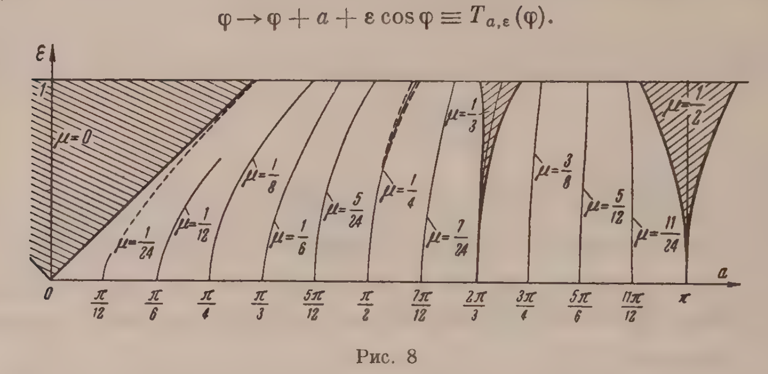


Рис. 8

При $\varepsilon = 0$ получим $T_{a,0}$ — поворот на угол a. При $|\varepsilon| < 1$ формула (1) определяет прямое взаимно однозначное непрерывное отображение окружности на себя.

Множества уровня непрерывной при $|\varepsilon| \leqslant 1$ функции

$$\mu(a, \varepsilon) = \mu(T_{a,\varepsilon})$$

можно изучать с двух сторон. Во-первых, можно искать те точки (a, ε) плоскости, где μ рационально; границы таких областей даются условиями полуустойчивости цикла. Например, точка (a, ε) входит в множество уровня $\mu = 0$, если уравнение

$$\varphi = \varphi + a + \varepsilon \cos \varphi$$

имеет действительное решение, т. е. границей области $\mu = 0$ служат прямые $a = \pm\varepsilon$. Таким же путем находятся области $\mu = \frac{m}{n}$. Они подходят к прямой $\varepsilon = 0$ все более узкими языками (рис. 8): две границы области $\mu = \frac{m}{n}$ имеют $(n-1)$-й порядок касания. Например, области $\mu = \frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{1}{3}$ имеют границами кривые

$$a = \pi \pm \frac{\varepsilon^2}{4} + O(\varepsilon^4), \tag{2}$$

$$a = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}\varepsilon^2 \pm \frac{\sqrt{7}}{24}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \tag{3}$$

Отсюда получаются приближенные формулы, годные и для не очень малых ε: при $\varepsilon = 1$ формула (2) дает $\pi \pm 0{,}25$ вместо $\pi \pm 0{,}23237\ldots$.

Второй подход к определению множеств уровня $\mu(a, \varepsilon)$ состоит в том, чтобы использовать метод Ньютона для приближенного отыскания линий иррационального уровня μ. После двух шагов метода Ньютона мы получаем приближенное уравнение линии уровня

$$a = 2\pi\mu + \frac{\varepsilon^2}{4} \operatorname{ctg} \pi\mu - \frac{\varepsilon^4}{32} \operatorname{ctg}^3 \pi\mu + \frac{\varepsilon^4}{32} \operatorname{ctg} 2\pi\mu \, (1 + \operatorname{ctg}^2 \pi\mu), \qquad (4)$$

действующее хорошо, когда котангенсы невелики. Рис. 9 дает понятие о характере сходимости приближений и о соответствии этого результата предыдущему (на этом рисунке изображен график функции $\mu(a) = \mu(a, 1)$; через 0 обозначено нулевое, через I — первое, через II — второе приближения метода Ньютона; горизонтальные участки при $\mu = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ определены независимо в соответствии с формулами (2), (3)). При указанном формулой (4) числе a замена переменной

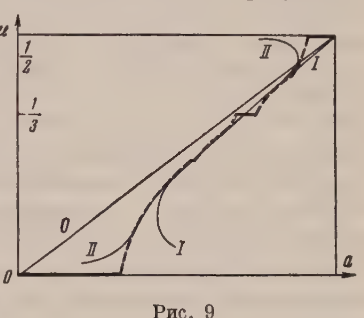


Рис. 9

$$\psi(\varphi) = \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sin(\varphi - \pi\mu)}{\sin \pi\mu} + \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\sin(2\varphi - \pi\mu)}{\sin \pi\mu \sin 2\pi\mu}$$

превращает преобразование (1) в преобразование

$$\psi \to \psi + 2\pi\mu + F_2(\psi, \varepsilon, \mu),$$

где $F_2 \sim \varepsilon^4$.

Замечание. В теории колебаний хорошо известно явление «захватывания», которому соответствуют зоны с рациональными числами вращения.

Преобразования вида (1) и диаграммы вида рис. 8 описывают некоторый режим работы генератора релаксационных колебаний, синхронизируемого синусоидальными импульсами [см. ([36])]. Другая задача подобного рода, тоже связанная с отображениями окружности на себя, рассмотрена в книге ([37]) (стр. 221—231).

§ 13. О траекториях на торе *

13.1. Пусть на торе $x, y \in [0, 2\pi]$ дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (F(x + 2\pi k, \; y + 2\pi l) = F(x, y) > 0)$$

и выполнены обычные условия теорем существования и единственности решений. Через каждую точку y_0 меридиана $x = 0$ проходит траектория

$$y(x, y_0), \quad y(0, y_0) = y_0.$$

Следуя Пуанкаре, сопоставим точке y_0 точку $y_1 = y(2\pi, y_0)$. Тогда мы получим отображение окружности $x = 0$ на себя — прямое, взаимно однозначное, непрерывное и при достаточной гладкости (или аналитичности) правой части гладкое (соответственно аналитическое); если же функция $F(x, y)$ мало отличается от постоянной, то это отображение будет близко к повороту. Все свойства преобразования $y_1(y_0)$ отражают соответ-

* См. ([1]) — ([4]), ([14]), ([19]) и ([20]).

ствующие свойства решений уравнения (1), и мы должны только сформулировать результаты предыдущих параграфов в новых терминах.

Если отображение $y_1(y_0)$ заменой переменной y на $\varphi(y)$ превращается в поворот на угол $2\pi\mu$, то эту замену естественно продолжить на весь тор, положив в точке $(x, y(x, y_0))$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y_0) + \mu x.$$

Очевидно, если $\varphi(y)$ — гладкая (соответственно аналитическая) замена, то такою же будет замена $\varphi(x, y)$ на всем торе. В координатах x, φ траектории запишутся в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \mu x$$

и поэтому говорят, что такого рода замена *выпрямляет траектории*. Аналитическое выпрямление траекторий получил А. Н. Колмогоров ([14]) в случае наличия аналитического интегрального инварианта. Мы, на основании теоремы 2, можем утверждать, что *если функция $F(x, y)$ аналитически близка к постоянной и если число вращения μ удовлетворяет обычным арифметическим условиям, то траектории можно выпрямить аналитически*. Отсюда вытекает наличие аналитического интегрального инварианта у динамической системы

$$\frac{dy}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = 1$$

(инвариантная мера — площадь в координатах x, φ).

С другой стороны, подобно примеру § 1, можно построить такую аналитическую функцию $F(x, y)$, что инвариантная мера системы не будет абсолютно непрерывна относительно площади $dx\,dy$, хотя число вращения μ иррационально и система эргодична *.

13.2. Пусть на торе дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y) \quad (A(x, y) > 0, \quad B(x, y) > 0) \qquad (1)$$

с аналитической правой частью. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B(x, y)}{A(x, y)},$$

имеющее те же интегральные кривые, что и система. Если их можно выпрямить согласно п. 13.1, то в новых координатах система примет вид

$$\frac{dx}{dt} = A'(x, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu A'(x, \varphi),$$

где $A'(x, \varphi) = A(x, y(x, \varphi))$. Эта система имеет аналитический интегральный инвариант $\frac{1}{A'(x, \varphi)}$, и в работе ([14]) показано, как (при обычных предположениях о μ) превратить ее в систему

$$\frac{du}{dt} = 1, \quad \frac{dv}{dt} = \mu$$

аналитической заменой переменных.

---

* Примечание при корректуре. Противоположное утверждение в появившемся во время печатания настоящей работы реферате ([41]) ошибочно.

Противоположной возможностью как в случае уравнения, так и в случае системы, является наличие предельных циклов ([20]). Разбиение пространства правых частей систем (1) на множества уровня числа вращения, выделение грубых систем и обсуждение вопроса о типичности аналогичны рассмотрениям §§ 9—11. Оказывается, что

1. Топологически подавляющим является случай нормальных циклов (он же грубый) *. Соответствующее множество правых частей открыто и всюду плотно; однако в системах с интегральным инвариантом этот случай вовсе не может иметь места.

2. Эргодический случай (случай иррационального μ) тоже типичен, если исходить при оценке типичности из мер в конечномерных подпространствах. Для систем с аналитическим интегральным инвариантом этот случай — подавляющий.

13.3. В многомерном случае в отсутствие интегрального инварианта число вращения не определено. Тем не менее, пользуясь замечанием п. 4.4, можно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — вектор с несоизмеримыми компонентами такой, что при любом целочисленном векторе $\vec{k}$*

$$|(\vec{\mu}, \vec{k})| > \frac{C}{|\vec{k}|^n}.$$

Тогда существует такое $\varepsilon(R, C, n) > 0$, что для любого аналитического векторного поля $\vec{F}(\vec{x})$ на торе (т. е. такого, что $\vec{F}(\vec{x} + 2\pi\vec{k}) = \vec{F}(\vec{x})$) и достаточно малого, $|\vec{F}(\vec{x})| < \varepsilon$ при $|\operatorname{Im} \vec{x}| < R$, найдется вектор $\vec{a}$, для которого система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{a}$$

превращается в

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\pi\vec{\mu}$$

аналитической заменой переменных.

§ 14. О задаче Дирихле для уравнения струны

14.1. Пусть D — область на плоскости, выпуклая по координатным направлениям, т. е. ее граница Γ пересекает каждую прямую $x = c$, $y = c$ не более чем в двух точках.

Задача Дирихле для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$ на D состоит в том, чтобы *найти на D функцию $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, обращающуюся на Γ в заданную функцию $f(a)$ $(a \in \Gamma)$: $u|_\Gamma = f$.*

При этом на f, φ, ψ, Γ могут налагаться различные требования гладкости, аналитичности и т. п.

* В работе ([19]), судя по реферату ([21]), утверждается, что необходимое и достаточное условие грубости — наличие *одного* устойчивого цикла. Это неверно.

В случае, когда D — прямоугольник $0 \leqslant x+y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant t$, удобно перейти к координатам $\xi = x+y$, $\tau = y-x$. Тогда наше уравнение оказывается уравнением струны, а задача может быть интерпретирована как нахождение движения струны по двум мгновенным фотографиям и движению концов. Из физических соображений (стоячие волны) ясно, что при соизмеримых l и t задача разрешима не всегда, а если и разрешима, то не единственным образом. Этой задаче посвящен ряд работ [см. ([22]), ([23]), ([5]), ([24]), ([17]), ([28])]; трудности аналогичного порядка встречаются и в решении некоторых других задач [см. ([25])—([27])].

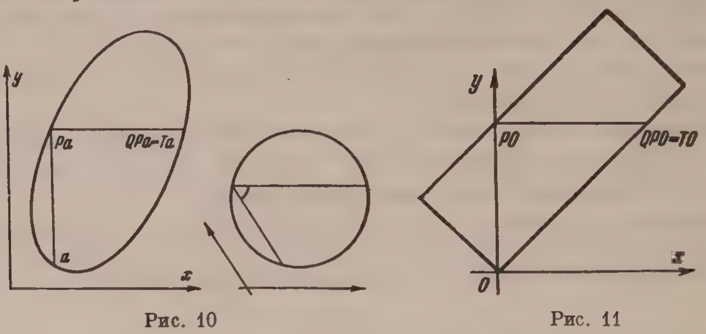


Рис. 10 Рис. 11

14.2. Теоремы единственности [см. ([5])]. Сопоставим границе Г некоторые ее отображения на себя (см. рис. 10). Пусть P — преобразование, переводящее точку $a \in \Gamma$ в точку $Pa \in \Gamma$ с той же координатой x; Q — преобразование, переводящее точку $a \in \Gamma$ в точку $Qa \in \Gamma$ с той же координатой y. Эти преобразования непрерывны, взаимно однозначны и меняют ориентацию контура Г. Обозначим $QP = T$. Очевидно,

$$P^2 = Q^2 = E, \quad PQ = T^{-1}.$$

T — прямое гомеоморфное отображение.

ТЕОРЕМА 10 [см. ([5])]. *Если контур* Г *таков, что для некоторой точки* $a_0 \in \Gamma$ *множество* $T^n a_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *всюду плотно на* Г, *то задача Дирихле для* Г *не может иметь более одного непрерывного решения.*

Доказательство. Решение $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ определяет функции $\varphi(x)$, $\psi(y)$ с точностью до постоянной. Покажем, что в условиях теоремы знание $\varphi(x)$ в одной точке $a \in \Gamma$ позволяет определить $\varphi(T^n a)$, $\psi(T^n a)$ во всех точках $T^n a$ $(n = 0, 1, \ldots)$ (мы пишем $\varphi(a)$ и $\psi(a)$ для обозначения $\varphi(x)$ и $\psi(y)$, где x, y — координаты точки $a \in \Gamma$).

Зная $\varphi(a)$, легко найти

$$\psi(Pa) = f(Pa) - \varphi(a),$$

так как у точек a и Pa абсциссы одинаковы. Затем можно определить

$$\varphi(Ta) = f(Ta) - \psi(Pa),$$

пользуясь совпадением ординат точек Pa и Ta. Далее мы таким же образом получим φ, ψ во всех точках $T^n Pa$, $T^n a$. Они образуют всюду плотное на Г множество, поэтому совпадающие в этих точках непрерывные функции совпадают на Г везде. Теорема доказана.

В случае, когда D — прямоугольник $0 \leqslant x+y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant t$, преобразование T есть, в сущности, поворот. Именно, если ввести на контуре Г параметр

$$\vartheta = \frac{2\alpha\pi}{\sqrt{2}(l+t)},$$

где α — длина, отсчитываемая по контуру от точки O до a (рис. 11), то наше преобразование

$$T : T\vartheta = \vartheta + \frac{2\pi t}{t+l}$$

есть поворот на угол $2\pi \frac{t}{t+l}$. Если D — эллипс, то нетрудно ввести на Г параметр так, чтобы в нем преобразование записывалось как поворот. Именно, отобразим эллипс аффинно на круг. Прямые координатных направлений перейдут в два семейства параллельных прямых, причем две прямые разных семейств образуют угол $\pi\mu$, вообще не прямой. Очевидно, когда эллипс подвергается преобразованию T, окружность поворачивается на угол $2\pi\mu$ (рис. 10).

Если Г — кривая ограниченной кривизны, то T — дважды дифференцируемое преобразование, откуда, по теореме Данжуа, вытекает, что при иррациональном числе вращения μ отображения T множество $T^n a$ всюду плотно на Г. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 11 [см. ([5]), ([24])]. *Если Г имеет ограниченную кривизну и μ иррационально, то задача Дирихле может иметь только одно непрерывное решение.*

Замечание. Воспользовавшись теоремой о точке плотности, легко показать, что в условиях нашей теоремы может быть только одно измеримое решение. С другой стороны, метод доказательства теоремы 10 позволяет при иррациональном μ построить сколько угодно решений но, вообще, неизмеримых.

14.3. Подробное исследование прямоугольника.

ТЕОРЕМА 12 [см. ([23]), ([17])]. *Пусть на границе Г прямоугольника $0 \leqslant x+y \leqslant l$, $0 \leqslant y-x \leqslant t$ задана $p+\varepsilon$ раз дифференцируемая вдоль границы функция $f(\vartheta)$. Тогда для всех $\mu = \frac{t}{t+l} \in M_k$, удовлетворяющих неравенству $\left|\mu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{|n|^3}$ при любых m и n и некотором $K > 0$, задача Дирихле с указанной граничной функцией имеет $p-1$ раз дифференцируемое решение и поставлена относительно $f(\vartheta)$ корректно. В случае аналитичности f решение при тех же μ аналитично.*

При некоторых иррациональных μ, даже несмотря на аналитичность $f(\vartheta)$, решение может оказаться

1) *только бесконечно дифференцируемым,*
2) *дифференцируемым k, но не $k+1$ раз,*
3) *только непрерывным,*
4) *разрывным,*
5) *неизмеримым.*

Доказательство. Если

$$f(\vartheta) = \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\vartheta}, \quad \varphi(\vartheta) = \sum_{n \neq 0} b_n e^{in\vartheta}, \quad \psi(\vartheta) = \sum_{n \neq 0} c_n e^{in\vartheta},$$

то, поскольку $\varphi(\vartheta)$ зависит только от x, а $\psi(\vartheta)$ — только от y, имеем:

$$\varphi(\vartheta) = \varphi(-2\pi\mu - \vartheta), \quad b_n = b_{-n} e^{in2\pi\mu},$$
$$\psi(\vartheta) = \psi(-\vartheta), \qquad c_n = c_{-n}.$$

Так как $f(\vartheta)$ действительна и потому $a_n = \bar{a}_{-n}$, то из равенства $f(\vartheta) = \varphi(\vartheta) + \psi(\vartheta)$ получаем:

$$b_n + c_n = a_n, \quad b_n e^{-in2\pi\mu} + c_n = \bar{a}_n,$$

или

$$b_n = \frac{\bar{a}_n - a_n}{e^{-2\pi i\mu n} - 1}, \quad c_n = a_n - b_n. \tag{1}$$

Теперь, когда формальное решение найдено, окончание доказательства можно провести, в точности повторяя рассуждения § 2 *.

Замечание. Из формул (1) видно, что при всех μ можно, обрывая ряд, построить «приближенное решение», степень приближения которого тем больше, чем менее соизмеримы l и t. При рациональном μ приближение не выше определяемой μ грани, а при сильно несоизмеримых l и t мы имеем теорему 11. В этом смысле корректность по области отмечает Н. Н. Вахания в работе ([28]).

Мы можем утверждать, что зависимость решения от μ *моногенна* (см. § 7).

14.4. Общий случай. Если граница D такова, что преобразование T можно представить как поворот в параметре, являющемся гладкой функцией точки границы, то, очевидно, для такого контура применимы все рассуждения п. 14.3, и в случае «достаточно иррационального» μ задача Дирихле имеет гладкое решение.

Примером может служить эллипс, для которого параметр построен в п. 14.2. В общем же случае при иррациональном μ, несмотря на какую угодно гладкость Γ, нельзя гарантировать, что параметр (существующий по теореме Данжуа), в котором преобразование T становится поворотом, гладок. Ф. Джон ([5]) показал, что *непрерывной* заменой переменных x, y вида $x \to u(x)$, $y \to v(y)$ («сохраняющей уравнение $\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0$») можно отобразить область, для которой T имеет иррациональное μ, на прямоугольник или на эллипс с таким же μ. Однако эта замена, вообще говоря, только непрерывна, и гладкое граничное условие на кривой она может превратить в негладкое на эллипсе.

Заметим, что если Γ — аналитическая кривая, то P и Q, а значит, T и T^n, суть аналитические отображения. Если же Γ, кроме того, — аналитически близкая к эллипсу кривая, то в подходящем параметре преобразование будет аналитически близко к повороту. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что *среди кривых, для которых $\mu \in M_k$, аналогичны эллипсу по отношению к разрешимости задачи Дирихле во всяком случае все кривые, достаточно близкие к эллипсу.*

Точно так же и другие теоремы об отображениях окружности на

* Примечание при корректуре. В вышедшей во время печатания настоящей работы статье П. П. Мосолова ([42]) аналогичное теореме 12 утверждение доказано для любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, у которого порядки всех производных четные.

себя могут быть сформулированы в этих терминах. В частности, если преобразование T имеет цикл, то задача Дирихле с нулевым граничным условием имеет ненулевое решение (по крайней мере кусочно постоянное; подробнее см. ([24])).

Задача Дирихле для уравнения струны является задачей о собственных значениях для двумерного уравнения С. Л. Соболева

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

[см. ([24]), ([27]), ([29]), ([30])]. В спектр входят те значения λ, для которых отображение T_λ, построенное по кривой Γ_λ, имеет цикл (здесь через Γ_λ обозначена кривая Γ, подвергнутая зависящему от λ растяжению).

Из результатов § 10 вытекает, что если цикл устойчив, то все кривые, близкие к Γ_λ, дают аналогичный цикл и, следовательно, точка λ входит в спектр с окрестностью. Пример кривой Γ, порождающей преобразование с устойчивым циклом, построен Р. А. Александряном ([24]). На основании § 10 мы можем показать, что такие кривые имеются в любой окрестности любой кривой Γ.

Задача Дирихле для волнового уравнения с данными на эллипсоиде исследована недавно Р. Денчевым ([31]), ([32]).

Поступило
17. IX. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пуанкаре А., О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.— Л., 1947.

[2] Denjoy A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journ. de Math., XI, Fasc. IV (1932), 333—375.

[3] Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949.

[4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, Москва, 1958.

[5] John F., The Dirichlet problem for a hyperbolic equation, Amer. J. Math., 63 (1941), 141 — 154.

[6] Колмогоров А. Н., О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 4 (1954), 527 — 530.

[7] Siegel C. L., Iterations of analytic functions, Ann. of Math., 43, № 4 (1942), 607—612.

[8] Колмогоров А. Н., Общая теория динамических систем и классическая механика, Proc. of the Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam, vol. 1 (1954), 315 — 333.

[9] Borel E., Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, Paris, 1917.

[10] Андронов А. А., Понтрягин Л. С., Грубые системы, Доклады Ак. наук СССР, 14, № 5 (1937), 247 — 250.

[11] Колмогоров А. Н., Лекции о динамических системах, читанные в МГУ (1957/1958).

[12] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, t. 3, № 17, 5, Berlin, 1935.

[13] Anzai, Ergodic skew product transformations on the torus, Osaca math. Journ., 3, № 1 (1951), 83—99.

[14] Колмогоров А. Н., О динамических системах с интегральным инвариантом на торе, Доклады Ак. наук СССР, 93, № 5 (1953), 763—766.

[15] Jacobi C. G. J., De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium abelianarum innititur, J. für Math., XIII (1835), 55 — 78.

[16] Хинчин А. Я., Цепные дроби, Москва, 1935.

[17] Вахания Н. Н., Диссертация, МГУ, 1958.

[18] Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, III, 6 (28) (1948), 89 — 185.

[19] Цинь Юань-сюнь, О дифференциальных уравнениях на торе, Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., I, № 3 (1957), 7 — 11.

[20] Kneser H., Reguläre Kurvenscharen auf die Ringflächen, Math. Ann., 91 (1923), 135 — 154.

[21] Грабарь М. И., Реферат 3711, РЖМат, № 5, 1958.

[22] Huber A., Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y)$, Monatshefte für Math. und Phys., 39,8 (1932), 79—100.

[23] Bourgin D. G., Diffin R., The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Am. Math. Soc., 45 (1939), 851 — 859.

[24] Александрян Р. А., Диссертация, МГУ, 1950.

[25] Власов В. З., К теории безмоментных оболочек вращения, Известия Ак. наук СССР, ОТН, № 5 (1955), 55—84.

[26] Соколов А. М., К расчету оболочек отрицательной кривизны, Известия Ак. наук СССР, ОТН, № 5 (1955), 85—101.

[27] Соболев С. Л., Об одной новой задаче математической физики, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1953), 3 — 50.

[28] Вахания Н. Н., Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 6 (1957), 906 — 909.

[29] Александрян Р. А., О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 5 (1950), 869—872.

[30] Александрян Р. А., Об одной задаче С. Л. Соболева для специального уравнения с частными производными 4-го порядка, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 4 (1950), 631 — 634.

[31] Денчев Р., О спектре одного оператора, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 2 (1959), 259 — 262.

[32] Денчев Р., О задаче Дирихле для волнового уравнения, Доклады Ак. наук СССР, 127, № 3 (1959), 501 — 504.

[33] Siegel C. L., Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, 5 (1952), 21 — 30.

[34] Siegel C. L., Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, M. Ann., 128, 2 (1954), 145 — 170.

[35] Зигель К. Л., Лекции по небесной механике, ИЛ, Москва, 1959.

[36] Теодорчик К. Ф., Автоколебательные системы, ГТТИ, Москва, 1952.

[37] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

[38] Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3) (1950), 273—305.

[39] Finzi A., Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 69 (3) (1952), 371—430.

[40] Wintner A., The linear difference equations of first order for angular variables, Duke Math. J., 12 (1945), 445—449.

[41] Грабарь М. И., Реферат 333, РЖМат, № 1, 1960.

[42] Мосолов П. П., О задаче Дирихле для уравнений в частных производных, Известия ВУЗ'ов, Математика, № 3 (1960), 213 — 218.

[43] Плисс В. А., О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе, Вестн. ЛГУ, сер. мат.-мех., астр., № 13, вып. 3 (1960), 15—23.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961) 87—112

М. М. ДЖРБАШЯН

О КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$

В работе дается аналитическая характеристика операторов, осуществляющих изометрическое или почти изометрическое отображение гильбертовых пространств функций $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$. Одновременно приводится широкое обобщение теоремы Палея — Винера о системах функций, близких к полным ортонормальным, для ядер, близких к ядрам, осуществляющим изометрическое отображение этих пространств.

В настоящей работе строится аппарат прямых и обратных квазиизометрических интегральных преобразований пространств функций $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ друг на друга, порожденных из ядер, в определенном смысле близких к ядрам, осуществляющим изометрическое отображение тех же пространств.

В § 1, имеющем вводный характер, на двух элементарных, но важных примерах показывается целесообразность более общей формулировки известной теоремы Бохнера об аналитической характеристике унитарных в $L^2(a, b)$ операторов и приводится обобщенная формулировка теоремы Бохнера на случай операторов, изометрически отображающих друг на друга пространства вида $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$.

В § 2 сформулирована теорема о квазиизометрических отображениях пространств $L^2(a, b)$ и $L^2_{[x]}(0, +\infty)$ друг на друга при помощи ядер, близких к ядрам, осуществляющим изометрическое отображение этих пространств. При этом выясняется, что приводимый нами результат эквивалентен известной теореме Палея и Винера о биортогональных системах в $L^2(a, b)$, близких к ортонормальным.

В § 3 устанавливается основной результат работы, являющийся естественным распространением теоремы Палея и Винера на пространства функций $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$. Доказывается, что если пара ядер $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$ осуществляет изометрическое отображение пространств $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ согласно теореме Бохнера в обобщенной формулировке и если некоторое ядро $\widetilde{K}(\zeta, x)$ в определенном смысле близко к ядру $K(\zeta, x)$, то существуют ядра $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{H}(\zeta, x)$ и $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$, обладающие тем свойством, что обе пары ядер $\widetilde{K}(\zeta, x)$, $\widetilde{H}(\zeta, x)$ и $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$ осуществляют квазиизометрическое отображение тех же пространств при помощи формул, аналогичных тем, которыми осуществляется изометрическое отображение этих пространств.

Доказывается также, что ядра $\widetilde{K}(\zeta, x)$ и $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$, а также $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$ и $\widetilde{H}(\zeta, x)$ связаны теми же уравнениями, что и ядра $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$, при помощи которых осуществлялось изометрическое отображение пространств $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$.

В заключение вводится понятие изометрической пары операторов и доказывается теорема об их аналитическом представлении в пространствах $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$.

§ 1. Аналитическая характеристика изометрических операторов в пространствах $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$

1°. Введем сначала некоторые предварительные обозначения и определения, сопроводив их рядом замечаний, которыми мы будем существенно пользоваться как в данном, так и в последующих параграфах.

Пусть $\sigma_k(x)$ $(k=1, 2)$ — неубывающая функция, определенная и непрерывная справа на интервале (a_k, b_k), где $-\infty \leqslant a_k < b_k \leqslant +\infty$, имеющая ограниченную вариацию в любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a_k, b_k)$.

Отнесем к классу $L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ $(k=1, 2)$ семейство всех функций $f(x)$, σ_k-измеримых на интервале (a_k, b_k), для которых

$$\int_{a_k}^{b_k} |f(x)|^2 d\sigma_k(x) < +\infty, \tag{1.1}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса.

Для пары функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из класса $L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ $(k=1, 2)$ определим скалярное произведение

$$(f_1, f_2)_{\sigma_k} = \int_{a_k}^{b_k} f_1(x)\overline{f_2(x)}\, d\sigma_k(x) \tag{1.2}$$

и норму $\|f\|_{\sigma_k}$ элемента $f \in L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ как

$$\|f\|_{\sigma_k} = (f, f)^{\frac{1}{2}}_{\sigma_k}. \tag{1.3}$$

Известно, что множество функций $L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ с принятым нами определением скалярного произведения представляет собой полное сепарабельное гильбертово пространство, если только $\sigma_k(x)$ не сводится к кусочно-постоянной на (a_k, b_k) функции с конечным числом скачков *.

В дальнейшем пространства $L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ $(k=1, 2)$ будем обозначать также через H_k.

Пусть оператор V_1, определенный на всем пространстве H_1, отображает его на все пространство H_2 изометрически, т. е. для любой пары функций f_1 и f_2 из H_1 имеет место равенство

$$(V_1 f_1, V_1 f_2)_{\sigma_2} = (f_1, f_2)_{\sigma_1}. \tag{1.4}$$

* В последнем случае пространство $L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ изоморфно комплексному эвклидову пространству размерности, равной числу скачков функции $\sigma_k(x)$. Очевидным следствием этого является то обстоятельство, что два пространства $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ могут быть неизоморфными лишь в том случае, когда одна из функций $\sigma_k(x)$ кусочно-постоянна и имеет конечное число скачков, а другая либо не обладает этим свойством, либо имеет отличное от первой число скачков.

Как известно, любой изометрический оператор V_1 имеет обратный $V_1^{-1} = V_2$, изометрически отображающий все пространство H_2 на все пространство H_1, т. е. так, что для любой пары функций g_1 и g_2 из H_2 имеет место равенство

$$(V_2 g_1, V_2 g_2)_{\sigma_1} = (g_1, g_2)_{\sigma_2}. \tag{1.4'}$$

Обозначив через $I_k (k = 1, 2)$ единичный оператор в пространстве H_k, очевидно, имеем:

$$V_1 V_2 = I_2, \quad V_2 V_1 = I_1. \tag{1.5}$$

Наконец, отметим, что любой изометрический оператор V_1, а также обратный ему оператор V_2 линейны.

Пусть определенный в пространстве H_1 линейный оператор R_1 отображает все пространство H_1 на все пространство H_2. Условимся говорить, что R_1 является квазиизометрическим оператором порядка $\theta\,(0 < \theta < 1)$ или, что $R_1 \in K_\theta$, если для любого элемента $f \in H_1$

$$(1 - \theta) \| f \|_{\sigma_1} \leqslant \| R_1 f \|_{\sigma_2} \leqslant (1 + \theta) \| f \|_{\sigma_1}. \tag{1.6}$$

Отсюда вытекает, что обратный к R_1 линейный оператор R_2, который, очевидно, существует и отображает все пространство H_2 на все пространство H_1, является квазиизометрическим оператором порядка $\frac{\theta}{1-\theta}$, т. е. что $R_2 \in K_{\frac{\theta}{1-\theta}}$. Действительно, из (1.6) следует, что для любого элемента $g \in H_2$

$$(1 + \theta)^{-1} \| g \|_{\sigma_2} \leqslant \| R_2 g \|_{\sigma_1} \leqslant (1 - \theta)^{-1} \| g \|_{\sigma_2}. \tag{1.6'}$$

Ради простоты изложения в дальнейшем будем считать, что начало координат — внутренняя точка для обоих интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, 2)$.

Обозначим через $\dot{H}_k\,(k = 1, 2)$ множество всех комплексных конечнозначных ступенчатых функций, непрерывных справа на (a_k, b_k) и равных нулю вне некоторого интервала, лежащего в (a_k, b_k). Очевидно, что $\dot{H}_k \subset H_k\,(k = 1, 2)$ и что множество $\dot{H}_k$ всюду плотно в H_k в силу самого определения понятия интеграла Лебега — Стильтьеса с непрерывной справа функцией распределения $\sigma_k(x)$.

Определим функцию $e_\zeta(x)$, зависящую от параметра $\zeta \neq 0$ следующим образом:

$$e_\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \zeta), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [0, \zeta) \end{cases} \quad \zeta > 0; \qquad e_\zeta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [\zeta, 0), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [\zeta, 0) \end{cases} \quad \zeta < 0. \tag{1.7}$$

В силу того, что $0 \in (a_k, b_k)$ $(k = 1, 2)$, при любом $\zeta \neq 0$

$$e_\zeta(x) \in H_k \quad (k = 1, 2). \tag{1.8}$$

Кроме того, произвольную функцию из $\dot{H}_k\,(k = 1, 2)$ можно *единственным образом* представить как конечную линейную комбинацию функций вида $e_\zeta(x)$ для $\zeta \in (a_k, b_k)$.

Поэтому линейная оболочка функций $e_\zeta(x)$ при $\zeta \in (a_k, b_k)$ плотна в пространстве $H_k (k = 1, 2)$.

2°. В случае, когда $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $\sigma_1(x) \equiv \sigma_2(x) \equiv \sigma(x)$, пространства H_1 и H_2 совпадают с пространством $H = L^2_\sigma(a, b)$; в этом случае оператор $V = V_1$ осуществляет унитарное отображение пространства H на самого себя.

В частности, когда $\sigma(x) \equiv x$ и, таким образом, пространство H совпадает с семейством функций, интегрируемых в квадрате модуля на (a, b), т. е. с пространством $L^2(a, b)$, унитарные операторы V, взаимно однозначно отображающие пространство $L^2(a, b)$ на самого себя, были аналитически охарактеризованы Бохнером (1), (2).

Для построения квазиизометрических отображений пространств $H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ друг на друга нам необходимо иметь аналитическую характеристику операторов, осуществляющих изометрическое отображение указанных пространств.

Прежде чем привести соответствующий результат, отметим два частных примера изометрических отображений, аналитическую характеристику которых можно легко получить простыми рассуждениями.

i) Рассмотрим гильбертово пространство функций $H_1 = L^2(a, b)$ и координатное гильбертово пространство l^2, которое, очевидно, можно отождествить с пространством функций $H_2 = L^2_{[x]}(0, +\infty)$.

Заметим, что если на (a, b) задана полная ортонормальная система $\{k_n(x)\}$, то, в силу теоремы Рисса — Фишера и обобщенного равенства Парсеваля для рядов Фурье по $\{K_n(x)\}$, можно считать, что задан некоторый оператор V_1 и обратный ему оператор V_2, осуществляющие изометрическое отображение пространств H_1 и H_2.

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} K(\zeta, x) &= \int_0^\infty k_u(x) e_\zeta(u)\, d[u], \quad x \in (a, b), \qquad \zeta \in (0, +\infty), \\ H(\zeta, x) &= \int_a^b \overline{k_x(u)} e_\zeta(u)\, du, \quad x \in (1, 2, \ldots), \quad \zeta \in (a, b). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Заметим, что

$$K(\zeta, x) = \begin{cases} 0, & \zeta \in (0, 1] \\ \sum_{i=1}^{n} k_i(x), & \zeta \in (n, n+1] \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{1.9'}$$

Что касается функции $H(\zeta, x)$, то она определена лишь при $x \in (1, 2, \ldots)$, но мы доопределим ее для всех $x \in (0, +\infty)$, полагая

$$H(\zeta, x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, 1) \\ H(\zeta, n), & n < x < n+1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.9''}$$

Легко видеть, что при имеющемся изометрическом отображении переход от элемента $f(x) \in H_1$ к элементу $g(x) = V_1 f(x) \in H_2$ и обратно

осуществляется соответственно посредством формул

$$\int_0^{\infty} g(x)\, e_{\zeta}(x)\, d[x] = \int_a^b \overline{K(\zeta,\ x)}\, f(x)\, dx, \quad \zeta \in (0,\ +\infty),$$

$$\int_a^b f(x)\, e_{\zeta}(x)\, dx = \int_0^{\zeta} f(x)\, dx\ {}^{*} = \int_0^{\infty} \overline{H(\zeta,\ x)}\, g(x)\, d[x], \quad \zeta \in (a,\ b). \tag{1.10}$$

Что касается свойств ядер $K(\zeta,\ x)$ и $H(\zeta,\ x)$, аналогичных соот-ветствующим свойствам ядер в теореме Бохнера, то при помощи простых рассуждений заключаем, что справедливы следующие уравне-ния:

а) $\displaystyle\int_0^b \overline{K(\zeta,\ x)}\, K(\eta,\ x)\, dx = \int_0^{\infty} e_{\zeta}(x)\, e_{\eta}(x)\, d[x], \quad \zeta,\ \eta \in (0,\ +\infty),$

б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \overline{H(\zeta,\ x)}\, H(\eta,\ x)\, d[x] = \int_a^b e_{\zeta}(x)\, e_{\eta}(x)\, dx =$

$$= \begin{cases} \min(|\zeta|,\ |\eta|), & \zeta\eta > 0, \\ 0, & \zeta\eta < 0, \quad \zeta,\ \eta \in (a,\ b), \end{cases}$$

в) $\displaystyle\int_a^b K(\zeta,\ x)\, e_{\eta}(x)\, dx = \int_0^{\infty} \overline{H(\eta,\ x)}\, e_{\zeta}(x)\, d[x], \quad \zeta \in (0,\ +\infty), \quad \eta \in (a,\ b).$

Пусть V_1 — произвольный изометрический оператор, отображающий $H_1 = L^2(a,\ b)$ на все пространство $H_2 = L^2_{[x]}(0,\ +\infty)$, и $V_2 = V_1^{-1}$ — оператор, ему обратный.

Элементы

$$x_n = \{0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots\} \in l_2 = H_2 \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

составляют полную ортонормальную систему в H_2. Поэтому из изомет-ричности оператора V_2 следует, что последовательность функций

$$k_n(x) = V_2 x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ортонормальна и полна в H_1. Следовательно, если при помощи системы $\{K_n(x)\}$, согласно формулам (1.9), ввести в рассмотрение ядра $K(\zeta,\ x)$ и $H(\zeta,\ x)$, то мы приходим к выводу, что операторы V_1 и V_2 аналити-чески запишутся посредством формул (1.10).

Докажем теперь обратное утверждение, а именно, что всякая пара функций $K(\zeta,\ x)$ и $H(\zeta,\ x)$, удовлетворяющая уравнениям а), б) и в), порождает некоторую полную в $L^2(a,\ b)$ ортонормальную систему $\{K_n(x)\}$, изометрически отображающую согласно формулам (1.10) все пространство $H_1 = L^2(a,\ b)$ на все пространство $H_2 = L^2_{[x]}(0,\ +\infty)$. При этом функции $K(\zeta,\ x)$ и $H(\zeta,\ x)$ запишутся через порожденную ими систему $\{K_n(x)\}$ посредством формул (1.9).

---

* В случае, когда $0 \in (a,\ b)$.

Действительно, из уравнения а), в частности, имеем:

$$\int_a^b \overline{K(n+1,\ x)}K(m+1,\ x)\,dx = m, \quad n \geqslant m \quad (n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.11}$$

Обозначим

$$k_1(x) = K(2,\ x),$$
$$k_n(x) = K(n+1,\ x) - K(n,\ x), \quad n \geqslant 2; \tag{1.12}$$

тогда, очевидно, для функции $K(\zeta,\ x)$ получим представление (1.9).

Из (1.11) и (1.12) следует:

$$\int_a^b \overline{k_n(x)}\,K(m+1,\ x)\,dx = 0, \quad n \geqslant m+1 \quad (n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots),$$

откуда получим также, что

$$\int_a^b \overline{k_n(x)}\;k_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m \quad (n,\ m = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.13}$$

Далее, из (1.11), (1.9′) и (1.13) вытекает:

$$\int_a^b |K(n+1,\ x)|^2\,dx = \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n k_i(x)\right|^2 dx =$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_a^b |k_i(x)|^2\,dx = n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Это равенство вместе с (1.13) показывает, что система функций $\{K_n(x)\}$ ортонормальна на $(a,\ b)$.

Подставим значение $K(\eta,\ x)$ из (1.9) в уравнение в), предварительно поменяв в нем местами ζ и η. Тогда получим:

$$\int_0^\infty e_\eta(x)\left[\overline{H(\zeta,\ x)} - \int_a^b k_x(u)\,e_\zeta(u)\,du\right]d[x] = 0, \quad \zeta \in (a,\ b), \quad \eta \in (0,\ +\infty),$$

откуда следует представление (1.9) функции $H(\zeta,\ x)$.

Но функция

$$H(\zeta,\ x) = (e_\zeta,\ \ k_x)$$

удовлетворяет уравнению б), которое при $\eta=\zeta$, очевидно, запишется в виде

$$\sum_{n=1}^\infty |(e_\zeta,\ \ k_n)|^2 = \int_a^b e_\zeta^2(x)\,dx, \quad \zeta \in (a,\ b).$$

Это значит, что система $\{k_n(x)\}$ полна на $(a,\ b)$ в множестве H_1. В силу плотности в H_1 многообразия $\dot{H}_1$, это равенство, очевидно, означает, что ортонормальная система $\{k_n(x)\}$ полна в H_1. Отсюда, как уже было установлено в начале этого примера, следует, что система $\{k_n(x)\}$, т. е. ядра $K(\zeta,\ x)$ и $H(\zeta,\ x)$, порождает некоторый изометрический оператор V_1, отображающий H_1 на H_2 согласно формулам (1.10).

ii) Пусть

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

— сингулярный дифференциальный оператор на полуоси $[0, +\infty)$, определяемый краевым условием вида

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \quad (\operatorname{Im}\alpha = 0).$$

Как хорошо известно [см. ([3])], если $q(x)$ — вещественная непрерывная функция на полуоси $[0, +\infty)$, то оператор l порождает определенный изометрический оператор V_1 и обратный ему оператор V_2, отображающие друг на друга пространства

$$H_1 = L^2(0, +\infty), \quad H_2 = L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty, +\infty),$$

где $\rho(\lambda)$ — так называемая спектральная функция оператора l.

Заметим, что если $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения $ly = \lambda y$ при начальном условии

$$\varphi(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi'_x(0, \lambda) = -\cos\alpha,$$

то если для данного $f(x) \in H_2$ $F(\lambda) = V_1 f(x)$, то

$$\lim_{R\to\infty} \left\| F(\lambda) - \int_0^R \varphi(x, \lambda) f(x)\, dx \right\|_{\rho(\lambda)} = 0 \tag{1.14}$$

и, наоборот, если для данного $F(\lambda) \in H_2$ $f(x) = V_2 F(\lambda)$, то

$$\lim_{R\to\infty} \left\| f(x) - \int_{-R}^R \varphi(x, \lambda) F(\lambda)\, d\rho(\lambda) \right\| = 0. \tag{1.15}$$

Далее, если $f_1(x),\ f_2(x) \in H_1$ и $F_k(\lambda) = V_1 f_k(x)$ $(k = 1, 2)$, то

$$(f_1, f_2) = (F_1, F_2)_{\rho(\lambda)}. \tag{1.16}$$

Из формул (1.14), (1.15) и (1.16) при помощи простых рассуждений можно заключить, что если ввести в рассмотрение функции

$$\begin{gathered} K(\zeta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \lambda) e_\zeta(\lambda)\, d\rho(\lambda), \\ H(\zeta, x) = \int_0^\infty \varphi(x, \lambda) e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\zeta \varphi(x, \lambda)\, dx, \end{gathered} \tag{1.17}$$

то соответствие между пространствами H_1 и H_2 будет осуществляться формулами *

$$\begin{gathered} \int_0^\infty f(x) e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\zeta f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\zeta, \lambda) F(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad \zeta \in (0, +\infty), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e_\zeta(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^\infty K(\zeta, x) f(x)\, dx, \quad \zeta \in (-\infty, +\infty). \end{gathered} \tag{1.18}$$

* В данной задаче ядра $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$ вещественны.

Наконец, из формул (1.18) легко следует, что ядра $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\text{а)} \int_0^\infty K(\zeta, x) K(\eta, x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e_\zeta(\lambda) e_\eta(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad \zeta, \eta \in (-\infty, +\infty),$$

$$\text{б)} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\zeta, \lambda) H(\eta, \lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_0^\infty e_\zeta(x) e_\eta(x)\, dx = \min(\zeta, \eta), \ \zeta, \eta \in (0, +\infty),$$

$$\text{в)} \int_0^\infty K(\zeta, x) e_\eta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\eta, \lambda) e_\zeta(\lambda) d\rho(\lambda), \ \zeta \in (-\infty, +\infty), \eta \in (0, +\infty),$$

вполне аналогичным уравнениям а), б) и в) примера i).

Утверждение о том, что для любой неубывающей на $(-\infty, +\infty)$ функции $\rho(\lambda)$, не имеющей лишь конечного числа точек роста, выполнение уравнений а), б) и в) для некоторых функций $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$ обеспечивает существование изометрического оператора V_1, отображающего H_1 на H_2 согласно формулам (1.18), справедливо и следует из второй части теоремы А, приводимой ниже.

Вопрос о том, при каких $\rho(\lambda)$ ядра $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$ определяются формулами вида (1.17), где $\varphi(x, \lambda)$ есть решение задачи

$$l\varphi = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} + q(x)\varphi = \lambda\varphi,$$

$$\varphi(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi'_x(0, \lambda) = -\cos\alpha,$$

для единственной непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $q(x)$, очевидно, эквивалентен ставшей уже классической задаче В. А. Амбарцумяна, т. е. так называемой обратной задаче Штурма — Лиувилля, и, как известно, для своего решения требует привлечения более тонкого аппарата.

3°. Приведем в обобщенной формулировке теорему Бохнера об аналитической характеристике изометрических операторов, отображающих пространства $H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ друг на друга.

Доказательство теоремы мы опускаем ввиду того, что оно фактически ничем не отличается от весьма простого по идее доказательства теоремы Бохнера в классической формулировке, если только опираться на приведенное в п. 1° замечание о полноте в пространствах H_1 или H_2 множества линейных комбинаций от функций $\{e_\zeta(x)\}$.

ТЕОРЕМА А. *Любому изометрическому оператору* $g(x) = V_1 f(x)$, *отображающему все пространство* H_1 *на все пространство* H_2, *соответствуют две функции*

$$K(\zeta, x) = V_2 e_\zeta(x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2),$$

$$H(\zeta, x) = V_1 e_\zeta(x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1), \tag{1.19}$$

бладающие тем свойством, что

$$\int_{a_2}^{b_2} g(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\zeta, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \zeta \in (a_2, b_2), \tag{1.20}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\zeta, x)}\, g(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_1, b_1). \tag{1.21}$$

Кроме того, функции $K(\zeta, x)$ *и* $H(\zeta, x)$ *удовлетворяют уравнениям:*

а) $$\int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\zeta, x)}\, K(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta, \eta \in (a_2, b_2),$$

б) $$\int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\zeta, x)}\, H(\eta, x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x), \quad \zeta, \eta \in (a_1, b_1),$$

в) $$\int_{a_1}^{b_1} K(\zeta, x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\eta, x)}\, e_\zeta(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_2, b_2),\ \eta \in (a_1, b_1).$$

Обратно, всякая пара функций $K(\zeta, x)$ *и* $H(\zeta, x)$, *обладающая свой-ствами* а), б) *и* в), *порождает, согласно формулам* (1.20) *и* (1.21), *неко-торый изометрический оператор* V_1, *отображающий все пространство* H_1 *на все пространство* H_2, *и оператор* V_2, *ему обратный, осуществля-ющий обратное отображение. При этом, как и в случае прямой части теоремы, функции* $K(\zeta, x)$ *и* $H(\zeta, x)$ *и порожденные ими операторы* V_1 *и* V_2 *связаны формулами* (1.19).

Как легко видеть, приведенные в п. 2° два примера аналитической характеристики частного вида изометрических отображений пространств типа H_1 и H_2 укладываются в общую схему утверждений теоремы А.

§ 2. Теорема Палея и Винера и ее эквивалентная формулировка

1°. Пусть последовательности $\{k_n\}$ и $\{h_n\}$ элементов гильбертова пространства H образуют нормированную биортогональную систему, т. е.

$$(k_n, h_m) = 0 \quad \text{при } n \neq m, \quad (k_n, h_n) = 1.$$

Если обе системы $\{k_n\}$ и $\{h_n\}$ полны в H, то имеют место биортогональные разложения

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, h_n)\, k_n, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, k_n)\, h_n, \quad f \in H,$$

в предположении, что ряды справа сходятся в метрике пространства H.

В частности, если $h_n = k_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\{k_n\}$ будет ортонормальной системой, и если она полна, то разложение

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, k_n)\, k_n$$

справедливо для любого элемента $f \in H$.

Известна следующая теорема Палея и Винера.

ТЕОРЕМА Б. *Пусть последовательность* $\{\widetilde{k}_n\} \in H$ *мало отличается от некоторой полной в* H *ортонормальной последовательности* $\{k_n\} \in H$ *в том смысле, что существует постоянная* θ, $0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} g_i (k_i - \widetilde{k}_i) \right\| \leqslant \theta^2 \sum_{i=1}^{n} |g_i|^2, \tag{2.1}$$

какова бы ни была система комплексных чисел $\{g_i\}$. *Тогда существует последовательность* $\{\widetilde{h}_n\} \in H$, *образующая вместе с* $\{\widetilde{k}_n\}$ *полную биортогональную систему; для любого элемента* $f \in H$ *имеют место биортогональные разложения*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{h}_n) \widetilde{k}_n, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n) \widetilde{h}_n, \tag{2.2}$$

причем

$$(1+\theta)^{-1} \|f\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| (f, \widetilde{h}_n) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1-\theta)^{-1} \|f\|,$$

$$(1-\theta) \|f\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (1+\theta) \|f\|. \tag{2.3}$$

Впервые эта теорема была установлена в книге (4) для случая гильбертова пространства функций $L^2(a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$; в приведенной здесь формулировке изящное ее доказательство было впоследствии предложено С. Надем (5) [см. также (2), стр. 225—226].

2°. Чтобы основная теорема этой работы — теорема 2, которую мы приведем в § 3, выглядела как совершенно естественное распространение теоремы Палея и Винера на пространства типа $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$, покажем, что следующая теорема эквивалентна теореме Б в случае, когда $H = L^2(a, b)$.

Определим подмножество $\ddot{H}_2$ пространства $H_2 = L^2_{[x]}(0, +\infty)$ как линейное многообразие комплексных конечнозначных ступенчатых функций, непрерывных справа на $(0, +\infty)$, равных нулю вне интервалов вида $[1, n)$ $(n \geqslant 1)$ и таких, все точки роста которых принадлежат совокупности $(0, +\infty)_{[x]} = (1, 2, 3, \ldots)$. Очевидно, что $\ddot{H}_2$ плотно в H_2.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции* $K(\zeta, x)$ *и* $H(\zeta, x)$ *удовлетворяют уравнениям* а), б), в) *теоремы* А *для частного случая, когда* $a_1 = a$, $b_1 = b$, $\sigma_1(x) = x$, $a_2 = 0$, $b_2 = +\infty$, $\sigma_2(x) = [x]$, *порождая таким образом некоторый изометрический оператор* V_1 (*и обратный ему оператор* $V_2 = V_1^{-1}$), *отображающий все пространство* $H_1 = L^2(a, b)$ *на все пространство* $H_2 = L^2_{[x]}(0, +\infty)$.

Пусть функция $\widetilde{K}(\zeta, x) \in H_1$, $\zeta \in (0, +\infty)$, *обладает свойством: существует постоянная* θ, $0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$\int_a^b \left| \int_0^n [K(y, x) - \widetilde{K}(y, x)]\, dg(y) \right|^2 dx \leqslant \theta^2 \int_0^n |g(y)|^2 d[y], \quad n \geqslant 1, \tag{2.4}$$

для произвольной функции $g(y) \in \ddot{H}_2$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Существуют функции*

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) \in H_1, \quad \zeta \in (0, +\infty),$$
$$\widetilde{H}(\zeta, x) \in H_2, \quad \widetilde{H}_*(\zeta, x) \in H_2, \quad \zeta \in (a, b), \tag{2.5}$$

для которых удовлетворяются уравнения:

$$\int_a^b \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, dx = \int_0^\infty e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d[x], \quad \zeta, \eta \in (0, +\infty), \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)\, \widetilde{H}_*}(\eta, x)\, d[x] = \int_a^b e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, dx =$$
$$= \begin{cases} \min(|\zeta|, |\eta|), & \zeta\eta > 0, \\ 0, & \zeta\eta < 0, \end{cases} \quad \zeta, \eta \in (a, b), \tag{2.7}$$

$$\int \widetilde{K}(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)}\, e_\eta(x)\, d[x], \quad \zeta \in (a, b), \quad \eta \in (0, +\infty), \tag{2.8}$$

$$\int \widetilde{K}_*(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, e_\eta(x)\, d[x], \quad \zeta \in (a, b), \quad \eta \in (0, +\infty). \tag{2.9}$$

2) *Пары ядер* $\widetilde{K}(\zeta, x)$, $\widetilde{H}(\zeta, x)$ *и* $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$ *определяют соответственно два линейных оператора* R_1 *и* R_{*1}, *отображающих все пространство* H_1 *на все пространство* H_2 *согласно формулам**

$$\int_0^\infty g(x)\, e_\zeta(x)\, d[x] = \int_a^b \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, f(x)\, dx, \quad \zeta \in (0, +\infty), \tag{2.10}$$

$$\int_a^b f(x)\, e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\zeta f(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{H(\zeta, x)}\, g(x)\, d[x], \quad \zeta \in (a, b), \tag{2.11}$$

если для $f \in H_1$ $g = R_{*1} f$ *или, обратно, если для* $g \in H_2$ $f = R_2 g$, *и согласно формулам*

$$\int_0^\infty g(x)\, e_\zeta(x)\, d[x] = \int_a^b \overline{\widetilde{K}_*(\zeta, x)}\, f(x)\, dx, \quad \zeta \in (0, +\infty), \tag{2.12}$$

$$\int_a^b f(x)\, e_\zeta(x)\, dx = \int_0^\zeta f(x)\, dx = \int_0^\infty \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)}\, g(x)\, d[x], \quad \zeta \in (a, b), \tag{2.13}$$

если для $f \in H_1$ $g = R_{*1} f$ *или, обратно, если для* $g \in H_2$ $f = R_{*2} g$.

Здесь R_2 *и* R_{*2} — *соответственно обратные к* R_1 *и* R_{*1} *операторы.*

3) *Операторы* R_1 *и* R_{*1} *квазиизометричны, причем* $R_1 \in K_\theta$ *и* $R_{*1} \in K_{\frac{\theta}{1-\theta}}$; *иначе говоря, при представлении элемента* $f \in H_1$ *формулами* (2.10), (2.11) *имеем:*

$$(1-\theta)\|f\| \leqslant \|R_1 f\|_{[x]} = \|g\|_{[x]} \leqslant (1+\theta)\|f\|, \tag{2.14}$$

* Полагаем, что $0 \in (a, b)$.

а при представлении элемента $f \in H_1$ *формулами* (2.12), (2.13) *имеем:*

$$(1+\theta)^{-1}\|f\| \leqslant \|R_{*1}f\|_{[x]} = \|g\|_{[x]} \leqslant (1-\theta)^{-1}\|f\|. \tag{2.15}$$

Доказательство. Если мы установим, что все условия и утверждения этой теоремы эквивалентны соответствующим условиям и утверждениям теоремы Б в случае, когда $H = L^2(a, b)$, то, очевидно, теорема 1 будет доказана.

То, что задание полной в $L^2(a, b)$ ортонормальной системы $\{K_n(x)\}$ эквивалентно заданию ядер $K(\zeta, x)$ и $H(\zeta, x)$, удовлетворяющих уравнениям а), б) и в) из примера i) § 1 и осуществляющих изометрическое отображение пространств H_1 и H_2 согласно формулам (1.10), было полностью выяснено нами на том же примере.

Установим теперь эквивалентность условий близости теоремы Б и теоремы 1, т. е. условий (2.1) и (2.4).

Пусть для функций $K(\zeta, x)$ и $\widetilde{K}(\zeta, x)$ выполняется условие близости (2.4). Обозначив

$$\widetilde{k}_1(x) = \widetilde{K}(2, x),$$
$$\widetilde{k}_n(x) = \widetilde{K}(n+1, x) - \widetilde{K}(n, x), \quad n \geqslant 2, \tag{2.16}$$

имеем:

$$\widetilde{K}(\zeta, x) = \int_0^\infty \widetilde{k}_u(x) e_\zeta(u)\, d[u], \quad \zeta \in (0, +\infty), \quad x \in (a, b); \tag{2.17}$$

при этом, как легко видеть,

$$\widetilde{K}(\zeta, x) = \begin{cases} 0, & \zeta \in (0, 1], \\ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{k}_i(x), & \zeta \in (n, n+1] \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{2.17'}$$

Пусть $g(y)$ — произвольная функция из класса $\ddot{H}_2$, обращающаяся в нуль вне $[1, n)$ $(n \geqslant 2)$. Тогда, заметив, что

$$g(y) = g(i), \quad i \leqslant y < i+1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$g(n) = 0, \tag{2.18}$$

и имея в виду формулы (1.9′) и (2.17′), получим:

$$\int_0^n |g(y)|^2 d[y] = \sum_{i=1}^{n-1} |g(i)|^2, \tag{2.19}$$

$$\int_0^n K(y, x)\, dg(y) = -\sum_{i=1}^{n-1} g(i)\, k_i(x),$$
$$\int_0^n \widetilde{K}(y, x)\, dg(y) = -\sum_{i=1}^{n-1} g(i)\, \widetilde{k}_i(x). \tag{2.20}$$

Обратно, полагая, что $\{g(i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — произвольные комплексные числа, и определив функцию $g(y) \in \ddot{H}_2$ согласно (2.18), мы при-

одим к формулам вида (2.19), (2.20). Сказанное означает, что условия 2.1) и (2.4) эквивалентны. Переходим теперь к установлению эквиваентности утверждений теоремы Б и теоремы 1.

Если существует последовательность $\{\widetilde{h}_n(x)\} \in H_1$, образующая вместе последовательностью $\{\widetilde{k}_n(x)\} \in H_1$ биортогональную систему, то, обоначив

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) = \int_0^\infty \widetilde{h}_u(x) e_\zeta(u)\, d[u], \quad \zeta \in (0, +\infty), \quad x \in (a, b), \tag{2.21}$$

чевидно, будем иметь:

$$\int_a^b |\widetilde{K}_*(\zeta, x)|^2 dx = \int_a^b \left| \int_0^\infty \widetilde{h}_u(x) e_\zeta(u)\, d[u] \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \zeta \int_a^b dx \int_0^\infty |\widetilde{h}_u(x)|^2 |e_\zeta(u)|\, d[u] \leqslant \zeta \sum_{i=1}^{[\zeta]} \|\widetilde{h}_i\|^2 < +\infty, \quad \zeta \in (0, +\infty),$$

. е. мы получили первое из утверждений (2.5).

Далее, из (2.17) и (2.21) следует, что если $\zeta \in (n, n+1]$, $\eta \in (m, m+1]$, о

$$\int_a^b \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_a^b \widetilde{k}_i(x)\, \widetilde{h}_j(x)\, dx =$$

$$= \min(n, m) = \int_0^\infty e_\zeta(x) e_\eta(x)\, d[x]$$

ля всех $\zeta, \eta \in (0, +\infty)$, что означает уравнение (2.6) теоремы 1.

Обратно, если функция $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$ совместно с $\widetilde{K}(\zeta, x)$ удовлетворяет уравнению (2.6), то, обозначив

$$\begin{gathered} \widetilde{h}_1(x) = \widetilde{K}_*(2, x), \\ \widetilde{h}_n(x) = \widetilde{K}_*(n+1, x) - \widetilde{K}_*(n, x), \quad n \geqslant 2, \end{gathered} \tag{2.22}$$

. е.

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) = \int_0^\infty \widetilde{h}_u(x) e_\zeta(u)\, d[u], \quad \zeta \in (0, +\infty), \quad x \in (a, b), \tag{2.23}$$

дновременно имеем:

$$\int_a^b \overline{\widetilde{K}(n+1, x)}\, \widetilde{K}_*(m+1, x)\, dx = m, \quad n \geqslant m \quad (n, m = 1, 2, \ldots).$$

тсюда, аналогично тому, что было уже сделано в примере i) § 1, заключаем, что системы функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{h}_n(x)\}$, порожденные ядрами $\widetilde{K}(\zeta, x)$ и $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$ при помощи формул (2.16) и (2.22), биортогональны а (a, b).

Имея биортогональные системы функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{h}_n(x)\}$ из теоремы Б, введем в рассмотрение функции ($\zeta \in (a, b)$, $x \in (0, +\infty)$)

$$\begin{gathered} \widetilde{H}(\zeta, x) = \int_a^b \widetilde{h}_x(u)\, e_\zeta(u)\, du, \\ \widetilde{H}_*(\zeta, x) = \int_a^b \widetilde{K}_x(u)\, e_\zeta(u)\, du. \end{gathered} \tag{2.24}$$

Ввиду оценок (2.3) той же теоремы

$$\int_0^\infty |\widetilde{H}(\zeta, x)|^2 d[x] = \sum_{n=1}^\infty |(e_\zeta, \widetilde{h}_n)|^2 \leqslant (1-\theta)^{-2}|\zeta|,$$

$$\zeta \in (a, b)$$

$$\int_0^\infty |\widetilde{H}_*(\zeta, x)|^2 d[x] = \sum_{n=1}^\infty |e_\zeta, \widetilde{K}_n)|^2 \leqslant (1+\theta)^2 |\zeta|$$

т. е. эти функции удовлетворяют условию (2.5). То, что полученны из систем $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{h}_n(x)\}$ функции $\widetilde{K}(\zeta, x)$, $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$ и $\widetilde{H}(\zeta, x)$ удовлетворяют уравнениям (2.8) и (2.9), непосредственно вытекает из их определений (2.17), (2.21) и (2.24).

Далее, из (2.24) имеем:

$$\int_0^\infty \widetilde{H}_*(\zeta, x) H(\eta, x) d[x] = \sum_{n=1}^\infty \overline{(e_\zeta, \widetilde{h}_n)}(e_\eta, \widetilde{k}_n). \tag{2.25}$$

Но при любых $\zeta, \eta \in (a, b)$, согласно теореме Б, справедливы сходящиеся в метрике H_1 разложения

$$e_\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty (e_\zeta, \widetilde{h}_n)\widetilde{k}_n(x), \quad e_\eta(x) = \sum_{n=1}^\infty (e_\eta, \widetilde{k}_n)\widetilde{h}_n(x),$$

следовательно, и равенство типа Парсеваля:

$$\int_a^b e_\zeta(x) e_\eta(x) dx = \sum_{n=1}^\infty \overline{(e_\zeta, \widetilde{h}_n)}(e_\eta, \widetilde{k}_n).$$

Отсюда и из (2.25) вытекает уравнение (2.7). Что касается утверждени 2) теоремы 1, то их эквивалентность с утверждениями теоремы Б о справедливости разложений (2.2) легко следует из введенных нами обозначений (2.16), (2.17), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24).

Наконец, эквивалентность утверждения 3) теоремы 1 и оценок (2.3) теоремы Б просто очевидна.

§ 3. Построение квазиизометрических отображений в пространствах $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$

1°. Мы переходим к изложению главного результата работы — построению квазиизометрических отображений в общих гильбертовых пространствах типа

$$H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1), \quad H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$$

при помощи ядер, в определенном смысле близких к ядрам, осуществляющим изометрическое отображение тех же пространств.

Обозначим через H_2^* множество всех комплексных функций ограниченной вариации, непрерывных справа на (a_2, b_2), каждая из которых равна нулю вне некоторого замкнутого слева интервала $[\alpha, \beta) \in (a_2, b_2)$.

Очевидно, что

$$\dot{H}_2 \subset H_2^* \subset H_2,$$

и поэтому множество H_2^* плотно в пространстве H_2.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции*

$$K(\zeta, x) \in H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1), \quad \zeta \in (a_2, b_2),$$
$$H(\zeta, x) \in H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2), \quad \zeta \in (a_1, b_1), \tag{3.1}$$

удовлетворяют уравнениям а), б), в) *теоремы* А, *порождая таким образом некоторый изометрический оператор* V_1 (*и обратный ему оператор* $V_2 = V_1^{-1}$), *отображающий все пространство* H_1 *на все пространство* H_2, *причем аналитическое осуществление этого отображения дается формулами* (1.20) *и* (1.21) *теоремы* А. *Пусть функция*

$$\widetilde{K}(\zeta, x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2), \tag{3.2}$$

обладает свойством: существует постоянная θ, $0 < \theta < 1$, *такая, что*

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{a_2}^{b_2} \{K(y, x) - \widetilde{K}(y, x)\}\, dg(y) \right|^2 d\sigma_1(x) \leqslant \theta^2 \int_{a_2}^{b_2} |g(y)|^2\, d\sigma_2(y) \tag{3.3}$$

для произвольной функции $g(y)$ *из множества* H_2^*. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *Существуют функции*

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2),$$
$$\widetilde{H}(\zeta, x) \in H_2, \quad \widetilde{H}_*(\zeta, x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1), \tag{3.4}$$

для которых удовлетворяются уравнения:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta, \eta \in (a_2, b_2), \tag{3.5}$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, \widetilde{H}_*(\eta, x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x), \quad \zeta, \eta \in (a_1, b_1), \tag{3.6}$$

$$\widetilde{K}(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)}\, e_\eta(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_1, b_1), \quad \eta \in (a_2, b_2), \tag{3.7}$$

$$\widetilde{K}_*(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, e_\eta(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_1, b_1), \quad \eta \in (a_2, b_2). \tag{3.8}$$

2) *Пары ядер* $\widetilde{K}(\zeta, x)$, $\widetilde{H}(\zeta, x)$ *и* $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$ *определяют соответственно два линейных оператора* R_1 *и* R_{*1}, *отображающих все пространство* H_1 *на все пространство* H_2 *согласно формулам*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \zeta \in (a_2, b_2), \tag{3.9}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, g(x)\, d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_1, b_1), \tag{3.10}$$

где $g(x) = R_1 f(x)$ *при* $f(x) \in H_1$, *или, что то же самое,* $f(x) = R_2 g(x)$ *при* $g(x) \in H_2$, *и согласно формулам*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(x) e_\zeta(x) d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\zeta, x)} f(x) d\sigma_1(x), \quad \zeta \in (a_2, b_2), \qquad (3.11)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) e_\zeta(x) d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)} g(x) d\sigma_2(x), \quad \zeta \in (a_1, b_1), \qquad (3.12)$$

где $g(x) = R_{*1} f(x)$ *при* $f(x) \in H_1$, *или, что то же самое,* $f(x) = R_{*2} g(x)$ *при* $g(x) \in H_2$.

Здесь R_2 *и* R_{*2} — *соответственно обратные к* R_1 *и* R_{*1} *операторы.*

3) *Операторы* R_1 *и* R_{*1} *квазиизометричны, причем* $R_1 \in K_\theta$, $R_{*1} \in K_{\frac{\theta}{1-\theta}}$;

иначе говоря, при отображении друг на друга пространств H_1 *и* H_2 *при помощи формул* (3.9)—(3.10) *имеем:*

$$(1-\theta)\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|g\|_{\sigma_2} \leqslant (1+\theta)\|f\|_{\sigma_1} \qquad (3.13)$$

при $g = R_1 f$, $f \in H_1$, *или, что то же самое, при* $f = R_2 g$, $g \in H_2$, *а при отображении пространств* H_1 *и* H_2 *при помощи формул* (3.11)—(3.12) *имеем:*

$$(1+\theta)^{-1}\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|g\|_{\sigma_2} \leqslant (1-\theta)^{-1}\|f\|_{\sigma_1} \qquad (3.14)$$

при $g = R_{*1} f$, $f \in H_1$, *или, что то же самое, при* $f = R_{*2} g$, $g \in H_2$. *Кроме того, для произвольных элементов* f_1 *и* f_2 *из* H_1 *справедливо равенство*

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_1 f_1, R_{*1} f_2)_{\sigma_2} = (R_{*1} f_1, R_1 f_2)_{\sigma_2}. \qquad (3.15)$$

Доказательство. Пусть $H_1^* = V_2 H_2^*$ есть образ многообразия H_2^* в пространстве H_2 при изометрическом отображении $f = V_2 g$, $g \in H_2$. Так как многообразие H_2^* плотно в H_2, то из изометричности оператора V_2, очевидно, вытекает плотность многообразия H_1^* в пространстве H_1.

Пусть функция $f(x) \in H_1^*$ произвольна и $g(x) = V_1 f(x) \in H_2^*$; тогда, обозначив

$$Uf(x) = -\int_{a_2}^{b_2} \{K(y, x) - \widetilde{K}(y, x)\}\, dg(y), \qquad (3.16)$$

в силу условия близости (3.3) и изометричности оператора V_1 получим

$$\int_{a_1}^{b_1} |Uf(x)|^2 d\sigma_1(x) \leqslant \theta^2 \int_{a_2}^{b_2} |g(y)|^2 d\sigma_2(y) = \theta^2 \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|^2 d\sigma_1(x).$$

Иначе говоря, на многообразии H_1^* определен линейный оператор U, переводящий любой элемент $f \in H_1^*$ в элемент $Uf \in H_1$, причем

$$\|Uf\|_{\sigma_1} \leqslant \theta \|f\|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1^*. \qquad (3.17)$$

Заметив, что многообразие H_1^*, на котором определен оператор U, плотно в H_1, легко заключаем, что оператор U можно распространить на все пространство H_1 так, чтобы

$$\|Uf\|_{\sigma_1} \leqslant \theta \|f\|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1. \qquad (3.18)$$

Таким образом,

$$\|U\|_{\sigma_1} = \sup_{f \in H_1} \frac{\|Uf\|_{\sigma_1}}{\|f\|_{\sigma_1}} \leqslant \theta < 1. \tag{3.19}$$

Обозначим через $\Omega f(x)$ сумму ряда

$$\Omega f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U^k f(x), \quad f(x) \in H_1, \tag{3.20}$$

очевидно сильно сходящегося в H_1 в силу оценки $\|U^k\|_{\sigma_1} \leqslant \theta^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Положив

$$T_1 = I_1 - U, \tag{3.21}$$

из (3.20) заключаем, что оператор T_1 имеет обратный, а именно:

$$T_1^{-1} = \Omega. \tag{3.22}$$

Заметим, что согласно второй части теоремы А,

$$\left.\begin{aligned} K(\zeta, x) &= V_2 e_\zeta(x), \\ e_\zeta(x) &= V_1 K(\zeta, x) \end{aligned}\right\} \zeta \in (a_2, b_2) \tag{3.23}$$

и

$$\left.\begin{aligned} H(\zeta, x) &= V_1 e_\zeta(x), \\ e_\zeta(x) &= V_2 H(\zeta, x) \end{aligned}\right\} \zeta \in (a_1, b_1). \tag{3.24}$$

Но $e_\zeta(x) \in H_2^*$, $\zeta \in (a_2, b_2)$, поэтому, ввиду (3.23), значение оператора $UK(\zeta, x)$, $\zeta \in (a_2, b_2)$, можно вычислить посредством формулы (3.16), т. е.

$$UK(\zeta, x) = -\int_{a_2}^{b_2} \{K(y, x) - \widetilde{K}(y, x)\}\, de_\zeta(y), \quad \zeta \in (a_2, b_2),$$

откуда, в силу определения (1.7) функции $e_\zeta(x)$,

$$UK(\zeta, x) = K(\zeta, x) - \widetilde{K}(\zeta, x), \quad \zeta \in (a_2, b_2). \tag{3.25}$$

Следовательно, по (3.21),

$$T_1 K(\zeta, x) = \widetilde{K}(\zeta, x), \quad \zeta \in (a_2, b_2). \tag{3.26}$$

Пусть T_1^* и $(T_1^{-1})^* = (T_1^*)^{-1}$ — соответственно сопряженные с T_1 и T_1^{-1} операторы.

Введем в рассмотрение следующие линейные операторы:

$$\begin{aligned} R_1 &= V_1 T_1^*, \qquad R_{*1} = V_1 T_1^{-1}, \\ R_2 &= (T_1^{-1})^* V_2, \quad R_{*2} = T_1 V_2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Если I_k $(k = 1, 2)$ — единичный оператор пространства H_k, то, очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} R_1 R_2 &= R_{*1} R_{*2} = I_2, \\ R_2 R_1 &= R_{*2} R_{*1} = I_1. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Из (3.28) следует, что оператор R_1 (или R_{*1}) отображает все пространство H_1 на все пространство H_2, а оператор R_2 (или R_{*2}) осуществляет обратное отображение.

Из (3.26), (3.23) и (3.27) следует:

$$\widetilde{K}(\zeta, x) = R_{*2} e_\zeta(x), \quad \zeta \in (a_2, b_2). \tag{3.29}$$

Определим, далее, следующие функции:

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) = R_2 e_\zeta(x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2), \tag{3.30}$$
$$\widetilde{H}(\zeta, x) = R_{*1} e_\zeta(x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1), \tag{3.31}$$
$$\widetilde{H}_*(\zeta, x) = R_1 e_\zeta(x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1). \tag{3.32}$$

Из формул (3.29), (3.30) и (3.27) находим:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\zeta, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{T_1 V_2 e_\zeta(x)}\, (T_1^{-1})^* V_2 e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \overline{V_2 e_\zeta(x)}\, V_2 e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_2(x),$$

т. е. мы получили формулу (3.5).

Из (3.31), (3.32) и (3.27) имеем:

$$\int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, \widetilde{H}_*(\eta, x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{V_1 T_1^{-1} e_\zeta(x)}\, V_1 T_1^* e_\eta(x)\, d\sigma_2(x) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \overline{T_1^{-1} e_\zeta(x)}\, T_1^* e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} e_\zeta(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x),$$

т. е. мы получили формулу (3.6).

Далее, в силу (3.29), (3.27) и (3.32), находим:

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} T_1 V_2 e_\eta(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} V_2 e_\eta(x)\, \overline{T_1^* e_\zeta(x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\zeta(x)\, \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)}\, d\sigma_2(x),$$

т. е. мы получили формулу (3.7).

Аналогично, из (3.30), (3.27) и (3.31) следует:

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}_*(\eta, x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} (T_1^{-1})^* V_2 e_\eta(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x) =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} V_2 e_\eta(x)\, \overline{T_1^{-1} e_\zeta(x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\eta(x)\, \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, d\sigma_2(x),$$

т. е. мы получили формулу (3.8).

Таким образом, утверждения 1) теоремы установлены.

Пусть $f(x) \in H_1$; тогда

$$g(x) = R_1 f(x) = V_1 T_1^* f(x) \in H_2,$$

т. е.

$$V_2 g(x) = T_1^* f(x) \in H_1.$$

Соответствие между элементами $T_1^* f(x)$ и $g(x)$ запишется формулой (1.20) теоремы А:

$$\int_{a_2}^{b_2} g(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\zeta, x)}\, T_1^* f(x)\, d\sigma_1(x),$$

откуда, в силу (3.26), следует формула (3.9).

С другой стороны, согласно (3.31) и (3.27),

$$\int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\zeta, x)}\, g(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{V_1 T_1^{-1} e_\zeta(x)}\, V_1 T_1^* f(x)\, d\sigma_2(x) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \overline{T_1^{-1} e_\zeta(x)}\, T_1^* f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x),$$

а это есть обращение (3.10) преобразования (3.9).

Обратно, если $g(x) \in H_2$, то

$$f(x) = R_2 g(x) = (T_1^{-1})^* V_2 g(x) \in H_1,$$

т. е.

$$V_1 T_1^* f(x) = g(x),$$

и для получения формул (3.9)—(3.10) нужно лишь повторить вышеприведенные рассуждения в обратном порядке.

Перейдем к доказательству формул (3.11)—(3.12). Пусть $f(x) \in H_1$; тогда

$$g(x) = R_{*1} f(x) = V_1 T_1^{-1} f(x) \in H_2,$$

т. е.

$$V_2 g(x) = T_1^{-1} f(x) \in H_1.$$

Соответствие между элементами $T_1^{-1} f(x)$ и $g(x)$ запишется формулой (1.20) теоремы А:

$$\int_{a_2}^{b_2} g(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\zeta, x)}\, T_1^{-1} f(x)\, d\sigma_1(x) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \overline{(T_1^{-1})^* V_2 e_\zeta(x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\zeta, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x),$$

согласно (3.23), (3.27) и (3.30); таким образом, мы получили формулу (3.11).

С другой стороны, в силу (3.32), (3.27), имеем:

$$\int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\zeta, x)}\, g(x)\, d\sigma_2(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{V_1 T_1^* e_\zeta(x)}\, V_1 T_1^{-1} f(x)\, d\sigma_2(x) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \overline{T_1^* e_\zeta(x)}\, T_1^{-1} f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\zeta(x)\, d\sigma_1(x),$$

т. е. мы получили обращение (3.12) преобразования (3.11).

Обратно, если $g(x) \in H_2$ и $f(x) = R_{*2}\, g(x) = T_1 V_2\, g(x) \in H_1$, то ана[...]гичным путем получим, что преобразование (3.12) обращается форм[...]лой (3.11).

Таким образом, утверждения 2) теоремы установлены; более то[...] в процессе доказательства были получены также явные выражения (3.2[...] для операторов R_1, R_{*1} и обратных им операторов R_2, R_{*2}.

Из (3.27) следует, что если $f(x) \in H_1$ и $g(x) = R_1 f(x)$, то

$$\| R_1 f \|_{\sigma_2} = \| g \|_{\sigma_2} = \| V_1 T_1^* f \|_{\sigma_2} = \| T_1^* f \|_{\sigma_1} = \| T_1 f \|_{\sigma_1}, \qquad (3.3[...]$$

причем в силу (3.19) и (3.21)

$$(1-\theta) \| f \|_{\sigma_1} \leqslant \| T_1 f \|_{\sigma_1} \leqslant (1+\theta) \| f \|_{\sigma_1}. \qquad (3.3[...]$$

Из (3.33) и (3.34), очевидно, следует, что $R_1 \in K_\theta$, т. е. оценка (3.1[...]

Далее, если $f(x) \in H_1$ и $g(x) = R_{*1} f(x)$, то

$$\| R_{*1} f \|_{\sigma_2} = \| g \|_{\sigma_2} = \| V_1 T_1^{-1} f \|_{\sigma_2} = \| T_1^{-1} f \|_{\sigma_1},$$

отсюда, применяя оценку (3.34) к элементу $T_1^{-1} f \in H_1$, получим:

$$R_{*1} \in K_{\frac{\theta}{1-\theta}},$$

а это есть оценка (3.14).

Наконец, равенство (3.15) непосредственно вытекает из формул (3.27[...] Таким образом, теорема полностью доказана *.

2°. Полученное в теореме 2 равенство (3.15) для операторов R_1 и R[...] наводит на дальнейшее расширение понятия изометрического отображе[...]ния пространств H_1, H_2 и в связи с этим на новые обобщения теорем[...] Бохнера.

Пусть линейные операторы R_1 и R_{*1} отображают все пространств[...] $H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ на все пространство $H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$.

Условимся говорить, что операторы R_1 и R_{*1} *составляют изометри[...]ческую пару* $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$, если для произвольных элементов $f_1, f_2 \in H$[...] имеют место равенства:

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_1 f_1, R_{*1} f_2)_{\sigma_2} = (R_{*1} f_1, R_1 f_2)_{\sigma_2}\,{}^{**}. \qquad (3.35)$$

Очевидно, что если $R_{*1} = R_1$, то условие (3.35) превратится в обычно[...] условие изометрического отображения пространства H_1 на H_2.

Если операторы R_1 и R_{*1} составляют изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$, то обратные им операторы R_2 и R_{*2}, которые существуют и осущест[...]вляют обратное отображение пространства H_2 на H_1, очевидно, такж[...] составляют изометрическую пару $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2 H_1}$. Иначе говоря, для про[...]извольных элементов $g_1, g_2 \in H_2$ будем иметь:

$$(g_1, g_2)_{\sigma_2} = (R_2 g_1, R_{*2} g_2)_{\sigma_1} = (R_{*2} g_1, R_2 g_2)_{\sigma_1}. \qquad (3.36)$$

Поэтому естественно говорить, что изометрические пары операторов

$$\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2} \text{ и } \{R_2, R_{*2}\}_{H_2 H_1}$$

обратны друг другу.

* Как на это любезно обратил мое внимание М. Г. Крейн, теорему 2 можн[...] перенести на более общий случай функциональных пространств.

** Легко видеть, что второе из этих равенств есть следствие первого.

Ниже будут приведены два предложения (теоремы 3 и 4), аналитически характеризующие изометрические пары операторов. Но предварительно отметим некоторые дополнительные свойства, которыми обладают операторы, составляющие изометрическую пару.

1. Пусть изометрические пары $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ и $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ обратны друг другу; тогда из (3.35) и (3.36) следует:

$$\begin{aligned} (R_2g, f)_{\sigma_1} &= (g, R_{*1}f)_{\sigma_2}, \quad f\in H_1, \quad g\in H_2,\\ (R_{*2}g, f)_{\sigma_1} &= (g, R_1f)_{\sigma_2}, \quad f\in H_1, \quad g\in H_2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Из формул (3.37) легко приходим к следующему заключению: *если $\{f_n\}\in H_1$ и $f_n\to f\in H_1$, то последовательности элементов $R_1f_n\in H_2$ и $R_{*1}f_n\in H_2$ в пространстве H_2 слабо сходятся соответственно к элементам $R_1f\in H_2$* и *$R_{*1}f\in H_2$.*

Аналогично, *если $\{g_n\}\in H_2$ и $g_n\to g\in H_2$, то последовательности элементов $R_2g_n\in H_1$ и $R_{*2}g_n\in H_1$ в пространстве H_1 слабо сходятся соответственно к элементам $R_2g\in H_1$ и $R_{*2}g\in H_1$.*

2. *Если изометрические пары $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ и $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ обратны друг другу, то операторы R_1, R_{*1}, R_2, R_{*2} квазиизометричны в том смысле, что существуют постоянные m_1, M_1 и m_{*1}, M_{*1}, обладающие тем свойством, что*

$$\begin{aligned} m_1\|f\|_{\sigma_1}\leqslant\|R_1f\|_{\sigma_2}\leqslant M_1\|f\|_{\sigma_1}, \quad f\in H_1,\\ m_{*1}\|f\|_{\sigma_1}\leqslant\|R_{*1}f\|_{\sigma_2}\leqslant M_{*1}\|f\|_{\sigma_1}, \quad f\in H_1, \end{aligned} \tag{3.38}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_1}\|g\|_{\sigma_2}\leqslant\|R_2g\|_{\sigma_1}\leqslant\frac{1}{m_1}\|g\|_{\sigma_2}, \quad g\in H_2,\\ \frac{1}{M_{*1}}\|g\|_{\sigma_2}\leqslant\|R_{*2}g\|_{\sigma_1}\leqslant\frac{1}{m_{*1}}\|g\|_{\sigma_2}, \quad g\in H_2. \end{aligned} \tag{3.38'}$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим, например, оператор R_1, отображающий все пространство H_1 на все пространство H_2.

Любому элементу $f\in H_1$ поставим в соответствие упорядоченную пару F элементов из H_1 и H_2 соответственно:

$$F=\{f, R_1f\}.$$

Совокупность элементов $H=\{F\}$ образует линейную систему при очевидном определении суммы элементов и произведения на число. Докажем, что совокупность элементов H становится полным банаховым пространством, если ввести там следующее определение нормы: при $F=\{f, R_1f\}$

$$\|F\|_H=\|f\|_{\sigma_1}+\|R_1f\|_{\sigma_2}. \tag{3.39}$$

В доказательстве нуждается лишь полнота пространства H, что может быть установлено следующим образом.

Если элементы $F_n=\{f_n, R_1f_n\}\in H$ $(n=1, 2, \ldots)$ образуют фундаментальную последовательность в H, то из (3.39) следует, в силу полноты пространств H_1 и H_2, что элементы $f_n\in H_1$ и $R_1f_n\in H_2$ сильно сходятся

соответственно к некоторым элементам $f \in H_1$ и $g \in H_2$. Но в силу свойства 1 элементы $R_1 f_n$ слабо сходятся в H_2 к элементу $R_1 f \in H_2$; отсюда заключаем, что $R_1 f = g$, а это и означает полноту пространства H.

Рассмотрим линейный оператор A, взаимно однозначно отображающий все пространство H_1 на все пространство H:

$$Af = \{f, R_1 f\}.$$

Обратный к A оператор A^{-1} ограничен, так как по (3.39)

$$\| A^{-1}\{f, R_1 f\}\|_{\sigma_1} = \|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|f\|_{\sigma_1} + \|R_1 f\|_{\sigma_2} = \|\{f, R_1 f\}\|_H,$$

т. е. если $F = \{f, R_1 f\}$, то

$$\|A^{-1}F\|_{\sigma_1} \leqslant \|F\|_H, \quad F \in H. \tag{3.40}$$

Из оценки (3.40) на основании известной теоремы Банаха [см. [6]] вытекает, что ограничен также и оператор A, т. е. существует постоянная M_1 такая, что

$$\|Af\|_H \leqslant M_1 \|f\|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1.$$

Отсюда, согласно (3.39), и подавно

$$\|R_1 f\|_{\sigma_2} \leqslant M_1 \|f\|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1. \tag{3.41}$$

Проводя аналогичные рассуждения для операторов R_{*1}, R_2, R_{*2}, приходим к такому же заключению, а именно, что существуют постоянные M_{*1}, m_1 и m_{*1}, обладающие тем свойством, что

$$\|R_{*1} f\|_{\sigma_2} \leqslant M_{*1} \|f\|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1, \tag{3.41'}$$

$$\|R_2 g\|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{m_1}\|g\|_{\sigma_2}, \quad \|R_{*2} g\|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{m_{*1}}\|g\|_{\sigma_2}, \quad g \in H_2. \tag{3.42}$$

Из оценок (3.41), (3.41′) и (3.42), в силу произвольности элементов $f \in H_1$ и $g \in H_2$, приходим к утверждениям (3.38) и (3.38′).

Следующее предложение является аналогом первой части теоремы Бохнера А и доказывается точно таким же образом.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть операторы R_1 и R_{*1} отображают все пространство H_1 на все пространство H_2, составляя при этом изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *функции*

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}(\zeta, x) = R_{*2} e_\zeta(x) \in H_1, \quad \widetilde{K}_*(\zeta, x) = R_2 e_\zeta(x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2), \\ &\widetilde{H}(\zeta, x) = R_{*1} e_\zeta(x) \in H_2, \quad \widetilde{H}_*(\zeta, x) = R_1 e_\zeta(x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1), \end{aligned} \tag{3.43}$$

удовлетворяют уравнениям (3.5)—(3.8) *теоремы* 2;

б) *отображение* $g(x) = R_1 f(x)$, $f(x) = R_2 g(x)$ *осуществляется согласно формулам* (3.9)—(3.10), *а отображение* $g(x) = R_{*1} f(x)$, $f(x) = R_{*2} g(x)$ — *согласно формулам* (3.11)—(3.12) *теоремы* 2. *Кроме того, для операторов R_1, R_{*1} и R_2, R_{*2} справедливы оценки вида* (3.38) *и* (3.38′).

Доказательство. Рассмотрим сначала первые части равенств (3.35)—(3.36), которые имеют место согласно условию теоремы:

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_1 f_1, R_{*1} f_2)_{\sigma_2}, \quad f_1, f_2 \in H_1, \tag{3.35'}$$

$$(g_1, g_2)_{\sigma_2} = (R_2 g_1, R_{*2} g_2)_{\sigma_2}, \quad g_1, g_2 \in H_2. \tag{3.36'}$$

Если $g = R_1 f$, т. е. $f = R_2 g$, то из (3.36′) получим:

$$(g, e_\zeta)_{\sigma_2} = (f, R_{*2} e_\zeta)_{\sigma_1}, \quad (f, e_\zeta)_{\sigma_1} = (g, R_{*1} e_\zeta)_{\sigma_2},$$

откуда в силу обозначений (3.43) следуют формулы (3.9)—(3.10).

Рассмотрим теперь вторые части равенств (3.35)—(3.36):

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_{*1} f_1, R_1 f_2)_{\sigma_2}, \quad f_1, f_2 \in H_1, \tag{3.35''}$$

$$(g_1, g_2)_{\sigma_2} = (R_{*2} g_1, R_2 g_2)_{\sigma_1}, \quad g_1, g_2 \in H_2. \tag{3.36''}$$

Если $g = R_{*1} f$, т. е. $f = R_{*2} g$, то из (3.36″) и (3.35″) получим:

$$(g, e_\zeta)_{\sigma_2} = (f, R_2 e_\zeta)_{\sigma_1}, \quad (f, e_\zeta)_{\sigma_1} = (g, R_1 e_\zeta)_{\sigma_2},$$

откуда, снова учитывая (3.43), получим формулы (3.11)—(3.12).

Положив в формулах (3.9)—(3.10)

$$f(x) = R_2 e_\eta(x) = \widetilde{K}_*(\eta, x), \quad g(x) = R_1 f(x) = e_\eta(x),$$

получим уравнения (3.5) и (3.8).

Наконец, из тех же формул при

$$f(x) = R_{*2} e_\eta(x) = \widetilde{K}(\eta, x), \quad g(x) = R_{*1} f(x) = e_\eta(x)$$

следуют уравнения (3.6) и (3.7). Что касается оценок (3.38) и (3.38′) для операторов R_1, R_{*1} и R_2, R_{*2}, то они были нами установлены в замечании 2 этого пункта.

Прежде, чем привести обращение этой теоремы, т. е. сформулировать и доказать аналог второй части теоремы А, отметим одно следствие из только что доказанной теоремы.

В условиях теоремы 3 из оценок (3.38) и (3.38′) вытекает следующее заключение:

1) *Если* $f(x) \in H_1$ *и функции вида*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_{\zeta_k^{(n)}}(x) \in \dot{H}_1 \tag{3.44'}$$

сильно сходятся к $f(x) \in H_1$, *то*

$$R_1 f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \widetilde{H}_*(\zeta_k^{(n)}, x) \Rightarrow R_1 f(x) \in H_2,$$

$$R_{*1} f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \widetilde{H}(\zeta_k^{(n)}, x) \Rightarrow R_{*1} f(x) \in H_2.$$

2) *Если* $g(x) \in H_2$ *и функции вида*

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} e_{\zeta_k^{(n)}}(x) \tag{3.44''}$$

сильно сходятся к $g(x) \in H_2$, *то*

$$R_2 g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \widetilde{K}_*(\zeta_k^{(n)}, x) \Rightarrow R_2 g(x) \in H_1,$$

$$R_{*2} g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \widetilde{K}(\zeta_k^{(n)}, x) \Rightarrow R_{*2} g(x) \in H_1.$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть четверка функций*

$$\widetilde{K}(\zeta, x) \in H_1, \quad \widetilde{K}_*(\zeta, x) \in H_1, \quad \zeta \in (a_2, b_2),$$
$$\widetilde{H}(\zeta, x) \in H_2, \quad \widetilde{H}_*(\zeta, x) \in H_2, \quad \zeta \in (a_1, b_1); \tag{3.45}$$

удовлетворяет уравнениям (3.5)—(3.8) *теоремы* 2 *и условиям:*

а) *если последовательность функций вида* (3.44′) $f_n(x) \in \dot{H}_1$ *сильно сходится в* H_1, *то соответствующие последовательности функций*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \widetilde{H}(\zeta_k^{(n)}, x) \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} \widetilde{H}_*(\zeta_k^{(n)}, x)$$

сильно сходятся в H_2;

б) *если последовательность функций вида* (3.44″) $g_n(x) \in \dot{H}_2$ *сильно сходится в* H_2, *то соответствующие последовательности функций*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \widetilde{K}(\zeta_k^{(n)}, x) \text{ и } \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \widetilde{K}_*(\zeta_k^{(n)}, x)$$

сильно сходятся в H_1.

При этих условиях * *функции* (3.45) *порождают, согласно формулам* (3.9)—(3.10) *и* (3.11)—(3.12), *соответственно два оператора* R_1 *и* R_{*1}, *составляющие изометрическую пару* $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и пару* $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$, *обратную ей.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что условия а) и б) оказываются излишними в случае, указанном в сноске, ибо тогда они автоматически выполняются **. Действительно, если, например,

$$\widetilde{K}_*(\zeta, x) = \widetilde{K}(\zeta, x), \quad \zeta \in (a_2, b_2), \quad x \in (a_1, b_1),$$

то из (3.5), в частности, будет следовать, что для всякой системы комплексных чисел $\{\alpha_j\}$ и чисел $\{\zeta_j\} \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \sum_j \alpha_j \widetilde{K}(\zeta_j, x) \right|^2 d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \left| \sum_j \alpha_j e_{\zeta_j}(x) \right|^2 d\sigma_2(x).$$

Поэтому если последовательности функций вида

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} e_{\zeta_k^{(n)}}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

фундаментальны в H_2, то соответствующая последовательность функций вида

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} \widetilde{K}(\zeta_k^{(n)}, x)$$

будет фундаментальной в H_1. Это значит, что условие б) в этом случае

* При этом условия а) и б) излишни, если $\widetilde{K}_*(\zeta, x) = \widetilde{K}(\zeta, x)$ и $\widetilde{H}_*(\zeta, x) = \widetilde{H}(\zeta, x)$.

** Это согласуется с тем, что на основании второй части теоремы А в этом случае уравнения (3.5)—(3.8) обеспечивают изометричность операторов, порожденных этими ядрами.

едует из уравнения (3.5). Аналогично убедимся, что при $\widetilde{H}(\zeta, x) = \widetilde{H}_*(\zeta, x)$ условие а) следует из уравнения (3.6).

Переходя к доказательству теоремы, определим некоторые аддитивные іераторы R_1, R_{*1} и R_2, R_{*2} соответственно на многообразиях функций $_1$ и $\dot{H}_2$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_1\Big(\sum_{k=1}^n a_k e_{\zeta_k}(x)\Big) &= \sum_{k=1}^n a_k \widetilde{H}_*(\zeta_k, x), \\ R_{*1}\Big(\sum_{k=1}^n a_k e_{\zeta_k}(x)\Big) &= \sum_{k=1}^n a_k \widetilde{H}(\zeta_k, x), \\ R_2\Big(\sum_{k=1}^n a_k e_{\zeta_k}(x)\Big) &= \sum_{k=1}^n a_k \widetilde{K}_*(\zeta_k, x), \\ R_{*2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k e_{\zeta_k}(x)\Big) &= \sum_{k=1}^n a_k \widetilde{K}(\zeta_k, x). \end{aligned} \tag{3.46}$$

силу того, что величины $(e_\zeta, e_\eta)_{\sigma_1}$ и $(e_\zeta, e_\eta)_{\sigma_2}$ вещественны и в силу .46), уравнения (3.5)—(3.8) запишутся в виде:

$$(e_\zeta, e_\eta)_{\sigma_1} = (R_1 e_\zeta, R_{*1} e_\eta)_{\sigma_2} = (R_{*1} e_\zeta, R_1 e_\eta)_{\sigma_2}, \tag{3.5'}$$

$$(e_\zeta, e_\eta)_{\sigma_2} = (R_2 e_\zeta, R_{*2} e_\eta)_{\sigma_1} = (R_{*2} e_\zeta, R_2 e_\eta)_{\sigma_1}, \tag{3.6'}$$

$$(R_{*2} e_\eta, e_\zeta)_{\sigma_1} = (e_\eta, R_1 e_\zeta)_{\sigma_2}, \tag{3.7'}$$

$$(R_2 e_\eta, e_\zeta)_{\sigma_1} = (e_\eta, R_{*1} e_\zeta)_{\sigma_2}. \tag{3.8'}$$

На основании формул (3.46), соотношения (3.5′)—(3.8′) распространятся на произвольные функции $f \in \dot{H}_1$ и $g \in \dot{H}_2$, приобретая при этом ид:

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_1 f_1, R_{*1} f_2)_{\sigma_2} = (R_{*1} f_1, R_1 f_2)_{\sigma_2}, \tag{3.47}$$

$$(g_1, g_2)_{\sigma_2} = (R_2 g_1, R_{*2} g_2)_{\sigma_1} = (R_{*2} g_1, R_2 g_2)_{\sigma_1}, \tag{3.48}$$

$$(R_{*2} g, f)_{\sigma_1} = (g, R_1 f)_{\sigma_2}, \tag{3.49}$$

$$(R_2 g, f)_{\sigma_1} = (g, R_{*1} f)_{\sigma_2}. \tag{3.50}$$

Согласно определению (3.46) операторов R_i, R_{*i} $(i = 1, 2)$ на многообразиях $\dot{H}_i$ и в силу условий а) и б) теоремы, если $f_n \in \dot{H}_1$ (или $g_n \in \dot{H}_2$) ильно сходятся в H_1 (или в H_2), то $R_1 f_n$, $R_{*1} f_n$ (или $R_2 g_n$, $R_{*2} g_n$) сильно ходятся в H_1 (или в H_2). В силу плотности $\dot{H}_i$ в H_i $(i = 1, 2)$ отсюда іедует, что операторы R_i и R_{*i} $(i = 1, 2)$ допускают распространение а все пространство H_i с сохранением соотношений (3.47)—(3.50).

Покажем теперь, что операторы R_1 и R_{*1} отображают все пространсво H_1 на все пространство H_2, причем R_2 и R_{*2} им обратны. В самом еле, пусть f_1 и $f_2 \in H_1$ произвольны; тогда из (3.50) и (3.49) получаем:

$$(R_1 f_1, R_{*1} f_2)_{\sigma_2} = (R_2 R_1 f_1, f_2)_{\sigma_1}, \tag{3.50'}$$

$$(R_{*1} f_1, R_1 f_2)_{\sigma_2} = (R_{*2} R_{*1} f_1, f_2)_{\sigma_1}. \tag{3.49'}$$

Из (3.47), (3.50′) и (3.47), (3.49′) находим:

$$(f_1 - R_2R_1f_1, f_2)_{\sigma_1} = 0, \qquad f_1, f_2 \in H_1,$$
$$(f_1 - R_{*2}R_{*1}f_1, f_2)_{\sigma_1} = 0, \qquad f_1, f_2 \in H_1.$$

Отсюда следует, что

$$R_2R_1 = R_{*2}R_{*1} = I_1. \qquad (3.5$$

Вполне аналогично из формулы (3.48), написанной для произвольны элементов $g_1, g_2 \in H_2$, и из формул (3.49), (3.50) следует:

$$R_1R_2 = R_{*1}R_{*2} = I_2. \qquad (3.5$$

Формулы (3.51) и (3.52) доказывают наше утверждение. Из уравнени (3.47) и (3.48) ясно, что операторы R_1 и R_{*1} составляют изометрическу пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$, а R_2, R_{*2} образуют обратную ей изометрическую пар $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$.

Далее, функции $\widetilde{K}(\zeta, x)$, $\widetilde{K}_*(\zeta, x)$, $\widetilde{H}(\zeta, x)$, $\widetilde{H}_*(\zeta, x)$, которые должн соответствовать этим изометрическим парам согласно формулам (3.43 теоремы 3, совпадают с первоначальными в силу формул (3.46). Отсюда на основании теоремы 3, заключаем, что операторы R_1, R_2 и R_{*1}, R аналитически представляются формулами (3.9)—(3.10) и (3.11)—(3.12 соответственно. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность Р. М. Мар тиросяну за ценные замечания при обсуждении результатов этой работы.

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР

Поступило
11. IX. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bochner S. and Chandrasecharan K., Fourier transforms, Princeton, 1949.
[2] Рисс Ф. и Надь С., Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954.
[3] Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям, Москва, 1950.
[4] Paley R., Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.
[5] Nagy Sz., Expansion theorems of Paley—Wiener type, Duke Math. Journ., 14 (1947), 975—978.
[6] Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, Москва, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 113—142

И. А. ВИНОГРАДОВА

О НЕОПРЕДЕЛЕННОМ A-ИНТЕГРАЛЕ

В работе исследуются свойства функции, являющейся неопределенным A-интегралом. Показывается, что неопределенный A-интеграл может противоречить несобственному интегралу Лебега, обязательно являясь при этом разрывной функцией, и может противоречить общему интегралу Данжуа, даже если он является непрерывной функцией.

§ 1. Введение

Н. Н. Лузин для функций класса $L^2[-\pi, \pi]$ и И. И. Привалов для функций класса $L[-\pi, \pi]$ установили [см. ([1]), стр. 147], что для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$ определена функция

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(t-x)\, dt,$$

где интеграл берется в смысле главного значения Коши. Функция $\bar{f}(x)$, вообще говоря, не суммируема на $[-\pi, \pi]$, но всегда интегрируема на $[-\pi, \pi]$ в смысле A-интеграла.

Некоторая функция $f(x)$ называется A-интегрируемой на $[a, b]$, если

1) $mE\{x,\ x \in [a, b],\ |f(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right);$ (1)

2) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} (L) \int_a^b [f(x)]^n\, dx, \text{ где } [f(x)]^n = \begin{cases} f(x) & \text{при } |f(x)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |f(x)| > n. \end{cases} \quad (2)$$

Величина этого предела называется определенным A-интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$.

Как показал Титчмарш в работе ([5]), всякая функция, сопряженная к суммируемой, интегрируется на $[-\pi, \pi]$ с помощью интеграла, определенного пределом (2), и, кроме того, коэффициенты сопряженного ряда есть коэффициенты Фурье от сопряженной функции в смысле этого интеграла. Там же показано, что без условия (1) такой интеграл может быть неаддитивен. Все результаты Титчмарша относятся к функциям, сопряженным к суммируемым, для которых, как ранее показал А. Н. Колмогоров ([2]), условие (1) выполнено, но Титчмарш этого условия специально не вводил. Полное определение A-интеграла как предела (2) при условии (1) дано А. Н. Колмогоровым в вероятностной форме обобщенного математического ожидания [см. ([3]), гл. 6]. В работе Ю. С. Очана [см. ([4]),

часть 4] определение А. Н. Колмогорова изложено с точки зрения теории функций. Там же показано, что области A-интегрируемых функций и функций, интегрируемых по Данжуа, частично пересекаются. Вопросам A-интегрирования и применения A-интеграла в теории тригонометрических рядов посвящен ряд работ П. Л. Ульянова [см. (6)—(8)]. В работе (8) показано, в частности, что существование A-интеграла от $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ не гарантирует существования этого интеграла на отрезке $[a', b'] \subset [a, b]$. Более того, приводится пример функции, A-интегрируемой на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и не A-интегрируемой на отрезке $[a, b]$, где a — любая точка некоторого множества $E_1 \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $mE_1 > 0$, и b — любая точка некоторого множества $E_2 \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $mE_2 > 0$. Таким образом, имея возможность определить величину определенного A-интеграла от $f(x)$ на $[a, b]$, нельзя, вообще говоря, определить неопределенный A-интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ как функцию

$$A(x) = (A)\int_a^x f(t)\,dt.$$

Выделим класс функций $f(x)$, для которых подобный неопределенный A-интеграл существует, и рассмотрим соответствующий класс функций $A(x)$.

Известно, что если $f(x) \in L[a, b]$, то функция $f(x)$ A-интегрируема на $[a, b]$ и оба интеграла совпадают, следовательно, $A(x)$ существует и для всех $x \in [a, b]$

$$A(x) = (L)\int_a^x f(t)\,dt.$$

В § 3 будет показано, что если $f(x)$ не суммируема на отрезке $[a, b]$, то функция $A(x)$ не обязана даже быть непрерывной, а именно, будет построена функция $f(x)$, интегрируемая на $[0,1]$ в смысле несобственного интеграла Лебега, для которой $A(x)$ существует для всех $x \in [0,1]$ и разрывна в точке $x = 1$.

В § 4 рассматриваются только те функции $f(x)$, для которых $A(x)$ определена и непрерывна на $[0,1]$, и исследуется, как при этом условии может вести себя функция $A(x)$ на $[0,1]$. Будет показано, что для достаточно широкого класса функций $G(x)$ можно найти такую функцию $f(x)$, для которой $A(x)$ определена и непрерывна на $[0,1]$ и совпадает с $G(x)$ на некотором совершенном множестве P, причем мера множества P может быть как угодно близка к 1. В частности, $f(x)$ может быть интегрируема в смысле узкого интеграла Данжуа, причем

$$A(1) = (A)\int_0^1 f(x)\,dx \neq (D)\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Рассматриваются случаи, когда $A(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры, когда $A(x)$ не обладает

N-свойством на [0,1] и когда $A(x)$ имеет почти всюду на [0,1] производную, не равную подынтегральной функции на множестве положительной меры; в каждом из этих случаев $f(x)$ есть точная производная своего неопределенного интеграла Данжуа.

§ 2. Вспомогательные предложения

Сделаем несколько общих замечаний.

1. Будем в дальнейшем обозначать через $w(f, u)$ колебание функции $f(x)$ на интервале u.

2. Все суммы, в которых верхний индекс меньше нижнего, полагаем равными нулю.

3. Пусть

$$A_n(x) = (L)\int_a^x [f(t)]^n dt \quad (x \in [a, b]).$$

Тогда для того чтобы $f(x)$ имела неопределенный A-интеграл на $[a, b]$ и функция $A(x)$ была ее неопределенным A-интегралом,

$$A(x) = (A)\int_a^x f(t)\,dt, \tag{3}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) $mE\{x,\ x \in [a, b],\ |f(x)| > n\} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, (3.1)

б) функция

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) \tag{3.2}$$

определена и конечна для всех $x \in [a, b]$.

4. Определим последовательность $\{a_k\}$ положительных чисел, обладающих свойствами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1, \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = +\infty, \tag{4.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0 \tag{4.3}$$

$\left(\text{например, } a_k = \frac{c}{k^2 \ln(k+2)}\right)$.

5. Пусть $f(x)$ задана на $[a, b]$. Тогда обозначим через $f_r(x)$, где r — натуральное число, функцию, определяемую из условий:

$$\begin{aligned} f_r(x) &= f(r(x-a)+a), \quad x \in \left[a,\ a + \frac{b-a}{r}\right), \\ f_r(x) &= f_r\left(x - \frac{b-a}{r}\right), \quad x \in \left[a + \frac{b-a}{r},\ b\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим некоторые соотношения между $f(x)$ и $f_r(x)$.

Если $c < |f(x)| < C$, то

$$c < |f_r(x)| < C. \tag{5.1}$$

Если $f(x) \in L(a, b)$, то $f_r(x) \in L(a, b)$ и

$$(L)\int_a^b f_r(x)\,dx = r\,(L)\int_a^{a+\frac{b-a}{r}} f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Так как, очевидно,

$$|f_r(x)| = |f(x)|_r,$$

то

$$(L)\int_a^b |f(x)|\,dx = r\,(L)\int_a^{a+\frac{b-a}{r}} |f_r(x)|\,dx = (L)\int_a^b |f_r(x)|\,dx. \tag{5.3}$$

Если $f(x) \in L(a, b)$ и $(L)\int_a^b f(x)\,dx = 0$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f_r(t)\,dt, \quad x \in [a, b],$$

периодична с периодом $\frac{b-a}{r}$ и

$$w(F, (a, b)) \leqslant \frac{1}{r}\,(L)\int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.4}$$

Действительно, если $a + \frac{b-a}{r} \leqslant x \leqslant b$, то, применяя равенство (5.2), получим:

$$F\left(x - \frac{b-a}{r}\right) = (L)\int_a^{x-\frac{b-a}{r}} f_r(t)\,dt = (L)\int_a^x f_r(t)\,dt - (L)\int_a^{a+\frac{b-a}{r}} f_r(t)\,dt = F(x).$$

Используя равенство (5.3), имеем в силу периодичности $F(x)$:

$$w(F, (a, b)) = w\left(F, \left(a, a + \frac{b-a}{r}\right)\right) \leqslant (L)\int_a^{a+\frac{b-a}{r}} |f_r(t)|\,dt = \frac{1}{r}\,(L)\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Далее, очевидно, что для любой измеримой $f(x)$ и произвольного n

$$mE\{x,\ x \in [a, b],\ f(x) = n\} = mE\{x,\ x \in [a, b],\ f_r(x) = n\} \tag{5.5}$$

и

$$mE\{x,\ x \in [a, b],\ |f(x)| > n\} = mE\{x,\ x \in [a, b],\ |f_r(x)| > n\}. \tag{5.6}$$

Наконец, для произвольной функции $f(x)$ и $n \geqslant 0$ очевидно, что

$$[f_r(x)]^n = [f(x)]_r^n \tag{5.7}$$

[(см. (2)].

§ 3. Разрывность неопределенного A-интеграла

В этом параграфе строится пример функции, интегрируемой на $[0,1]$: смысле несобственного интеграла Лебега, у которой неопределенный 4-интеграл на $[0,1]$ существует и разрывен в точке $x=1$.

Возьмем последовательность чисел $\{a_k\}$, определенную условиями 4.1) — (4.3). В силу (4.2), можно найти такую последовательность нату-ральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, что

$$\sum_{k=1}^{k_1-1} k a_k < 1 \leqslant \sum_{k=1}^{k_1} k a_k$$

и

$$\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i-1} k a_k < 2 \leqslant \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} k a_k \quad (i=2,\ 3,\ 4, \ldots).$$

Так как $\sum\limits_{k_{i-1}+1}^{k_i} k a_k \neq 0$, то $k_i \geqslant k_{i-1}+1 > k_{i-1}$.

Введем числа a'_k, удовлетворяющие следующим условиям:

$$a'_k = a_k \quad (k \neq k_i),$$

$$\sum_{k=1}^{k_1} k a'_k = 1, \quad \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} k a'_k = 2 \quad (i=2,\ 3,\ 4, \ldots). \tag{6}$$

Пусть

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{k_i} a_k \quad (i=1,\ 2,\ 3, \ldots),$$
$$\beta_1 = 0, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{i-1}}{2} \quad (i=2,\ 3,\ 4, \ldots). \tag{7}$$

Тогда

$$\alpha_i - \beta_i = \beta_i - \alpha_{i-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i} a_k \quad (i=2,\ 3,\ 4, \ldots) \tag{8}$$

и, в силу (4.1),

$$\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \lim_{i\to\infty} \beta_i = 1. \tag{9}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} & x_p = \sum_{k=1}^{p} a_k, \quad 1 \leqslant p \leqslant k_1, \quad x_0 = 0, \\ & \left.\begin{aligned} & x_p = \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{p} a_k, \\ & y_p = \alpha_{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{p} a_k \end{aligned}\right\} \quad (k_{i-1} < p \leqslant k_i, \quad i=2,3,4,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Обозначим через δ_p^1 интервал (x_{p-1}, x_p), $1 \leqslant p \leqslant k_1$, и интервал (x_p, x_{p-1}), $k_{i-1}+1 < p \leqslant k_i$, $i = 2, 3, 4, \ldots$; через $\delta_{k_i+1}^1$ — интервал $(x_{k_i+1}, \alpha_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$; через Δ_p^1 — интервал (y_{p-1}, y_p), $k_{i-1}+1 < p \leqslant k_i$, $i = 2, 3, 4, \ldots$; через $\Delta_{k_i+1}^1$ — интервал (α_i, y_{k_i+1}), $i = 1, 2, 3, \ldots$ (см. рис. 1).

Рис. 1

Тогда интервалы δ_p^1 будут определены для всех $p \geqslant 1$, а интервалы Δ_p^1 — для всех $p > k_1$. В силу (8) и (10),

$$y_{k_i} = x_{k_i} = \beta_i.$$

Если $1 \leqslant p \leqslant k_1$, то $m\delta_p^1 = a_p$ и $\delta_p \subset (0, \alpha_1) = (\beta_1, \alpha_1)$ [(см. (7)].

Если $k_{i-1} < p \leqslant k_i$ $(i = 2, 3, 4, \ldots)$, то $\delta_p^1 \subset (\beta_i, \alpha_i)$, а $\Delta_p^1 \subset (\alpha_{i-1}, \beta_i)$ и, в силу (10),

$$m\delta_p^1 = m\Delta_p^1 = \frac{1}{2} a_p.$$

Таким образом, интервалы δ_p^1 и Δ_p^1 взаимно не пересекаются.

Далее, обозначим через δ_p и Δ_p интервалы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} \delta_p \subset \delta_p^1, \quad p \geqslant 1, \quad \Delta_p \subset \Delta_p^1, \quad p > k_1, \\ m\delta_p = a'_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant k_1, \quad m\delta_p = m\Delta_p = \frac{1}{2} a'_p, \quad p > k_1. \end{gathered} \tag{11}$$

Так как $a'_p \leqslant a_p$, то эти условия непротиворечивы.

Имеем:

$$\begin{aligned} &\delta_p \subset (\beta_i, \alpha_i) \subset (\beta_i, \beta_{i+1}) \quad (k_{i-1} < p \leqslant k_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad k_0 = 0), \\ &\Delta_p \subset (\alpha_{i-1}, \beta_i) \subset (\beta_{i-1}, \beta_i) \quad (k_{i-1} < p \leqslant k_i, \quad i = 2, 3, 4, \ldots). \end{aligned} \tag{12}$$

Определим вспомогательную функцию $\varphi(x)$ на $[0,1]$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} p, & \text{если } x \in \delta_p, \\ -p, & \text{если } x \in \Delta_p, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{13}$$

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(x)$:

а) $\varphi(x)$ принимает только целые значения, и для любого натурального p_0

$$|\varphi(x)| = p_0, \quad x \in \delta_{p_0} + \Delta_{p_0}; \tag{14}$$

б) $\varphi(x)$ ограничена на $[0, 1-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$:

$$|\varphi(x)| < M(\varepsilon) \quad (x \in [0, 1-\varepsilon], \ \varepsilon > 0); \tag{15}$$

в)

$$(L) \int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \varphi(t)\,dt = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{16}$$

Действительно, пользуясь последовательно соотношениями (12), (13

11) и (6), получим:

$$(L)\int_{\beta_1}^{\beta_2}\varphi(t)\,dt=\sum_{p=1}^{k_1}p\cdot m\delta_p-\sum_{p=k_1+1}^{k_2}p\cdot m\Delta_p=\sum_{p=1}^{k_1}pa'_p-\frac{1}{2}\sum_{p=k_1+1}^{k_2}pa'_p=1-1=0$$

и для $i=2, 3, 4, \ldots$

$$(L)\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}}\varphi(t)\,dt=\sum_{p=k_{i-1}+1}^{k_i}p\cdot m\delta_p-\sum_{p=k_i+1}^{k_{i+1}}p\cdot m\Delta_p=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p=k_{i-1}+1}^{k_i}pa'_p-\frac{1}{2}\sum_{p=k_i+1}^{k_{i+1}}pa'_p=1-1=0.$$

В результате аналогичных вычислений находим:

$$(L)\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}}|\varphi(t)|\,dt=2\quad(i=1, 2, 3, \ldots).\tag{17}$$

Теперь определяем функцию $f(x)$, $x\in[0, 1]$:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), \text{ если } x\in(\beta_i, \beta_{i+1}),\\ 0 \text{ в остальных точках отрезка } [0, 1].\end{cases}\tag{18}$$

Здесь $\varphi_i(x)$ определяется из $\varphi(x)$ при помощи равенства (5), в котором полагаем $[a, b]=[\beta_i, \beta_{i+1}]$.

Отметим некоторые свойства функции $f(x)$:

1) Так как $\varphi(x)$ ограничена на $[\beta_i, \beta_{i+1}]$, то, в силу (5.1) и (18), $f(x)$ также ограничена на $[\beta_i, \beta_{i+1}]$, и, в силу (9), $f(x)$ ограничена на $[0, 1-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$:

$$|f(x)|\leqslant M(\varepsilon)\quad(x\in[0, 1-\varepsilon], \ \varepsilon>0).\tag{19}$$

2) Так как $\varphi(x)$ принимает только целые значения, то, очевидно, и $f(x)$ принимает только целые значения.

Положим

$$H_p^+=E\{x, \ f(x)=p\},\quad H_p^-=E\{x, \ f(x)=-p\}\tag{20}$$

и определим меры множеств H_p^+ и H_p^-. Если $1\leqslant p\leqslant k_1$, то $\varphi(x)=p$ для $x\in\delta_p\subset(\beta_1, \beta_2)$ [см. (13) и (12)], а значения, равного $-p$, функция $\varphi(x)$ не принимает. В силу (5.5) и (11),

$$\left.\begin{aligned}mH_p^+&=m\delta_p=a'_p,\\ mH_p^-&=0\end{aligned}\quad(1\leqslant p\leqslant k_1).\right\}\tag{21}$$

Если $k_{i-1}<p\leqslant k_i$ $(i=2, 3, 4, \ldots)$, то, в силу (13) и (12),

$$\varphi(x)=\begin{cases}\ \ p, & x\in\delta_p\subset(\beta_i, \beta_{i+1}),\\ -p, & x\in\Delta_p\subset(\beta_{i-1}, \beta_i).\end{cases}$$

Применяя соотношение (5.5), находим:

$$mH_p^+=m\delta_p,\quad mH_p^-=m\Delta_p.$$

В силу (11),

$$mH_p^+=mH_p^-=\frac{1}{2}a'_p,\quad p>k_1.\tag{22}$$

3) Используя равенства (18), (16), (5.2), получим:

$$(L)\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} f(t)\,dt = (L)\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} \varphi(t)\,dt = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{23}$$

Положим

$$L(x) = (L)\int_0^x f(t)\,dt.$$

В силу (19), функция $L(x)$ определена для всех $x \in [0, 1)$. Покажем, что существует $\lim\limits_{x\to 1} L(x)$. На основании формулы (23),

$$L(\beta_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{24}$$

Оценим колебание функции $L(x)$ на интервале $(\beta_i,\ \beta_{i+1})$. Используя соотношения (18), (5.4) и (17), получим:

$$w(L,\ (\beta_i,\ \beta_{i+1})) \leqslant \frac{1}{i}(L)\int_{\beta_i}^{\beta_{i+1}} |\varphi(x)|\,dx = \frac{2}{i}. \tag{25}$$

Объединяя (24), (9) и (25), находим:

$$\lim_{x\to 1} L(x) = 0.$$

Следовательно, $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ в смысле несобственного интеграла Лебега.

Покажем, что у $f(x)$ на $[0, 1]$ существует неопределенный A-интеграл

$$A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt.$$

Обозначим через E_n множество точек $x \in [0, 1]$, где $|f(x)| > n$ (n — целое); тогда, в силу свойства 2) [см. (20)],

$$E_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} (H_p^+ + H_p^-),$$

и из равенства (22) получаем для $n > k_1$:

$$mE_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} (mH_p^+ + mH_p^-) = \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p' \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p.$$

Так как, на основании (4.3), $\lim\limits_{n\to\infty} n \sum\limits_{p=n+1}^{\infty} a_p = 0$, то отсюда следует:

$$mE_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим последовательность функций $A_n(x) = (L)\int_0^x [f(t)]^n\,dt$.

Если $x \in [0, 1)$, то, в силу (19), для всех n, больших некоторого n_0,

$$A_n(x) = (L)\int_0^x [f(t)]^n dt = (L)\int_0^x f(t)\,dt = L(x). \tag{26}$$

[алее, используя последовательно соотношения (20), (22), (21) и (6), олучаем для $n > k_1$:

$$A_n(1) = (L)\int_0^1 [f(t)]^n dt =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} p\cdot mH_p^+ - \sum_{p=1}^{n} p\cdot mH_p^- = \sum_{p=1}^{k_1} p\cdot m\delta_p = \sum_{p=1}^{k_1} pa'_p = 1. \qquad (27)$$

[з (26) и (27) следует, что функция $A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x)$ определена и ко- ечна для всех $x \in [0, 1]$. В силу (3), $A(x)$ есть неопределенный A-интег- ал от $f(x)$ на $[0, 1]$. Объединяя (26) и (27), получаем:

$$A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} (L)\int_0^x f(t)\,dt = L(x), & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

[аким образом,

$$\lim_{x\to 1} A(x) = \lim_{x\to 1} L(x) = 0 \neq A(1) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$ в смысле несобственного нтеграла Лебега и одновременно имеет на $[0, 1]$ неопределенный A-ин- еграл $A(x)$, который разрывен в точке $x = 1$.

§ 4. Сравнение A-интеграла с интегралом Данжуа

ЛЕММА. *Пусть на отрезке* $[0, 1]$ *заданы совершенное, симметричное, игде не плотное множество* P *и функция* $G(x)$, *удовлетворяющие усло- иям:*

1) $(\beta_i - \alpha_i) \geqslant (\beta_{i+1} - \alpha_{i+1})$, (28.1)

де $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, *есть любой смежный интервал мно- кества* P *ранга* i;

2) $G(x)$ *непрерывна на* $[0, 1]$; (28.2)

3) $G(0) = 0$, $G(1) \neq 0$; (28.3)

4) $G(x)$ *постоянна на каждом интервале* $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, (28.4) *де* $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Пусть, далее, $\{\varepsilon_i\}$ — *произвольная последовательность положительных исел, стремящихся к нулю с ростом* i. *Тогда существует функция* $f(x)$ *акая, что:*

а) $f(x) = 0 \quad (x \in P)$; (29.1)

б) $f(x) = 0 \quad (x \in (\alpha_{ij}, \beta_{ij}) - (a_{ij}, b_{ij}))$, (29.2)

де $a_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{1}{3}(\beta_{ij} - \alpha_{ij})$, $b_{ij} = \beta_{ij} - \frac{1}{3}(\beta_{ij} - \alpha_{ij})$;

в) $f(x)$ *непрерывна на* $[\alpha_i, \beta_i]$ *для всех* $i = 1, 2, 3, \ldots$; (29.3)

г) $(L)\int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}} f(t)\,dt = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1},\ i = 1, 2, 3, \ldots)$; (29.4)

д) *функция* $A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$ *существует и непрерывна для всех* $\in [0, 1]$; (29.5)

е) $A(x) = G(x) \quad (x \in P)$; (29.6)

ж) $w(A, (\alpha_i, \beta_i)) \leqslant \varepsilon_i$. (29.7)

Доказательство. Занумеруем интервалы (α_i, β_i) слева направо

$$(\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}), (\alpha_{i,2}, \beta_{i,2}), \ldots, (\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}), \ldots, (\alpha_{i,2^{i-1}}, \beta_{i,2^{i-1}})$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots; 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}).$$

Положим

$$a_{ij} = \alpha_{ij} + \frac{1}{3}(\beta_{ij} - \alpha_{ij}), \quad b_{ij} = \beta_{ij} - \frac{1}{3}(\beta_{ij} - \alpha_{ij}), \; u_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}). \quad (3\ldots)$$

Тогда

$$u_{ij} = (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \quad (3\ldots)$$
$$mu_{ij} = (b_{ij} - a_{ij}) = \frac{1}{3}(\beta_{ij} - \alpha_{ij}). \quad (3\ldots)$$

Пусть

$$H = [0, 1] - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}. \quad (3\ldots)$$

H — совершенное множество; ясно, что

$$H \supset P, \quad (34)$$

$$[\alpha_{ij}, \beta_{ij}] = (a_{ij}, b_{ij}) + H \cdot [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}, \; i = 1, 2, 3, \ldots) \quad (35)$$

и, очевидно, $G(x)$ постоянна на u_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}, \; i = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$G(x) = C(i, j) \quad (x \in u_{ij}). \quad (36)$$

Обозначим через $\rho_i = \rho_{ij}$ отрезки, получаемые из $[0, 1]$ удалением смежных интервалов множества H ранга $\leqslant i$, т. е. интервалов $u_{i'j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i'-1}, i' \leqslant i$, и занумеруем их слева направо:

$$\rho_{i1}, \rho_{i2}, \ldots, \rho_{ij}, \ldots, \rho_{i,2^i}; \quad \rho_{ij} = [c_{ij}, d_{ij}] \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^i, \; i = 1, 2, 3, \ldots) \quad (37)$$

Из построения множеств P и H следует, что

$$\rho_{ij} = \rho_{i+1, 2j-1} + u_{i+1, j} + \rho_{i+1, 2j}. \quad (38)$$

Заметим, что

$$c_{i,1} = 0 \text{ и } d_{i,2^i} = 1 \quad (39)$$

для всех $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Отметим еще, что если x_0 — произвольная точка второго рода множества P, то существует такая последовательность индексов $j(i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, зависящая от x_0, что отрезки $\rho_{i,j(i)}$ стягиваются к точке x_0:

$$x_0 \in \rho_{i,j(i)}, \quad \lim_{i \to \infty} \rho_{i,j(i)} = x_0. \quad (40)$$

Введем обозначение:

$$G(\rho_{ij}) = G(d_{ij}) - G(c_{ij}). \quad (41)$$

В силу (36)

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} G(\rho_{ij}) = G(d_{ij_2}) - G(c_{ij_1}), \quad (42)$$

а в силу (38)

$$G(\rho_{ij}) = G(\rho_{i+1, 2j-1}) + G(\rho_{i+1, 2j}). \quad (43)$$

Возьмем последовательность чисел $\{a_k\}$, определенную условиями (4.1) — (4.3). В силу (4.2), можно найти последовательность натуральных чисел k_{ij} $(1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1},\ i = 1, 2, 3, \ldots)$, для которой (если обозначить $k_{1,0} = 0$ и $k_{i+1,\,0} = k_{i,\,2^{i-1}}$) выполняются неравенства:

$$\sum_{k=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}-1} k\,a_k < \frac{2G(\rho_{i-1,\,j})}{mu_i \cdot \lambda_{ij}} \leqslant \sum_{k=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}} k\,a_k,$$

где сумма

$$\sum_{k=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}-1} ka_k$$

считается отрицательной, если $k_{i,\,j-1} = k_{ij}$, и

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если } G(\rho_{i-1,\,j}) \geqslant 0, \\ -1, & \text{если } G(\rho_{i-1,\,j}) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что если $G(\rho_{i-1,\,j}) \neq 0$, то

$$\sum_{k=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}} ka_k > 0$$

и, следовательно,

$$k_{ij} \geqslant k_{i,\,j-1} + 1 > k_{i,\,j-1}.$$

Если же $G(\rho_{i-1,\,j}) = 0$, то

$$k_{ij} = k_{i,\,j-1}.$$

Так как, в силу (42), (39), (28.3),

$$\sum_{j=1}^{2^{i-1}} G(\rho_{i-1,\,j}) = G(1) - G(0) \neq 0,$$

то хотя бы для одного j' при фиксированном i будем иметь

$$G(\rho_{i-1,\,j'}) \neq 0,$$

т. е.

$$k_{i,\,0} \leqslant k_{i,\,j'-1} < k_{i,\,j'} \leqslant k_{i,\,2^{i-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$k_{i-1,\,2^{i-2}} = k_{i,\,0} < k_{i,\,2^{i-1}} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{44}$$

Введем числа a'_k, удовлетворяющие условиям:

$$a'_k = a_k, \quad k \neq k_{ij}, \qquad \sum_{k=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}} ka'_k = \frac{2G(\rho_{i-1,\,j})}{mu_i \cdot \lambda_{ij}}. \tag{45}$$

Очевидно,

$$0 < a'_k \leqslant a_k. \tag{46}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} x_p^{ij} &= a_{ij} + \frac{1}{2}\, mu_i \sum_{k=1}^{p} a'_k, \\ y_p^{ij} &= b_{ij} - \frac{1}{2}\, mu_{i+1} \sum_{k=1}^{p} a'_k \end{aligned}\right\} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через δ_p^{ij} интервал (x_{p-1}^{ij}, x_p^{ij}) и через Δ_p^{ij} — интервал (y_p^{ij}, y_{p-1}^{ij}) $(p=1, 2, 3, \ldots)$. В силу (46) и (4.1),

$$\sum_{p=1}^{\infty} a'_p \leqslant 1.$$

Следовательно, принимая во внимание (28.1) и (31), мы видим, что все точки y_p^{ij} лежат правее верхней грани точек x_p^{ij}; таким образом, интервалы δ_p^{ij} и Δ_p^{ij} взаимно не пересекаются и лежат на u_{ij}.

Далее,

$$\begin{aligned} m\delta_p^{ij} &= (x_p^{ij} - x_{p-1}^{ij}) = \frac{mu_i}{2} a'_p, \\ m\Delta_p^{ij} &= (y_{p-1}^{ij} - y_p^{ij}) = \frac{mu_{i+1}}{2} a'_p, \end{aligned} \tag{47}$$

и, в силу (28.1) и (32),

$$m\delta_p^{ij} \geqslant m\Delta_p^{ij}. \tag{48}$$

Введем вспомогательную функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda_{ij}\cdot p, & \text{если } x \in \delta_p^{ij} \quad (k_{i,\,j-1} < p \leqslant k_{i,\,j}), \\ -\lambda_{i+1,\,2j-1}\cdot p, & \text{если } x \in \Delta_p^{ij} \quad (k_{i+1,\,2j-2} < p \leqslant k_{i+1,\,2j-1}), \\ -\lambda_{i+1,\,2j}\cdot p, & \text{если } x \in \Delta_p^{ij} \quad (k_{i+1,\,2j-1} < p \leqslant k_{i+1,\,2j}), \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [0, 1]. \end{cases} \tag{49}$$

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x) = 0 \quad (x \in H).$ (50)

2) Если $x \in u_{ij}$, то или

$$\varphi(x) = 0, \tag{51.1}$$

или

$$k_{i,\,j-1} < |\varphi(x)| \leqslant k_{i+1,\,2j}. \tag{51.2}$$

3) В силу свойства 2), $\varphi(x)$ суммируема на u_{ij}, причем, пользуясь последовательно соотношениями (49), (47), (45), (43), будем иметь:

$$(L)\int_{u_{ij}} \varphi(x)\,dx = \sum_{p=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}} \lambda_{ij}\cdot p\cdot m\delta_p^{ij} - \sum_{p=k_{i+1,\,2j-2}+1}^{k_{i+1,\,2j-1}} \lambda_{i+1,\,2j-1}\cdot p\cdot m\Delta_p^{ij} -$$
$$- \sum_{p=k_{i+1,\,2j-1}+1}^{k_{i+1,\,2j}} \lambda_{i+1,\,2j}\cdot p\cdot m\Delta_p^{ij} = \frac{\lambda_{ij}\cdot mu_i}{2} \sum_{p=k_{i,\,j-1}+1}^{k_{ij}} pa'_p -$$
$$- \frac{\lambda_{i+1,\,2j-1}\cdot mu_{i+1}}{2} \sum_{p=k_{i+1,\,2j-2}+1}^{k_{i+1,\,2j-1}} pa'_p - \frac{\lambda_{i+1,\,2j}\cdot mu_{i+1}}{2} \sum_{p=k_{i+1,\,2j-1}+1}^{k_{i+1,\,2j}} pa'_p =$$
$$= G(\rho_{i-1,\,j}) - G(\rho_{i,\,2j-1}) - G(\rho_{i,\,2j}) = 0,$$

т. е.

$$(L)\int_{u_{ij}} \varphi(x)\,dx = 0 \tag{52}$$

для всех i и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$; аналогично, на основании (38), получим:

$$(L)\int_{u_{ij}} |\varphi(x)|\,dx = |G(\rho_{i-1,\,j})| + |G(\rho_{i,\,2j-1})| + |G(\rho_{i,\,2j})| \leqslant 3w(G, \rho_{i-1,\,j}). \tag{53}$$

4) $\varphi(x)$ принимает только целые значения на $[0, 1]$, и для любого атурального p_0 $|\varphi(x)|$ может принимать значение, равное p_0, только а интервалах вида $\delta_{p_0}^{ij}$ и $\Delta_{p_0}^{ij}$. При этом если

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}\{x,\ |\varphi(x)| > n,\quad x \in [0, 1]\},\quad n \text{ — целое,} \tag{54}$$

о на основании (49) будем иметь:

$$\mathscr{E}_n \subset \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \sum_{p=n+1}^{\infty} (\delta_p^{ij} + \Delta_p^{ij}),$$

ткуда [см. (47) и (48)] следует:

$$0 \leqslant n \cdot m\mathscr{E}_n \leqslant n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \sum_{p=n+1}^{\infty} (m\delta_p^{ij} + m\Delta_p^{ij}) \leqslant n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \sum_{p=n+1}^{\infty} 2m\delta_p^{ij} =$$

$$= n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \sum_{p=n+1}^{\infty} mu_{ij} \cdot a_p' = n \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p' \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} mu_{ij} \leqslant n \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p'.$$

Так как на основании (45) и (4.3)

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p' = 0,$$

о отсюда вытекает, что

$$m\mathscr{E}_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{55}$$

5)

$$(L)\int_{\Delta_p^{ij}} \varphi(x)\,dx = \begin{cases} 0, & p \leqslant k_{i+1,\,2j-2}, \\ -\lambda_{i+1,\,2j-1} \cdot \dfrac{mu_{i+1}}{2}\, pa_p', & k_{i+1,\,2j-2} < p \leqslant k_{i+1,\,2j-1}, \\ -\lambda_{i+1,\,2j} \cdot \dfrac{mu_{i+1}}{2}\, pa_p', & k_{i+1,\,2j-1} < p \leqslant k_{i+1,\,2j}, \\ 0, & k_{i+1,\,2j} > p, \end{cases}$$

$$(L)\int_{\delta_p^{i+1,\,2j-1} + \delta_p^{i+1,\,2j}} \varphi(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & p \leqslant k_{i+1,\,2j-2}, \\ +\lambda_{i+1,\,2j-1} \cdot \dfrac{mu_{i+1}}{2}\, pa_p', & k_{i+1,\,2j-2} < p \leqslant k_{i+1,\,2j-1}, \\ +\lambda_{i+1,\,2j} \cdot \dfrac{mu_{i+1}}{2}\, pa_p', & k_{i+1,\,2j-1} < p \leqslant k_{i+1,\,2j}, \\ 0, & k_{i+1,\,2j} > p \end{cases}$$

см. (49) и (47)], следовательно,

$$(L)\int_{\Delta_p^{ij}} \varphi(x)\,dx = -(L)\int_{\delta_p^{i+1,\,2j-1} + \delta_p^{i+1,\,2j}} \varphi(x)\,dx \tag{56}$$

ля всех p, всех i и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\Phi_n(x) = (L)\int_0^x [\varphi(t)]^n\, dt \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

и покажем, что для всех $x \in [0, 1]$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x). \tag{5}$$

Возьмем произвольное n и определим натуральное число q из услови

$$k_{q,0} < n \leqslant k_{q,\,2^{q-1}}, \tag{5}$$

что возможно в силу (44).

На основании (50), $[\varphi(x)]^n = 0$ для $x \in H$. Рассмотрим поведение фун ции $[\varphi(x)]^n$ на интервале u_{ij} для различных значений i и j.

а) Пусть $i \leqslant q-2$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$. Тогда, в силу (51),

$$|\varphi(x)| \leqslant k_{i+1,\,2j} \leqslant k_{q-1,\,2^{q-2}} < n,$$

т. е.

$$[\varphi(x)]^n = \varphi(x) \quad (x \in u_{ij}).$$

б) Пусть $i \geqslant q+1$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{i-1}$. Тогда, в силу (51), или $\varphi(x) = 0$, ил

$$|\varphi(x)| \geqslant k_{i,\,j-1} > k_{q,\,2^{q-1}} \geqslant n,$$

т. е.

$$[\varphi(x)]^n = 0 \quad (x \in u_{ij}).$$

в) Пусть

$$x \in u_{q-1,\,j} + u_{q,\,2j-1} + u_{q,\,2j} \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}).$$

Если

$$x \in u_{q-1,\,j} + u_{q,\,2j-1} + u_{q,\,2j} - \\ - \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_p^{q-1,\,j} + \delta_p^{q,\,2j-1} + \delta_p^{q,\,2j} + \Delta_p^{q-1,\,j} + \Delta_p^{q,\,2j-1} + \Delta_p^{q,\,2j}),$$

то, в силу (49),

$$\varphi(x) = [\varphi(x)]^n = 0.$$

Если $x \in \delta_p^{q-1,\,j}$, то, в силу (49),

$$|\varphi(x)| \leqslant k_{q-1,\,j} \leqslant k_{q,0} < n$$

и

$$[\varphi(x)]^n = \varphi(x) \quad (p \geqslant 1).$$

Если $x \in \delta_p^{q,\,2j-1} + \delta_p^{q,\,2j}$, то, в силу (49), или $|\varphi(x)| = p$, или $\varphi(x) =$ (следовательно,

$$[\varphi(x)]^n = \varphi(x) \quad (p \leqslant n), \qquad [\varphi(x)]^n = 0 \quad (p > n).$$

Если $x \in \Delta_p^{q-1,\,j}$, то, в силу (49), или $\varphi(x) = 0$, или $|\varphi(x)| = p$, сле довательно,

$$[\varphi(x)]^n = \varphi(x) \quad (p \leqslant n), \qquad [\varphi(x)]^n = 0 \quad (p > n).$$

Если $x \in \Delta_p^{q,\,2j-1} + \Delta_p^{q,\,2j}$, то, в силу (49), или $\varphi(x) = 0$, или

$$|\varphi(x)| > k_{q+1,\,4j-4} \geqslant k_{q,\,2^{q-1}} \geqslant n,$$

.е.

$$[\varphi(x)]^n = 0 \quad (p \geqslant 1).$$

зедем полученные результаты в таблицу:

$$[\varphi(x)]^n = \begin{cases} \varphi(x), & x \in u_{ij}, \quad i \leqslant q-2, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}, \\ 0, & x \in u_{ij}, \quad i \geqslant q+1, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}, \\ \varphi(x), & x \in \delta_p^{q-1,\,j}, \quad p \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ \varphi(x), & x \in \delta_p^{q,\,2j-1} + \delta_p^{q,\,2j}, \quad p \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ 0, & x \in \delta_p^{q,\,2j-1} + \delta_p^{q,\,2j}, \quad p > n, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ \varphi(x), & x \in \Delta_p^{q-1,\,j}, \quad p \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ 0, & x \in \Delta_p^{q-1,\,j}, \quad p > n, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ 0, & x \in \Delta_p^{q,\,2j-1} + \Delta_p^{q,\,2j}, \quad p \geqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}, \\ 0, & \text{в остальных точках отрезка } [0,\,1]. \end{cases} \qquad (60)$$

В частности, так как отрезок

$$\rho_q \subset [0,\,1] - \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}$$

ересекается с интервалами u_{ij} только для $i \geqslant q+1$, то

$$[\varphi(x)]^n = 0 \quad (x \in \rho_q) \qquad (61)$$

Пользуясь последовательно соотношениями (60), (61), (56), (49), (47) (45), будем иметь [см. рис. 2]:

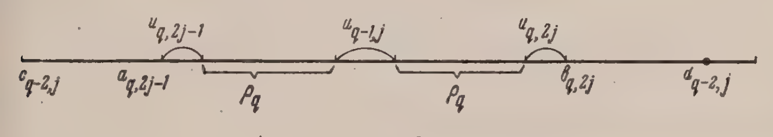


Рис. 2

$$(L)\int_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(x)]^n\,dx = (L)\int_{u_{q-1,\,j}} [\varphi(x)]^n\,dx + (L)\int_{u_{q,\,2j-1}} [\varphi(x)]^n\,dx +$$

$$+ (L)\int_{u_{q,\,2j}} [\varphi(x)]^n\,dx = \sum_{p=1}^{\infty} (L)\int_{\delta_p^{q-1,\,j}} \varphi(x)\,dx + \sum_{p=1}^{n} (L)\int_{\Delta_p^{q-1,\,j}} \varphi(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n} (L)\int_{\delta_p^{q,\,2j-1}+\delta_p^{q,\,2j}} \varphi(x)\,dx = \lambda_{q-1,\,j} \sum_{p=k_{q-1,\,j-1}+1}^{k_{q-1,\,j}} p \cdot m\delta_p^{q-1,\,j} =$$

$$= \frac{\lambda_{q-1,\,j} \cdot mu_{q-1}}{2} \sum_{p=k_{q-1,\,j-1}+1}^{k_{q-1,\,j}} pa'_p = G(\rho_{q-2,\,j}),$$

т. е.

$$(L)\int\limits_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(x)]^n\,dx = G(\rho_{q-2,\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^{q-1}). \qquad (6$$

Далее, так как $|\varphi(x)| \geqslant |[\varphi(x)]^n|$, то, на основании (53) и (38),

$$(L)\int\limits_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} |[\varphi(x)]^n|\,dx = (L)\int\limits_{u_{q-1,\,j}} |[\varphi(x)]^n|\,dx + (L)\int\limits_{u_{q,\,2j-1}} |[\varphi(x)]^n|\,dx +$$

$$+ (L)\int\limits_{u_{q,\,2j}} |[\varphi(x)]^n|\,dx \leqslant (L)\int\limits_{u_{q-1,\,j}} |\varphi(x)|\,dx + (L)\int\limits_{u_{q,\,2j-1}} |\varphi(x)|\,dx +$$

$$+ (L)\int\limits_{u_{q,\,2j}} |\varphi(x)|\,dx \leqslant 3w(G,\,\rho_{q-2,\,j}) + 3w(G,\,\rho_{q-1,\,2j}) +$$

$$+ 3w(G,\,\rho_{q-1,\,2j-1}) \leqslant 9w(G,\,\rho_{q-2,\,j}).$$

Итак,

$$(L)\int\limits_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} |[\varphi(x)]^n|\,dx \leqslant 9w(G,\,\rho_{q-2,\,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant 2^{q-2}). \qquad (6$$

Положим

$$Q_q = [0,\,1] - \sum_{j=1}^{2^{q-2}} (a_{q,\,2j-1},\; b_{q,\,2j}).$$

В силу (60) и (52),

$$(L)\int\limits_{u_{ij}} [\varphi(x)]^n\,dx = (L)\int\limits_{u_{ij}} \varphi(x)\,dx = 0 \quad (i \leqslant q-2,\; 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1})$$

и

$$(L)\int\limits_{u_{ij}} [\varphi(x)]^n\,dx = 0 \quad (i \geqslant q+1,\quad 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}).$$

Отсюда следует, что для $x \in H \cdot Q_q$

$$\Phi_n(x) = (L)\int\limits_0^x [\varphi(t)]^n\,dt = \sum{}^{(x)} (L)\int\limits_{u_{ij}} [\varphi(t)]^n\,dt + \sum_{j=1}^{v} (L)\int\limits_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(t)]^n\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{v} (L)\int\limits_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(t)]^n\,dt, \qquad (6$$

где $\Sigma^{(x)}$ распространяется на все интервалы $u_{ij} \subset Q_q \cdot [0,\,x]$, а v ест число интервалов $(a_{q,\,2j-1},\; b_{q,\,2j})$ при данном q, лежащих на отрезке $[0,\,x$ или, что то же самое, число интервалов $u_{q-1,\,j}$ на этом отрезке.

Все предыдущие рассуждения проводятся для n и q, удовлетворяю щих неравенству (59). Рассмотрим различные возможные положен точки x_0 на $[0,\,1]$.

1) Точка $x_0 = 1$ принадлежит множеству $Q_q \cdot H$ для всех $q \geqslant 2$, слезательно, в силу (64), (42), (39) и (28.3), для всех $n > k_{2,0}$

$$\Phi_n(1) = (L)\int_0^1 [\varphi(x)]^n dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^{q-2}} (L) \int_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(x)]^n dx = \sum_{j=1}^{2^{q-2}} G(\rho_{q-2,\,2^{q-2}}) = G(1). \tag{65}$$

2) Пусть $x_0 = a_{i_0 j_0}$. Тогда если для $n > k_{i_0+1,2^{i_0}}$ подобрать q, удовлеоряющее неравенству (59), то будем иметь:

$$i_0 \leqslant q-2,$$

к как, в силу (59),

$$k_{q,\,2^{q-1}} \geqslant n > k_{i_0+1,2^{i_0}}$$

следовательно,

$$q > i_0 + 1.$$

таком случае $x \in Q_q \cdot H$, и, применяя соотношение (64), получаем:

$$(L)\int_0^{x_0} [\varphi(t)]^n dt = \sum_{j=1}^{v_0} (L) \int_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(t)]^n dt,$$

е v_0 есть число интервалов $u_{q-1,\,j}$, лежащих на отрезке $[0, x_0]$. силу (38), v_0 равно числу отрезков

$$\rho_{q-2,\,j} = [c_{q-2,\,j}, d_{q-2,\,j}],$$

жащих на $[0, x_0]$. Так как $i \leqslant q-2$, то

$$x_0 = a_{i_0 j_0} = d_{q-2,\,v_0}.$$

едовательно, на основании (62), (42) и (28.3),

$$(L)\int_0^{x_0} [\varphi(t)]^n dt = \sum_{j=1}^{v_0} (L) \int_{a_{q,\,2j-1}}^{b_{q,\,2j}} [\varphi(t)]^n dt = \sum_{j=1}^{v_0} G(\rho_{q-2,\,j}) =$$

$$= G(d_{q-2,\,v_0}) = G(a_{i_0 j_0}) = G(x_0).$$

силу произвольности выбора i_0 и j_0, отсюда вытекает, что

$$\Phi_n(a_{i,\,j}) = G(a_{i,\,j}) \tag{66}$$

я $i = 1, 2, 3, \ldots, 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$ и $n > k_{i+1,\,2^i}$.

3) Пусть $x_0 \in [\alpha_{i_0,\,j_0}, \beta_{i_0,\,j_0}]$. Тогда из (35), (50), (51) следует, что

$$|\varphi(x)| < k_{i_0+1,\,2j_0} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots;\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}).$$

Значит, для $n > k_{i_0+1,\,2j_0}$ на основании (66) имеем:

$$\Phi_n(x_0) = (L)\int_0^{x_0} [\varphi(x)]^n dx =$$

$$= (L)\int_0^{a_{i_0 j_0}} [\varphi(x)]^n dx + (L)\int_{a_{i_0 j_0}}^{x_0} [\varphi(x)]^n dx = G(a_{i_0 j_0}) + (L)\int_{a_{i_0 j_0}}^{x_0} \varphi(x)\, dx,$$

т. е.

$$\Phi_n(x_0) = G(a_{i_0 j_0}) + (L)\int\limits_{a_{i_0 j_0}}^{x_0} \varphi(x)\,dx \qquad (6$$

для $x_0 \in [\alpha_{i_0, j_0}, \beta_{i_0, j_0}]$, $n > k_{i_0+1,\, 2^{i_0}}$. В частности, учитывая (52) и (3
получаем:

$$\Phi_n(b_{i_0 j_0}) = G(a_{i_0 j_0}) + (L)\int\limits_{a_{i_0 j_0}}^{b_{i_0 j_0}} \varphi(x)\,dx = G(b_{i_0 j_0}) \quad (n > k_{,\,+1, 2^{i_0}}). \qquad (6$$

В силу (35) и (50), $\varphi(x)$ равна нулю на отрезках $[\alpha_{i_0 j_0}, a_{i_0 j_0}]$ и $[b_{i_0 j_0}, \beta_{i_0 j_0}]$. Из (67) следует, что $\Phi_n(x)$ постоянна на этих отрезках и равна

$$G(a_{i_0 j_0}) = G(b_{i_0 j_0}).$$

На основании (28.4), это эквивалентно тому, что

$$\Phi_n(x) = G(x) \quad (x \in H \cdot [\alpha_{i_0, j_0}, \beta_{i_0, j_0}], \quad n > k_{i_0+1,\, 2^{i_0}}). \qquad (6$$

4) Пусть x_0 — точка второго рода множества P. Возьмем последовательность $\rho_{i, j(i)}$, определенную условием (40). Имеем:

$$\rho_{i, j(i)} = [c_{i, j(i)}, d_{i, j(i)}],$$

и точка $d_{i, j(i)}$ есть точка $a_{i', j'}$ для некоторых значений i' и j', прич $i' \leqslant i$, $1 \leqslant j' \leqslant 2^{i'-1}$. Возьмем некоторое n и определим q из условия (5 Тогда для всех $i \leqslant q-2$, $n > k_{i+1,\, 2^i}$, в силу соотношения (56), получае

$$\Phi_n(d_{i, j(i)}) = \Phi_n(a_{i', j'}) = G(a_{i', j'}) = G(d_{i, j(i)}).$$

В частности,

$$\Phi_n(d_{q-2, j(q-2)}) = G(d_{q-2, j(q-2)}).$$

Отсюда находим:

$$\Phi_n(x_0) = \Phi_n(x_0) - \Phi_n(d_{q-2, j(q-2)}) + G(d_{q-2, j(q-2)}) - G(x_0) + G(x_0),$$

$$|\Phi_n(x_0) - G(x_0)| \leqslant |\Phi_n(x_0) - \Phi_n(d_{q-2, j(q-2)})| + |G(d_{q-2, j(q-2)}) - G(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant w(\Phi_n, \rho_{q-2, j(q-2)}) + w(G, \rho_{q-2, j(q-2)}). \qquad (7$$

Оценим $w(\Phi_n, \rho_{q-2, j})$, $1 \leqslant j \leqslant 1^{q-2}$ (см. рис. 3). В силу (61),

$c_{q-2,j}$ $a_{q,2j-1}$ $a_{q-1,j}$ $a_{q,2j}$ $b_{q,2j}$ $d_{q-2,j}$ ρ_q $a_{q,2j-1}$ ρ_q $\rho_{q-2,j}$

Рис. 3

$$w(\Phi_n, \rho_{q-2, j}) = w(\Phi_n, (a_{q, 2j-1}, b_{q, 2j})),$$

откуда, на основании (63), имеем:

$$w(\Phi_n, \rho_{q-2, j}) \leqslant (L)\int\limits_{a_{q, 2j-1}}^{b_{q, 2j}} |[\varphi(x)]^n|\,dx \leqslant 9w(G, \rho_{q-2, j}).$$

з (70) и (71) получаем:

$$|\Phi_n(x_0) - G(x_0)| \leqslant 10\, w(G, \rho_{q-2,\, j(q-2)}).$$

усть $n \to \infty$. Тогда, в силу (59) и (44), $q \to \infty$. На основании (28.2) (40),

$$w(G, \rho_{q-2,\, j(q-2)}) \xrightarrow[q\to\infty]{} 0,$$

іедовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x_0) = G(x_0). \tag{72}$$

бъединяя (65), (66), (67) и (72) и замечая, что $\Phi_n(0) = 0$ для всех n, ключаем, что функция $\Phi(x)$ [см. (58)] определена для всех $x \in [0, 1]$ и

$$\Phi(x) = \begin{cases} G(x), & x \in P, \\ G(a_{ij}) + (L)\int\limits_{a_{ij}}^{x} \varphi(t)\,dt, & x \in (\alpha_{ij}, \beta_{ij}). \end{cases} \tag{73}$$

сли принять во внимание (69) и (34), то это соотношение можно запсать в виде:

$$\Phi(x) = \begin{cases} G(x), & x \in H, \\ G(a_{ij}) + (L)\int\limits_{a_{ij}}^{x} \varphi(t)\,dt, & x \in u_{ij}. \end{cases} \tag{74}$$

Положим

$$r_i = \left[\frac{6w(G, (0, 1))}{\varepsilon_i}\right] + 1 \tag{75}$$

определим функцию $\psi(x)$ следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_{r_i}(x), & \text{если } x \in u_{ij}, \\ 0, & \text{если } x \in H. \end{cases} \tag{76}$$

есь $\varphi_{r_i}(x)$ определяется через $\varphi(x)$ при помощи равенства (5), в коре полагаем $[a, b] = u_{ij}$.

Отметим некоторые свойства функции $\psi(x)$:

1) $\psi(x) = 0 \quad (x \in H)$. (77)

2) В силу (5.1) и (51),

$$|\psi(x)| \leqslant k_{i+1,\, 2j} \quad (x \in u_{ij}). \tag{78}$$

3) В силу (5.2) и (52),

$$(L)\int\limits_{u_{ij}} \psi(x)\,dx = (L)\int\limits_{u_{ij}} \varphi(x)\,dx = 0. \tag{79}$$

В силу (5.4), (76), (53), (75),

$$w(I_{ij}, u_{ij}) \leqslant \frac{1}{r_i}(L)\int\limits_{u_{ij}} |\varphi(x)|\,dx \leqslant \frac{3w(G, \rho_{i-1,\, j})}{r_i} < \frac{\varepsilon_i}{2}, \tag{80}$$

где

$$I_{ij}(x) = (L)\int_{a_{ij}}^{x} \psi(t)\,dt \quad (x \in u_{ij}),$$

и, в силу (5.2) и (5.7),

$$(L)\int_{u_{ij}} [\psi(x)]^n\,dx = (L)\int_{u_{ij}} [\varphi(x)]^n\,dx$$

для всех n.

4) Пусть E_n — множество точек $x \in [0, 1]$, для которых $|\psi(x)| >$ (n — целое). В силу (77), (5.6), (54), (50), (55), имеем:

$$mE_n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} mE_n\cdot u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} m(\mathscr{E}_n\cdot u_{ij}) = m\mathscr{E}_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\Psi_n(x) = (L)\int_0^x [\psi(t)]^n\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Учитывая (77), (82), (57) и (50), получим для $x \in H$:

$$\Psi_n(x) = (L)\int_0^x [\psi(t)]^n dt = \sum\nolimits^{(x)} (L)\int_{u_{ij}} [\psi(t)]^n\,dt = \sum\nolimits^{(x)} (L)\int_{u_{ij}} [\varphi(t)]^n dt = \Phi_n \,(\ldots$$

где суммирование $\Sigma^{(x)}$ распространяется на все интервалы $u_{ij} \subset [0,$ Следовательно, учитывая (58) и (74), находим для $x \in H$:

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x) = G(x).$$

Пусть $x \in u_{ij}$. Тогда для $n > k_{i+1,\,2j}$, в силу (78), имеем:

$$\Psi_n(x) = (L)\int_0^x [\psi(t)]^n\,dt =$$

$$= (L)\int_0^{a_{ij}} [\psi(t)]^n\,dt + (L)\int_{a_{ij}}^{x} [\psi(t)]^n\,dt = \Psi_n(a_{ij}) + (L)\int_{a_{ij}}^{x} \psi(t)\,dt,$$

следовательно, в силу (84),

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(x) = G(a_{ij}) + (L)\int_{a_{ij}}^{x} \psi(t)\,dt \quad (x \in u_{ij}).$$

Из соотношений (83), (84), (85) выводим, согласно (3), что $\psi(x)$ имеет неопределенный A-интеграл на $[0, 1]$ и

$$\Psi(x) = (A)\int_0^x \psi(t)\,dt = \begin{cases} G(x), & x \in H, \\ G(a_{ij}) + (L)\displaystyle\int_{a_{ij}}^{x} \psi(t)\,dt, & x \in u_{ij}. \end{cases}$$

силу (86), (80), (81),

$$w(\Psi, u_{ij}) = w(I_{ij}, u_{ij}) < \frac{\varepsilon_i}{2}. \tag{87}$$

Определим теперь $f(x)$. Возьмем интервал u_{ij} для произвольных $= 1, 2, 3, \ldots$ и $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$. По теореме Лузина, для некоторого $\eta_{ij} > 0$, торое будет определено ниже, найдется совершенное множество $P_{ij} \subset u_{ij}$, $P_{ij} > mu_{ij} - \eta_{ij}$, на котором функция $\psi(x)$ непрерывна. Множество

$$R_{ij} = P_{ij} + \{a_{ij}\} + \{b_{ij}\},$$

евидно, замкнуто, и

$$mR_{ij} > mu_{ij} - \eta_{ij}. \tag{88}$$

Положим

$$h_{ij}(x) = \psi(x, R_{ij}), \tag{89}$$

е $\psi(x, R_{ij})$ есть непрерывная на $[a_{ij}, b_{ij}]$ функция, равная $\psi(x)$ для R_{ij} и линейная в смежных интервалах R_{ij}. В силу (77),

$$h_{ij}(a_{ij}) = h_{ij}(b_{ij}) = 0 \tag{90}$$

в силу (78),

$$|h_{ij}(x)| \leqslant k_{i+1,\,2j} \quad (x \in u_{ij}). \tag{91}$$

Обозначим

$$(L) \int\limits_{u_{ij}} h_{ij}(x)\,dx = \gamma_{ij}. \tag{92}$$

силу (89), (79), (91), (88), (78),

$$|\gamma_{ij}| = \left| (L) \int\limits_{u_{ij}} h_{ij}(x)\,dx \right| =$$

$$= \left| (L) \int\limits_{u_{ij}} \psi(x)\,dx - (L) \int\limits_{u_{ij}-R_{ij}} \psi(x)\,dx + (L) \int\limits_{u_{ij}-R_{ij}} h_{ij}(x)\,dx \right| \leqslant 2\eta_{ij} \cdot k_{i+1,\,2j}. \tag{93}$$

Далее, построим функцию $\chi_{ij}(x)$ $(x \in [a_{ij}, a_{ij}])$ такую, что

а) $\chi_{ij}(x)$ непрерывна на $[a_{ij}, b_{ij}]$, (94.1)

б) $\chi_{ij}(a_{ij}) = \chi_{ij}(b_{ij}) = 0$, (94.2)

в) $\chi_{ij}(x) \cdot \gamma_{ij} \geqslant 0$, (94.3)

г) $(L) \int\limits_{u_{ij}} \chi_{ij}(x)\,dx = \gamma_{ij}$. (94.4)

остальном функция $\chi_{ij}(x)$ произвольна.

Положим

$$f(x) = \begin{cases} h_{ij}(x) - \chi_{ij}(x), & x \in u_{ij}, \\ 0, & x \in H. \end{cases} \tag{95}$$

роверим, что $f(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы (29.1)—(29.7).

1) Условие (29.1) выполнено, так как, в силу (95) и (34),

$$f(x) = 0 \quad (x \in P).$$

2) Условие (29.2) выполнено, так как, в силу (95) и (35),

$$f(x) = 0 \quad (x \in [\alpha_{ij}, \beta_{ij}] - (a_{i,j}, b_{i,j})).$$

3) Так как $h_{ij}(x)$ непрерывна на $[a_{ij}, b_{ij}]$, то, в силу (94.1), (90), (94.2), (95), $f(x)$ непрерывна на $[a_{ij}, b_{ij}]$ и обращается в нуль в концах этого отрезка. Принимая во внимание условие (29.2), заключаем, что $f(x)$ непрерывна на $[\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}]$. Итак, условие (29.3) выполнено.

4) В силу (95), (94.4), (92), (29.2),

$$(L)\int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}} f(x)\,dx = (L)\int_{u_{ij}} f(x)\,dx = (L)\int_{u_{ij}} h_{ij}(t)\,dt - (L)\int_{u_{ij}} \chi_{ij}(t)\,dt = 0,$$

т. е. выполнено условие (29.4).

5) Покажем, что функция

$$A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$$

определена для всех $x \in [0, 1]$. Положим

$$z(x) = \psi(x) - f(x) \quad (x \in [0, 1]) \tag{96}$$

и

$$z_{ij}(x) = \begin{cases} |\psi(x) - f(x)|, & x \in u_{ij}, \\ 0, & x \bar{\in} u_{ij}. \end{cases} \tag{97}$$

В силу (77) и (95),

$$|z(x)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} z_{ij}(x). \tag{98}$$

Применяя последовательно соотношения (97), (95), (89), (88), (78), (91), (94.3), (94.4), (93), имеем:

$$\begin{aligned}(L)\int_0^1 z_{ij}(x)\,dx &= (L)\int_{u_{ij}} |\psi(x) - f(x)|\,dx = (L)\int_{u_{ij}} |\psi(x) - h_{ij}(x) + \chi_{ij}(x)|\,dx \leqslant \\ &\leqslant (L)\int_{R_{ij}} |\psi(x) - h_{ij}(x)|\,dx + (L)\int_{u_{ij}-R_{ij}} |\psi(x) - h_{ij}(x)|\,dx + \\ &+ (L)\int_{u_{ij}} |\chi_{ij}(x)|\,dx \leqslant 2\eta_{ij}\cdot k_{i+1,\,2j} + |\gamma_{ij}| \leqslant 4\eta_{ij}\cdot k_{j+1,\,2j}.\end{aligned} \tag{99}$$

Если η_{ij} выбрано так, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} \eta_{ij}\cdot k_{i+1,\,2j} < \infty, \tag{100}$$

то функция $z(x)$ суммируема на $[0, 1]$. Предположим, что условие (100) выполнено. Тогда

$$(A)\int_0^x z(t)\,dt = (L)\int_0^x z(t)\,dt \tag{101}$$

для всех $x \in [0, 1]$, и так как $\psi(t)$ имеет неопределенный A-интеграл на $[0, 1]$ [см. (86)], то, на основании (96), $f(t)$ также имеет неопреде-

множая обе части этого равенства на D^2 (в смысле $\smile$-умножения) и итывая (50), получаем:

$$2D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = D^2 \smile \hat{d}D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0). \qquad (51)$$

о согласно (42), (44), (45) мы имеем:

$$D^2 \smile \hat{d}D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0) = -2D^2 \smile D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0).$$

сюда и из (51) следует, что

$$2D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = -2D^2 \smile D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0)$$

я произвольного класса гомологий D^2. Коэффициент 2 в этом равенве может быть сокращен (ибо четырехмерных кручений многообразие не содержит), и мы имеем окончательно:

$$D^2 \smile \tilde{Y}^2_{\mathfrak{S}_0} = -D^2 \smile D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0). \qquad (52)$$

аким образом, формула (17) принимает следующий вид [см. (48), (52)]:

$$Z^4 (\mathfrak{S}) = Z^4 (\mathfrak{S}_0) + D^2 \smile D^2 - D^2 \smile D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0), \qquad (53)$$

е $D^2 = D^2 (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S})$. Заметив, наконец, что

$$D^2 (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}) - D^2 (\mathfrak{S}_0, \overline{\mathfrak{S}}_0) = D^2 (\overline{\mathfrak{S}}_0, \mathfrak{S})$$

м. 6°, (в)], мы можем переписать формулу (53) в виде:

$$Z^4 (\mathfrak{S}) = Z^4 (\mathfrak{S}_0) + D^2 (\mathfrak{S}_0, \mathfrak{S}) \smile D^2 (\overline{\mathfrak{S}}_0, \mathfrak{S}). \qquad (54)$$

ормулы (53) и (54) принадлежат Хопфу [см. ([4])].

Поступило
16.VIII.1954

ЛИТЕРАТУРА

Hopf H., Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, 96 (1927), 225—250.
Stiefel E., Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv., 8 (1936), 305—353.
Стинрод Н., Топология косых произведений, Москва, 1953.
Hopf H., Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions, Topologie algébrique, 55—59. Colloque international du centre National de la Recherche Scientifique, № 12, Paris, 1949.
Hopf H., Sur une formule de la théorie des espaces fibrés, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles (1950), 117—121.
Болтянский В., Векторные поля на многообразии, Доклады Ак. наук СССР, 80, № 3 (1951), 305—307.
Болтянский В., Секущие поверхности косых произведений, Доклады Ак. наук СССР, 85, № 1 (1952), 17—20.
Понтрягин Л. С., Характеристические циклы, Доклады Ак. наук СССР, 47 (1945), 242—245.
Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1954.
Болтянский В., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. Ин-та Ак. наук СССР, вып. 47, 1955.

и условие (100); пусть, например,

$$\eta_{ij} = \min\left[\frac{1}{k_{i+1,\,2j}\cdot 2^{2i}},\ \frac{\varepsilon_i}{k_{i+1,\,2j}}\right].$$

Тогда $w(A, u_{ij}) < \varepsilon_i$, и условие (29.7) выполнено.

Итак, функция $f(x)$ действительно удовлетворяет всем условиям (29.1) — (29.7). Лемма доказана.

Следствие. *Существует функция* $f(x)$ $(x \in [0, 1])$, *одновремен А-интегрируемая на* $[0, 1]$ *и интегрируемая в смысле узкого интегра Данжуа, для которой*

$$(A)\int_0^1 f(x)\,dx \neq (D)\int_0^1 f(x)\,dx,$$

причем если $D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt$, *то для всех* $x \in [0, 1]$

$$D'(x) = f(x).$$

Действительно, пусть u_{ij} и H имеют те же значения, что и в док зательстве леммы [см. обозначения (30) и (33) *]. Возьмем последов тельность $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы

$$\varepsilon_i = o(mu_i), \qquad (10$$

где u_i — любой из интервалов u_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} \varepsilon_i \leqslant c\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} mu_{ij} < \infty. \qquad (10$$

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая лемме при данной посл довательности $\{\varepsilon_i\}$. В силу (29.3), $f(x)$ суммируема на $(\beta_{ij}, \alpha_{ij})$.

Пусть, далее

$$L_{ij}(x) = (L)\int_{\alpha_{ij}}^{x} f(t)\,dt \quad (x \in (\beta_{ij}, \alpha_{ij})). \qquad (10$$

Оценим $w(L_{ij}, (\beta_{ij}, \alpha_{ij}))$. Из условий (29.3), (29.5), (29.6) выводим:

$$A(x) = A(a_{ij}) + (A)\int_{\alpha_{ij}}^{x} f(t)\,dt = G(\alpha_{ij}) + (L)\int_{\alpha_{ij}}^{x} f(t)\,dt = G(\alpha_{ij}) + L_{ij}(x),$$

следовательно, в силу (29.7),

$$w(L_{ij}, (\alpha_{ij}, \beta_{ij})) = w(A, (\alpha_{ij}, \beta_{ij})) < \varepsilon_i. \qquad (10$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} w(L_{ij}, (\alpha_{ij}, \beta_{ij})) < \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} \varepsilon_i < \infty.$$

* В соотношении (30) α_{ij}, β_{ij} имеют значения, определенные в формулиров леммы [см. пояснение к условию (28.1)].

ловие (29.1) показывает, что $f(x)$ суммируема на P, следовательно, c) интегрируема на $[0, 1]$ в смысле узкого интеграла Данжуа. Применяя последовательно соотношения (29.1), (29.4), (105), находим:

$$D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt = (L)\int_{P\cdot[0,\,x]} f(t)\,dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} (L)\int_{(\alpha_{ij},\,\beta_{ij})\cdot[0,\,x]} f(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} (L)\int_{(\alpha_{ij},\,\beta_{ij})\cdot[0,\,x]} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x\in P, \\ (L)\int_{\alpha_{ij}}^{x} f(t)\,dt = L_{ij}(x), & x\in(\alpha_{ij},\,\beta_{ij}). \end{cases} \tag{107}$$

силу (29.2), (34) и (35) * формулу (107) можно записать в виде:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x\in H, \\ (L)\int_{\alpha_{ij}}^{x} f(t)\,dt, & x\in u_{ij}. \end{cases} \tag{108}$$

з равенства (107), если принять во внимание условие (29.3), непосредственно видно, что

$$D'(x) = f(x) \quad (x\in(\alpha_{ij},\,\beta_{ij})),$$

$$D^{+}(\alpha_{ij}) = f(\alpha_{ij}) = 0, \qquad D^{-}(\beta_{ij}) = f(\beta_{ij}) = 0,$$

е $D^{+}(x)$ и $D^{-}(x)$ — правая и левая производные от $D(x)$. Остается доказать, что существуют и равны нулю следующие пределы:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{D(x)-D(x_0)}{x-x_0},$$

сли x_0 есть точка второго рода множества P,

$$\lim_{x\to\alpha_{ij}-0}\frac{D(x)-D(\alpha_{ij})}{x-\alpha_{ij}} \quad\text{и}\quad \lim_{x\to\beta_{ij}+0}\frac{D(x)-D(\beta_{ij})}{x-\beta_{ij}}.$$

се эти три предела можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0}\frac{D(x)-D(x_0)}{x-x_0},$$

е $x_0\in P$, а точка x при стремлении к точке x_0 пробегает бесконечно ного смежных интервалов множества P. В силу (30), точка x будет при ом пробегать бесконечно много интервалов u_{ij} и, следовательно, если $\in u_{i(x),\,j(x)}$, то

$$i(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}\infty. \tag{109}$$

Рассмотрим отношение

$$W(x) = \frac{D(x)-D(x_0)}{x-x_0} = \frac{D(x)}{x-x_0}$$

см. (107)]. Если $x\in H$, то, в силу (108), $D(x)=0$ и $W(x)=0$. Далее, из

* Соотношения (34) и (35) являются непосредственными следствиями определений (30) и (33).

определения (30) непосредственно следует, что расстояние между интервалом u_{ij} и множеством P равно mu_{ij}. Следовательно, если $x \in u_{ij}$, то $|x - x_0| \geqslant mu_{ij}$ и, в силу (108) и (105),

$$|W(x)| \leqslant \frac{w(L_{ij}, u_{ij})}{mu_{ij}}.$$

Применяя соотношения (109), (106), (103), получим;

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \bar{\in} H}} |W(x)| = \lim_{i \to \infty} \frac{w(L_{ij}, u_{ij})}{mu_{ij}} \leqslant \lim_{i \to \infty} \frac{\varepsilon_i}{mu_{ij}} = 0.$$

Итак, действительно функция $f(x)$ D-интегрируема на $[0, 1]$ и есть точная производная функции

$$D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0, 1].$$

При этом, принимая во внимание (107), (29.5), (29.6), (28.3), имеем:

$$D(1) = (D)\int_0^1 f(t)\,dt = 0, \quad A(1) = (A)\int_0^1 f(t)\,dt = G(1) \neq 0.$$

Таким образом.

$$(A)\int_0^1 f(t)\,dt \neq (D)\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Следовательно, функция $f(x)$ имеет неопределенный A-интеграл на $[0, 1]$ и одновременно интегрируема в узком смысле Данжуа на $[0, 1]$. При этом функция $f(x)$ есть точная производная своего неопределенного интеграла Данжуа и

$$(A)\int_0^1 f(t)\,dt \neq (D)\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Рассмотрим поведение функции

$$A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$$

на $[0, 1]$ в нескольких случаях в зависимости от выбора множества P и функции $G(x)$.

I. Множество P удовлетворяет условию (28.1) и $mP = m_0 > 0$. Возьмем на отрезке $[0, m_0]$ функцию $g(x)$ такую, что

а) $g(x)$ непрерывна на $[0, m_0]$,

б) $g(0) = 0, \ g(m_0) \neq 0,$ (110)

в) $g(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры.

Положим $G(x) = g(m\{P \cdot [0, x]\})$. Функция $G(x)$, очевидно, определена на $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям (28.2) — (28.4). Покажем, что $G(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры, содержащемся в множестве P.

Пусть

$$y(x) = m\{P\cdot[0, x]\}; \tag{111}$$

гда

$$G(x) = g(y). \tag{112}$$

ункция $y(x)$ удовлетворяет условию Липшица, следовательно, она ладает N-свойством и постоянна в смежных интервалах множества P. оэтому каждому множеству положительной меры $Y\subset[0, m_0]$ на оси соответствует множество X на оси ox такое, что

$$y(X) = Y, \quad X\subset P, \quad mX>0. \tag{113}$$

Обозначим через V_g множество точек $y\in[0, m_0]$, в которых функция $y)$ не имеет асимптотической производной. В силу (110), $mV_g>0$ оложим в соотношениях (113) $Y=V_g$ и обозначим соответствующее ножество X через V_G. Тогда

$$y(V_G) = V_g, \quad V_G\subset P, \quad mV_G>0.$$

усть P_1 есть множество точек плотности множества P; тогда

$$mV_G\cdot P_1 = mV_G>0.$$

редположим, что $x_0\in V_G\cdot P_1$ и в точке x_0 существует $G'_{as}(x_0)$. Это значит, о существует множество E, имеющее точку x_0 точкой плотности такое, что

$$G'_E(x_0) = G'_{as}(x_0).$$

ожно предположить, что $E\subset P$. Положим $E_1 = y(E)$. Легко провеить, что функция $y(x) = m\{P\cdot[0, x]\}$ для всякого множества $X\subset P$ реводит точку плотности x_0 множества X в точку плотности $y_0 = y(x_0)$ ножества $Y = y(x)$. Следовательно, точка $y_0 = y(x_0)$ есть точка плотсти множества E_1. Пусть $x'\in E$; тогда $y' = y(x')\in E_1$. В силу (112) и 11), имеем:

$$\frac{G(x_0)-G(x')}{x_0-x'} = \frac{g(y_0)-g(y')}{y_0-y'}\cdot\frac{y_0-y'}{x_0-x'} = \frac{g(y_0)-g(y')}{y_0-y'}\cdot\frac{m\{P\cdot[x', x_0]\}}{x_0-x'}.$$

есь $m\{P\cdot[x', x_0]\}$ понимается как функция x' при фиксированном x_0, ращающаяся в нуль при $x'=x_0$, т. е.

$$m\{P\cdot[x', x_0]\}\geqslant 0 \quad \text{при} \quad x\geqslant x'$$

$$m\{P\cdot[x', x_0]\}\leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_0<x'.$$

оскольку x_0 есть точка плотности множества P,

$$y_0-y' = m\{P\cdot[x', x_0]\}\neq 0$$

я всех $x'\neq x_0$. Из равенства

$$\lim_{x'\to x_0}\frac{m\{P\cdot[x', x_0]\}}{x_0-x'} = 1,$$

в силу непрерывности $y(x)$ и условия $E_1 = y(E)$, следует:

$$\lim_{\substack{x' \to x_0 \\ x' \in E}} \frac{G(x_0) - G(x')}{x_0 - x'} = \lim_{\substack{y' \to y_0 \\ y' \in E_1}} \frac{g(y_0) - g(y')}{y_0 - y'}.$$

Так как функция $G'_E(x_0)$ существует и равна $G'_{as}(x_0)$, то существует

$$g'_{E_1}(y_0) = G'_E(x_0) = G'_{as}(x_0),$$

а так как y_0 есть точка плотности множества E_1, то существует

$$g'(y_0) = G'_{as}(x_0),$$

что противоречит тому, что $y_0 \in V_g = y(V_G)$, и определению множества V_g.

Следовательно, во всех точках $x \in V_G \cdot P_1$ у функции $G(x)$ не существует асимптотической производной. В силу того, что $mV_G \cdot P_1 \geqslant 0$, функция $G(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры.

Так как, на основании (29.6), $A(x) = G(x)$ для $x \in P$ и $P_1 V_G \subset P$, то и функция $A(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры.

Итак, в случае I функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ интегрируема в узком смысле Данжуа на $[0, 1]$;

2) $D'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, где

$$D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt;$$

3) функция $A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$ определена для всех $x \in [0, 1]$ и непрерывна на $[0, 1]$;

4) $A(1) \neq D(1)$;

5) $A(x)$ не имеет асимптотической производной на множестве положительной меры.

II. Множество P удовлетворяет условию (28.1), $mP > 0$ и $G(x) = m\{P \cdot [0, x]\}$. Функция $G(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям (28.2) — (28.4). Так как $G'(x) = 1$ почти всюду на P, то, в силу (29.6), $A'_P(x) = 1$ для почти всех $x \in P$. Принимая во внимание (29.7) и (104), заключаем, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} w(A, u_{ij})$$

сходится. Следовательно, для почти всех $x \in P$ существует $A'(x) = A'_P(x) = 1$. Из условий (29.3) и (29.5) вытекает:

$$A(x) = A(\alpha_{ij}) + (A)\int_{\alpha_{ij}}^x f(t)\,dt = A(\alpha_{ij}) + (L)\int_{\alpha_{ij}}^x f(t)\,dt \quad (x \in (\alpha_{ij}, \beta_{ij})),$$

куда выводим:

$$A'(x) = f(x) \text{ для } x\,(\alpha_{ij}, \beta_{ij}).$$

ачит, $A'(x)$ существует почти всюду на $[0, 1]$ и

$$A'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для } x \in (\alpha_{ij}, \beta_{ij}), \\ 1 \neq f(x) = 0 & \text{для почти всех } x \in P \end{cases}$$

м. (29.1)], причем $mP > 0$.

Итак, в случае II функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ интегрируема в узком смысле Данжуа на $[0, 1]$;

2) $D'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, где

$$D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt;$$

3) функция $A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$ определена для всех $x \in [0, 1]$ и непре-ывна на $[0, 1]$;

4) $A(1) \neq D(1)$;

5) $A'(x)$ существует для почти всех $x \in [0, 1]$ и не равна $f(x)$ на ножестве положительной меры.

III. Множество P удовлетворяет условию (28.1), $mP = 0$; $G(x)$ — екоторая функция, удовлетворяющая условиям (28.2) — (28.4). В этом лучае, в силу того, что $G(1) - G(0) \neq 0$ и $G(x)$ постоянна в смежных нтервалах P [условия (28.3) и (28.4)], $mG(P) \neq 0$. Следовательно, в илу (29.6),

$$mA(P) \neq 0,$$

е. $A(x)$ не обладает N-свойством на $[0, 1]$.

Итак, в случае III функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ интегрируема в узком смысле Данжуа на $[0, 1]$;

2) $D'(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, где

$$D(x) = (D)\int_0^x f(t)\,dt;$$

3) функция $A(x) = (A)\int_0^x f(t)\,dt$ определена и непрерывна на $[0,1]$ для ех x;

4) $A(1) \neq D(1)$;

5) $A(x)$ не обладает N-свойством на $[0, 1]$.

В заключение приношу глубокую благодарность Д. Е. Меньшову за остановку задачи и внимательное руководство.

Поступило
20.X.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939.
[2] Kolmogoroff A., Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fund. Math., 7 (1925), 23—28.
[3] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М.— Л., 1936.
[4] Очан Ю. С., Обобщенный интеграл, Матем. сборн., 28 (70): 2 (1951), 293—336.
[5] Titchmarsh E. C., On conjugate functions, Proc. Lond. Math. Soc., 9 (1929), 49—80.
[6] Ульянов П. Л., Применение *A*-интеграла к одному классу тригонометрических рядов, Матем. сборн., 35 (77): 3 (1954), 469—490.
[7] Ульянов П. Л., Некоторые вопросы *A*-интегрирования, Доклады Ак. наук СССР, 102 (1955), 1077—1080.
[8] Ульянов П. Л., *A*-интеграл и сопряженные функции. Учен. записки МГУ, 181 (1956), 139 — 157.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 143—152

СУНЬ ЮН-ШЕН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(ВТОРОЕ СООБЩЕНИЕ)

В работе устанавливается точная верхняя грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ периодических функций класса $W^{(r)}(\alpha)$ при $r>1$ и всех α.

§ 1. Введение

В работе ([6]) мы рассмотрели задачу о нахождении точной верхней рани наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка -1 функций класса $W^{(r)}(\alpha)$ при $r\geqslant 6$ и всех α, а в работе ([7]) — ту ке задачу при $r>2$ и всех α. Кроме того, в работе ([7]) была решена налогичная задача для класса $W^{(r)}$ при всех $r>1$ *.

В настоящей работе мы получим решение нашей задачи для класса $V^{(r)}(\alpha)$ при $r>1$ и всех α. Именно, здесь будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 1 (основная). *Пусть* $f(x)\in W^{(r)}(\alpha)$, $r>1$, *и* α — *дейтвительное число, т. е.*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

де

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

и $\varphi(t)$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|\leqslant 1,\quad \int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0.$$

Тогда

$$\mathscr{E}_n[W^{(r)}(\alpha)]=\sup_{f\in W^{(r)}(\alpha)}E_n(f)_C=\sup_{\substack{f\in W^{(r)}(\alpha)\\ f\perp T_{n-1}}}\|f\|_C=$$

$$=\frac{1}{\pi}\min_{T_{n-1}}\int\limits_0^{2\pi}|K(t)-T_{n-1}(t)|\,dt=\frac{4}{\pi}\frac{K_{r,\alpha}}{n^r}\quad(n=1,2,\ldots),$$

* После того, как эта работа была сдана в печать, вышла в свет статья В. К. Дзядыка ([9]), в которой рассматриваемая задача для класса $W^{(r)}$ решена другим методом.

где

$$K_{r,\alpha} = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|,$$

$0 \leqslant \beta < 1$ *и* $\beta\pi$ — *корень уравнения*

$$H(\beta\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} = 0.$$

Центральная часть доказательства этой теоремы состоит в установлении того факта, что характеристическая функция

$$W(k) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2} + ku\right]}{(2\nu+1+u)^2}\, du,$$

где $0 \leqslant \beta < 1$ и $\beta\pi$ — корень уравнения $H(\beta\pi) = 0$, при $r > 1$ и всех α не имеет нулей на вещественной оси.

Мы будем пользоваться всеми обозначениями и определениями, введенными в работе ([6]). Кроме того, отметим, что все леммы §§ 3 и работы ([6]), доказанные нами при ограничении $r > 2$, сохраняют силу и при условии $r > 1$. Поскольку при переходе от случая $r > 2$ к случаю $r > 1$ доказательства почти не меняются, мы их приводить не будем и при ссылках на леммы будем считать их доказанными для $r > 1$.

Использованный в настоящей работе метод доказательства может быть применен при $\beta \neq 0$. Поскольку случаю $\beta = 0$ соответствует случай $\alpha = 1$, для которого рассматриваемая задача решена Б. Надем ([3]), мы на исследовании этого случая останавливаться не будем

§ 2. Исследование характеристической функции $W(k)$

Выведем аналог леммы 6 работы ([6]) для случая $r > 1$. Положим [см. ([1]), ([6])]

$$W_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^r n^r} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r} \cos jt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r} \sin jt, \qquad (2.1)$$

где $r > 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < 2$,

$$W(k) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2} + ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\, du, \qquad (2.2)$$

е $0<\beta<1$, *а* $\beta\pi$ — *корень уравнения* $H(\beta\pi)=0$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n^{r-1} W_n\left(\frac{k}{n}\right) = W(k) \tag{2.3}$$

вномерно относительно $|k|\leqslant k_0$, *где* k_0 — *любое положительное число.*

Доказательство. Отметим сначала, что функции

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\right|, \quad \left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\right|$$

вляются монотонно убывающими функциями от u. В этом легко убе-иться, применяя к их производным известные теоремы [см. ([8])] о знаке ункций с монотонно убывающими коэффициентами.

Пусть $|k|\leqslant k_0$. Тогда

$$n^{r-1}W_n\left(\frac{k}{n}\right)-W(k)=n^{r-1}\sum_{j=1}^{N_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-W(k)+$$

$$+n^{r-1}\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}+\frac{n^{r-1}}{2}d_0^{(n)}, \tag{2.4}$$

це N — любое натуральное число, а

$$d_0^{(n)}=\frac{1}{n^r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}. \tag{2.5}$$

Покажем, что для произвольного $\delta>0$ можно подобрать числа n_0 N_0 такие, что при $n\geqslant n_0$, $N\geqslant N_0$

$$\left|n^{r-1}\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}+\frac{n^{r-1}}{2}d_0^{(n)}\right|<\frac{\delta}{2} \tag{2.6}$$

авномерно относительно $|k|\leqslant k_0$.

Заметим [см. ([8])], что для всех натуральных n и j

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}>0 \quad \text{при } 0<\beta<1$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\begin{cases}\geqslant 0 & \text{при } 0<\beta\leqslant\frac{1}{2},\\ <0 & \text{при } \frac{1}{2}<\beta<1.\end{cases}$$

оэтому

$$\left|\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\cos k\frac{j}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|\leqslant\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}.$$

Применяя преобразование Абеля, получаем:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{\sin\beta\pi}\left\{\frac{1}{[(2\nu+1)n+j]^2}-\frac{1}{[(2\nu+3)n+j]^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2nr}{\sin\beta\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^{r+1}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2nr}{\sin\beta\pi}\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin^2(\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^{r+1}}=O\left(\frac{1}{n^{r-1}N^{r-1}}\right).$$

Точно так же находим:

$$\left|\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right|=O\left(\frac{1}{n^{r-1}N^{r-1}}\right).$$

Объединяя эти оценки, имеем:

$$^{r-1}\sum_{j=N_{n+1}}^{\infty}\cos k\frac{j}{}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=O\left(\frac{1}{N^{r-1}}\right)\tag{2.7}$$

и

$$n^{r-1}\sum_{i=N_{n+1}}^{\infty}\sin k\frac{j}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=O\left(\frac{1}{N^{r-1}}\right).\tag{2.8}$$

Из (2.5), (2.7) и (2.8) получаем (2.6).

Оценим разность

$$\left|n^{r-1}\sum_{j-1}^{N_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-W(k)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|n^{r-1}\sum_{j=0}^{N_n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-\right.$$

$$\left.-\int_0^N\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du\right|+$$

$$+\left|\int^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du\right|.$$

Так как интегралы

$$\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\,du, \qquad \int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\cos(2\nu+1)\beta\pi}{(2\nu+1+u)^r}\,du$$

ходятся, то можно выбрать $N \geqslant N_0$ такое, что

$$\left|\int_N^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\qquad u\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du\right| < \frac{\delta}{4}$$

авномерно относительно всех k. Зафиксируем это N. Так как $|k| \leqslant k_0$, о полная вариация функции

$$\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}$$

а отрезке $0 \leqslant u \leqslant N$ будет равномерно ограничена некоторым числом (k_0, N), а тогда, согласно теореме Полиа и Сеге ([5]),

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+k\frac{j}{n}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r} - \right.$$

$$\left. -\int_0^N \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du \right| \leqslant \frac{c(k_0, N)}{n}.$$

Поэтому если мы выберем $n_1 \geqslant n_0$ такое, что

$$\frac{c(k_0, N)}{n} < \frac{\delta}{4},$$

о при $n \geqslant n_1$ будем иметь:

$$\left| n^{r-1} W_n\left(\frac{k}{n}\right) - W(k) \right| \leqslant \delta$$

авномерно относительно $|k| \leqslant k_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть* $r > 1$ *и* $0 \leqslant \alpha < 2$. *Тогда*

1. *Если* $k > 0$, *то*

$$W(k) = -k^{r-1} r \int_0^\pi H(\beta\pi+u)\,\Phi(u)\,du. \tag{2.9}$$

2. *Если* $k < 0$, *то*

$$W(k) = |k|^{r-1} r \int_0^\pi H(\beta\pi-u)\,\Phi(u)\,du, \tag{2.10}$$

де

$$H(u) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\cos\left[(2\nu+1)u-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^r},$$

$$\Phi(u) = \sum_{s=0}^\infty \frac{(-1)^s}{(u+s\pi+|k|)^{r+1}}.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$W(k)=\int\limits_0^\infty\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=$$

$$=\int\limits_0^\infty\sum_{\nu=0}^{N}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu\quad 1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du.$$

Применяя преобразование Абеля, легко показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=0$$

равномерно относительно k. Поэтому

$$W(k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}du=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k^{r-1}}{(2\nu+1)^{r-1}}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\left[(2\nu+1)(\beta\pi+u)-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(u+k)^r}du.$$

Проинтегрировав по частям, получим для $k>0$:

$$W(k)=k^{r-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}\left\{\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)k^r}-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{2\nu+1}\int\limits_0^\infty\frac{s\left[(2\nu+1)(\beta\pi+u)-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(u+k)^{r+1}}du\right\}=$$

$$=\frac{1}{k}H(\beta\pi)-k^{r-1}r\int\limits_0^\infty\frac{H(\beta\pi+u)}{(u+k)^{r+1}}du=-k^{r-1}r\sum_{s=0}^{\infty}\int\limits_{s\pi}^{(s+1)\pi}\frac{H(\beta\pi+u)}{(u+k)^{r+1}}du=$$

$$=-k^{r-1}r\sum_{s=0}^{\infty}\int\limits_0^\pi H(\beta\pi+u)\frac{(-1)^s}{(n+s\pi+k)^{r+1}}du=-k^{r-1}r\int\limits_0^\pi H(\beta\pi+u)\,\Phi(u)\,du.$$

Аналогично доказывается формула (2.10) для случая $k<0$.

ЛЕММА 3. *При* $r>1$, $0\leqslant\alpha<2$ *функция* $W(k)$ *не имеет нулей на вещественной оси.*

Доказательство. Так как $\Phi(u)>0$ для $u\geqslant 0$, то утверждение еммы мы можем получить из формул (2.9) и (2.10), пользуясь тем, то при $0<u<\pi$

$$H(\beta\pi+u)<0 \qquad \text{при } 0<\alpha<1$$

$$H(\beta\pi+u)>0 \qquad \text{при } 1<\alpha<2$$

м. ([6]), стр. 72].

Если $k=0$, то

$$W(0)=\int\limits_0^\infty\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du.$$

В этом случае для любого $u\geqslant 0$ [см. ([8])]

$$\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\begin{cases}>0 & \text{для } 0<\alpha<1,\\ <0 & \text{для } 1<\alpha<2.\end{cases}$$

ЛЕММА 4. *Пусть* $r>1$ *и* $0\leqslant\alpha<2$. *Существуют числа* $k=k(r)>0$ $n_0(r,\alpha)>0$ *такие, что при* $n>n_0(r,\alpha)$

$$\varepsilon W_n(t)>0 \quad \left(\frac{k}{n}\leqslant t\leqslant 2\pi-\frac{k}{n}\right),$$

е

$$\varepsilon=\operatorname{sign}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

. е. $\varepsilon=1$ *для* $0<\alpha<1$ *и* $\varepsilon=-1$ *для* $1<\alpha<2$.

Доказательство этой леммы не отличается от доказательства леммы 5 боты ([6]).

ЛЕММА 5. *Пусть* $r>1$, $0\leqslant\alpha<2$. *Тогда для всех* n

$$\varepsilon W_n(t)>0, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, \quad \varepsilon=\pm 1.$$

Доказательство. Из лемм 1, 3 и 4 следует, что утверждение ммы 5 справедливо для всех достаточно больших n. Далее, доказа- льство завершается с помощью леммы 4 работы ([6]).

§ 3. Доказательство основной теоремы

Построим интерполяционный полином порядка $n-1$ для функции

$$K(t)=\sum_{k=1}^\infty k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

впадающий с ней в $2n$ точках

$$\frac{\beta}{n}\pi,\left(\frac{\beta}{n}+\frac{1}{n}\right)\pi,\ldots,\left(\frac{\beta}{n}+\frac{2n-1}{n}\right)\pi. \tag{3.1}$$

вестно [см. ([2])], что это возможно. Аналогично тому, как это было елано в работе ([6]), мы получаем, что

$$K(t)-U^*_{n-1}(t)=-2\sin(nt-\beta\pi)\,W_n(t), \tag{3.2}$$

где $U^*_{n-1}(t)$ — требуемый полином. Из (3.2) и леммы 5 видно, что разность $K(t) - U^*_{n-1}(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ меняет знак в точках (3.1) и только в этих точках. Поэтому

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_C \leqslant \frac{1}{\pi} \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} ||K(t) - U^*_{n-1}(t)|\, dt = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} [K(t) - U^*_{n-1}(t)] \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi)\, dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

С другой стороны, в работе ([6]) было доказано, что при $r > 1$

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_C \geqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Теорема доказана.

Отметим некоторые следствия из основной теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $f(x) \in W^{(r)}$, $r > 1$, *т. е.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(t - x)\, \varphi(t)\, dt,$$

где

$$K_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right),$$

а $\varphi(t)$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |\varphi(t)| \leqslant 1, \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0.$$

Тогда

$$\sup_{f \in W^{(r)}} E_n(f)_C = \sup_{\substack{f \in W^{(r)} \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_C = \frac{1}{\pi} \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |K_r(t) - T_{n-1}(t)|\, dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $0 \leqslant \beta < 1$, $\beta\pi$ — *корень уравнения*

$$H_r(\beta\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^r} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f(x) \in \widetilde{W}^{(r)}$, $r > 1$, *т. е.*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{K}_r(t - x)\, \varphi(t)\, dt,$$

где

$$\widetilde{K}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \sin\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right),$$

$\varphi(t)$ — *измеримая функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |\varphi(t)| \leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0.$$

Тогда

$$\sup_{f \in \widetilde{W}^{(r)}} E_n(f)_C = \sup_{\substack{f \in \widetilde{W}^{(r)} \\ f \perp T_{n-1}}} \| f \|_C = \frac{1}{\pi} \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |\widetilde{K}_r(t) - T_{n-1}(t)|\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $0 \leqslant \widetilde{\beta} < 1$, $\widetilde{\beta}\pi$ — *корень уравнения*

$$\widetilde{H}_r(\beta\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^r} = 0.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ имеет r-ю ($r > 1$ непрерывную производную $f^{(r)}(x)$ в смысле Вейля, то*

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right| \cdot E_n(f^{(r)})_C, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (3.3)$$

Если же сопряженная функция $\widetilde{f}(x)$ имеет непрерывную r-ю ($r > 1$) производную $\widetilde{f}^{(r)}(x)$ в смысле Вейля, то

$$E_n(f)_C \leqslant \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{r\pi}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right| \cdot E_n(\widetilde{f}^{(r)})_C, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (3.4)$$

В неравенствах (3.3) *и* (3.4) *константы улучшить нельзя.*

В заключение отметим, что, согласно одной теореме С. М. Никольского ([4]), теоремы 1—3 переносятся на случай, когда приближение рассматривается в метрике L.

Поступило
12. VIII. 1959.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0 < s < 1$), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 135—162.

[2] Крейн М. Г., К теории наилучшего приближения периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 18, № 4—5 (1938), 245 — 249.

[3] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischen Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938), 103 — 134.

[4] Никольский С. М., Приближение функции тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207 — 256.

[5] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 1, Москва, 1956.

[6] Сунь Юн-шен, О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 23 (1959), 67 — 92.

[7] Сунь Юн-шен, О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами (кит., рез. русск.), Вестник Пекинского пед. ун-та, вып. 3 (1959), 21 — 25.

[8] Fejér L., Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Trans. Am. Math. Soc., 39 (1936), 18—59.

[9] Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 23 (1959), 933 — 950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 153—172

Ю. И. МАНИН

О МАТРИЦЕ ХАССЕ — ВИТТА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

В работе вычислен характеристический многочлен матрицы Хассе — Витта и некоторых связанных с ней матриц. Показано, что строки матрицы Хассе — Витта являются решениями классической системы дифференциальных уравнений для периодов.

§ 1. Характеристический многочлен

1. Матрица Хассе — Витта. Пусть k — поле конечной характеристики p, Γ — кривая рода $g>0$, определенная над полем k, полная и неособая, $R_k(\Gamma)$ — поле рациональных функций на кривой Γ, определенных над полем k. Предположим, что на кривой Γ существует такая совокупность различных k-рациональных точек $P_1, \ldots, P_g$, что дивизор $\sum_{i=1}^{p} P_i$ неспециален. Выберем для каждой точки P_i локальную униформизирующую $t_i \in R_k(\Gamma)$ и определим распределение r_i поля $R_k(\Gamma)$ в смысле Шевалле, положив $(r_i)_P = \frac{1}{t_i}$, если $P = P_i$, и $(r_i)_P = 0$ — в противном случае. Пусть $\mathfrak{R}(D)$ — пространство распределений, кратных дивизору D. Тогда распределения $r_1, \ldots, r_g$ образуют базис k-векторного пространства

$$\mathfrak{R} / (\mathfrak{R}(0) + R_k(\Gamma)),$$

ибо дивизор $\sum_{i=1}^{g} P_i$ выбран неспециальным. В частности, имеет место соотношение

$$r_i^p \equiv \sum_{j=1}^{g} a_{ij} r_j \bmod (\mathfrak{R}(0) + R_k(\Gamma)),$$

где $A = (a_{ij})$ — некоторая (g, g)-матрица, элементы которой принадлежат полю k. Она была введена впервые Хассе и Виттом в работе ([7]) тем способом, который только что был описан. В этой работе установлены два основных свойства матрицы A:

1°. При замене неспециальной системы точек (P_i) другой подобной системой и при замене системы локальных униформизирующих (t_i) другой системой матрица Хассе — Витта A преобразуется по закону

$$A \to S^{-1} A S^{(p)},$$

где S — некоторая невырожденная (g, g)-матрица с элементами из поля k, а $S^{(p)}$ — матрица, элементы которой являются p-ми степенями соответствующих элементов матрицы S.

2°. Если поле k алгебраически замкнуто, то циклические неразветвленные расширения поля $R_k(\Gamma)$ степени p находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами базиса линейного пространства над простым полем, состоящего из векторов $\bar{c}$, для которых

$$\bar{c}^{(p)} A = \bar{c}.$$

Размерность этого линейного пространства s равна рангу матрицы

$$AA^{(p)} \ldots A^{(p^{g-1})}.$$

Число классов дивизоров порядка p поля $R_k(\Gamma)$ равно в точности p^s (по поводу последнего утверждения см. также ([12])).

2. Пример. Формулировка теоремы. Пусть $g=1$, $p>3$. В качестве кривой Γ возьмем проективное замыкание афинной эллиптической кривой в нормальной форме Вейерштрасса:

$$y^2 = 4x^3 + ax + b.$$

Обозначим через P_1 бесконечно удаленную точку кривой Γ и положим $t_1 = \frac{x}{y}$. Матрица Хассе — Витта является в этом случае просто элементом A поля k, который называется (относительным) инвариантом Хассе кривой Γ. Дейринг [см. ([5]), стр. 255] вычислил значение A в базисе, соответствующем выбранной системе (P_1, t_1):

$$A = \sum_{2h+3i=\frac{p-1}{2}} \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}{i!\,h!\left(\frac{p-1}{2}-i-h\right)!} a^h b^i 4^{\frac{p-1}{2}-i-h}. \tag{1}$$

Согласно свойству 1°, абсолютным инвариантом является класс элементов поля k вида $c^{1-p}A$, $c \in k$. Если поле k алгебраически замкнуто, то различаются лишь два случая: $A \neq 0$ и $A = 0$. Второй из них соответствует отсутствию на кривой Γ точек порядка p и несуществованию неразветвленных циклических расширений поля $R_k(\Gamma)$ степени p.

В другом крайнем случае, когда поле k — простое, $c^{1-p}=1$ для всех $c \in k$, так что A является *абсолютным* инвариантом k-кривой Γ. Автор заметил, что A имеет в этом случае весьма простой смысл. Пусть π — эндоморфизм Фробениуса поля $R_k(\Gamma)$. Его характеристический многочлен $\pi(\lambda)$ имеет вид:

$$\pi(\lambda) = \lambda^2 + S\lambda + p,$$

где S — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству Хассе $S^2 < 4p$ [см. ([6])]; число точек на кривой Γ, рациональных над простым полем, равно

$$N = p + 1 + S.$$

С другой стороны, легко показать, что число точек на аффинной кривой Вейерштрасса, рациональных над простым полем, равно

$$p + \sum_x \left(\frac{4x^3+ax+b}{p}\right),$$

где под знаком суммы стоит символ Лежандра, a, b понимаются как классы вычетов $\bmod p$, а x пробегает полную систему вычетов $\bmod p$. Поэтому, обозначая через $\overline{S}$ элемент поля k, соответствующий классу вычетов $S \bmod p$, и учитывая, что единственная бесконечно удаленная точка кривой Γ рациональна над k, получаем:

$$\overline{S} = \sum_{x \in k} (4x^3 + ax + b)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Поскольку, как нетрудно видеть,

$$\sum_{x \in k} x^i = 0 \text{ при } i > 0, \quad i \not\equiv 0 \mod (p-1),$$

и

$$\sum_{x \in k} x^{m(p-1)} = -1, \quad m \geqslant 1,$$

последняя сумма равна взятому с обратным знаком коэффициенту при x^{p-1} в разложении

$$(4x^3 + ax + b)^{\frac{p-1}{2}}$$

по степеням x, т. е. коэффициенту при $x^{-\frac{p-1}{2}}$ в разложении многочлена

$$(4 + ax^{-2} + bx^{-3})^{\frac{p-1}{2}}.$$

Как видно из формулы (1), этот коэффициент в точности равен A. Следовательно,

$$\overline{S} = -A.$$

Таким образом, обозначая через $\overline{\pi}(\lambda)$ многочлен, получающийся из многочлена $\pi(\lambda)$ редукцией его коэффициентов по модулю p, получаем:

$$\overline{\pi}(\lambda) = -\lambda(A - \lambda).$$

Основной целью этого параграфа будет доказательство следующей теоремы, обобщающей только что полученное соотношение:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть кривая Γ рода $g > 0$ определена над полем k_0 характеристики $p \neq 0$, состоящим из $q = p^a$ элементов, и пусть на ней имеется неспециальная система g k-рациональных точек. В силу свойства 1°, матрица A Хассе — Витта кривой Γ определена с точностью до преобразований вида $A \to S^{-1} A S^{(p)}$, где S — невырожденная матрица с элементами из поля k, так что характеристический многочлен $|A_\pi - \lambda E|$ матрицы $A_\pi = AA^{(p)} \ldots A^{(p^{a-1})}$ является абсолютным инвариантом кривой Γ. Имеет место соотношение*

$$\overline{\pi}(\lambda) = (-1)^g \lambda^g |A_\pi - \lambda E|,$$

где через $\overline{\pi}(\lambda)$ обозначен редуцированный $\bmod p$ *характеристический многочлен эндоморфизма π: $(x) \to (x^q)$ якобиева многообразия J кривой Γ.*

3. Векторы Витта. При доказательстве теоремы нам придется пользоваться результатами Серра относительно когомологий алгебраических многообразий с коэффициентами в пучках векторов Витта; этот и следующий пункт посвящены краткому описанию нужных нам понятий и предложений.

Пусть p — фиксированное простое число, O — коммутативное кольцо с единицей характеристики p, $W_n(O)$ — кольцо векторов Витта длины n, компонентами которых являются элементы кольца O [см. ([15])]. Законы композиции в этом кольце задаются некоторыми многочленами с коэффициентами в простом поле; кольцо $W_n(O)$ коммутативно. Кольца $W_n(O)$ связаны между собой следующими отображениями:

а) Эндоморфизм Фробениуса F: $W_n(O) \to W_n(O)$. По определению,

$$F(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (a_0^p, \ldots, a_{n-1}^p).$$

Из свойств законов композиции следует, что F есть гомоморфизм структуры кольца.

б) Сдвиг V: $W_n(O) \to W_{n+1}(O)$. По определению,

$$V(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (0, a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Оператор сдвига V аддитивен; если O есть k-алгебра, где k — некоторое совершенное поле характеристики p, то V является F^{-1}-линейным преобразованием структуры $W_n(k)$ — модуля кольца $W_n(O)$.

в) Ограничение R: $W_{n+1}(O) \to W_n(O)$. По определению,

$$R(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

Оператор ограничения также является гомоморфизмом; он перестановочен с эндоморфизмом Фробениуса F. Кроме того,

$$RVF = FRV = RFV = p$$

(умножение на p).

Проективный предел системы колец $W_n(O)$ относительно гомоморфизмов ограничения R обозначается через $W(O)$; это кольцо характеристики нуль. На нем определены операторы F и V, $FV = VF = p$.

Если $O = k$ — совершенное поле характеристики p, то $W(k)$ представляет собой полное дискретно нормированное кольцо с единственным простым максимальным идеалом $pW(k)$. В этом случае

$$W_n(k) \cong W(k) / p^n W(k).$$

Если поле k простое, то $W(k)$ изоморфно Z_p — кольцу целых p-адических чисел, F является тождественным изоморфизмом, $Vw = pw$ для любого $w \in W(k)$.

4. Когомологии с коэффициентами в пучке векторов Витта. Пусть X — алгебраическое k-многообразие, где k — некоторое алгебраически замкнутое поле характеристики p, O — пучок локальных колец этого многообразия. Каждый слой O_x является кольцом характеристики p. Объединение колец $W_n(O_x)$ по всем $x \in X$ обладает естественной структурой пучка колец над X, который обозначается через $\mathfrak{W}_n$;

операции F, V, R переносятся на $\mathfrak{W}_n$. Положим $\Lambda = W(k)$. Пучки $\mathfrak{W}_n$ являются пучками Λ-модулей, аннулируемых идеалом $p^n\Lambda$. Можно определить по Серру группы когомологий $H^q(X, \mathfrak{W}_n)$, на которые переносятся операторы F, V, R. Для любого $q \geqslant 0$ Λ-модули $H^q(X, \mathfrak{W}_n)$ и гомоморфизмы R: $H^q(X, \mathfrak{W}_{n+1}) \to H^q(X, \mathfrak{W}_n)$ образуют проективную систему; ее предел обозначается через $H^q(X, \mathfrak{W})$ и представляет собой Λ-модуль, на котором определяются операции V и R. Точная последовательность пучков

$$0 \to \mathfrak{W}_N \xrightarrow{V^n} \mathfrak{W}_{N+n} \xrightarrow{R^N} \mathfrak{W}_n \to 0$$

порождает точную когомологическую последовательность

$$\ldots \to H^q(X, \mathfrak{W}_N) \xrightarrow{V^n} H^q(X, \mathfrak{W}_{N+n}) \xrightarrow{R^N} H^q(X, \mathfrak{W}_n) \xrightarrow{\delta_n^q} H^{b+1}(X, \mathfrak{W}_N) \to \ldots$$

Переходя к проективному пределу при $N \to \infty$, мы получаем точную последовательность

$$\to H^q(X, \mathfrak{W}) \xrightarrow{V^n} H^q(X, \mathfrak{W}) \xrightarrow{\rho^n} H^q(X; \mathfrak{W}_n) \xrightarrow{\delta_n^q} H^{q+1}(X, \mathfrak{W}) \to \ldots$$

[см. (12)].

Нам понадобится следующее основное предложение, доказательство которого содержится в работе ([13]).

Предложение 1. *Пусть X — абелево многообразие. Тогда:*

1) *Кограничные гомоморфизмы δ_n^q тождественно равны нулю. Иначе говоря, операторы ограничения R^N и ρ_n эпиморфны.*

2) *Группа $H^1(X, \mathfrak{W})$ является свободным Λ-модулем конечного ранга $r = 2\dim X - s$, где p^s — число точек порядка p на многообразии X.*

3) *Пусть $T(X^*)$ — группа векторов Тэта многообразия X^*, двойственного X, относительно простого числа p, т. е. Z_p-модуль, состоящий из векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in X^*$, $px_1 = 0$, $px_{i+1} = x_i$, $T'(X^*)$ — Λ-модуль $T(X^*) \otimes \Lambda$. Тогда $T'(X^*)$ есть свободный Λ-модуль конечного ранга s* [см. ([9]), гл. VII].

4) *На прямой сумме*

$$L(X) = H^1(X, \mathfrak{W}) + T'(X^*)$$

определяется естественное инверсное представление $\sigma \to \sigma^*$ кольца эндоморфизмов многообразия X. Характеристический многочлен любого эндоморфизма в таком представлении совпадает с характеристическим многочленом этого эндоморфизма, определенным согласно Вейлю для любого простого числа $l \neq p$.

5. Доказательство теоремы 1. Пусть X — абелево многообразие размерности g, определенное над полем k_0 из $q = p^a$ элементов, k — алгебраическое замыкание поля k_0. В силу утверждения 1) предложения 1, имеет место точная последовательность

$$H^1(X, \mathfrak{W}) \xrightarrow{V} H^1(X, \mathfrak{W}) \xrightarrow{\rho} H^1(X, O) \to 0. \quad (1)$$

Размерность k-пространства $H^1(X, O)$ равна g. Выберем некоторый базис этого пространства $\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_g$ и такой базис Λ-модуля $H^1(X, \mathfrak{W})$, $h_1, \ldots, h_r$, что $\rho(h_i) = \overline{h_i}$ при $1 \leqslant i \leqslant g$, $\rho(h_i) = 0$ при $g < i \leqslant r$. Эндоморфизм π многообразия X определяет Λ-гомоморфизмы π_1^*: $H^1(X, O) \to H^1(X, O)$ и π^*: $H^1(X, \mathfrak{W}) \to H^1(X, \mathfrak{W})$, причем

$$\pi_1^* \rho = \rho \pi^*.$$

Пусть

$$\pi^*(h_1, \ldots, h_r) = (h_1, \ldots, h_r) B,$$

где B — некоторая (r, r)-матрица с элементами из кольца Λ, а

$$\pi_1^*(\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_g) = (\overline{h}_1, \ldots, \overline{h}_g) B',$$

где B' — некоторая (g, g)-матрица с элементами из поля $k \cong \Lambda / p\Lambda$. Тогда

$$\overline{B} = \left(\frac{B' \mid *}{0 \mid 0}\right),$$

где $\overline{B}$ — образ матрицы B при редукции $\operatorname{mod} p$, т. е. при отображении $\Lambda \to \Lambda / p\Lambda \cong k$. В самом деле, достаточно доказать, что при $g < i \leqslant r$ имеет место включение $\pi^* h_i \in pH^1(X, \mathfrak{W})$. Поскольку $\rho h_i = 0$, из точности последовательности (1) следует, что $h_i \in V(H^1(X, \mathfrak{W}))$. Поэтому

$$\pi^* h_i \in V\pi^*(H^1(X, \mathfrak{W})).$$

В силу того, что поле k совершенно, имеем:

$$\pi(R_k(X)) = R_k(X))^q \subset (R_k(X))^p,$$

а отсюда следует, что

$$\pi^*(H^1(X, \mathfrak{W})) \subset F(H^1(X, \mathfrak{W})).$$

Тем самым

$$\pi^* h_i \in VF(H^1(X, \mathfrak{W})) = pH^1(X, \mathfrak{W}).$$

Из вышесказанного вытекает следующее соотношение между характеристическими многочленами:

$$(-1)^{r-g} \lambda^{r-g} |B' - \lambda E| = \overline{|B - \lambda E|}.$$

В силу утверждения 4) предложения 1 это дает:

$$\overline{\pi}(\lambda) = (-1)^{r-g} \lambda^{r-g} |B' - \lambda E| \cdot \pi'(\lambda), \tag{2}$$

где $\pi'(\lambda)$ — характеристический многочлен эндоморфизма ${}^t\pi$ на группе X_p^* точек p-го порядка многообразия X^*, рассматриваемой как модуль над простым полем характеристики p. Покажем, что

$$\pi'(\lambda) = (-1)^s \lambda^s.$$

Это утверждение очевидным образом получается из следующей леммы.

ЛЕММА 1. $X_p^* \subset \operatorname{Ker}{}^t\pi$.

Доказательство. Обозначим через σ: $X \to Y$ изогению многообразия X, индуцированную возвышением всех элементов универсальной области в степень p. Очевидно, достаточно показать, что $Y_p^* \subset \operatorname{Ker}{}^t\sigma$. Воспользуемся теорией чисто несепарабельных изогений Барзотти —

Серра [см. (13)]. Согласно этой теории, любая чисто несепарабельная изогения φ: $X \to X'$ представляется в виде произведения элементарных изогений высоты единица (т. е. таких, для которых $(R_k(X))^p \subset R_k(X')$) одного из двух типов i_1, i_2, которые определяются следующим образом. В силу леммы 6 работы (13), достаточно описать подполя поля $R_k(X)$, соответствующие изогениям указанных двух типов. Пусть $\mathfrak{n}$ — p-алгебра Ли инвариантных дифференцирований поля $R_k(X)$. Подполя, соответствующие изогениям типа i_1, состоят из всех элементов, аннулируемых некоторым дифференцированием $\partial \in \mathfrak{n}$, для которого $\partial^p = 0$, а подполя, соответствующие изогениям типа i_2, состоят из всех элементов, аннулируемых некоторым дифференцированием $\partial \in \mathfrak{n}$, для которого $\partial^p = \partial$.

Согласно лемме 11 работы (13), если изогения φ имеет тип i_2, то изогения ${}^t\varphi$ сепарабельна и имеет ядро порядка p. Если же изогения φ имеет тип i_1, то, в силу леммы 11, изогения ${}^t\varphi$ чисто несепарабельна. По теореме двойственности Картье (3),

$$\nu(\varphi) = \nu({}^t\varphi),$$

так что изогения ${}^t\varphi$ также имеет тип i_1 или i_2, но она не может быть типа i_2, ибо ${}^t({}^t\varphi) = \varphi$, и изогения φ, в силу утверждения 1), была бы сепарабельной. Наконец, если изогения φ сепарабельна и имеет ядро порядка p, то подобное же рассуждение показывает, что изогения ${}^t\varphi$ имеет тип i_2.

Пусть $y \in Y^*_p$, φ_y — изогения степени p многообразия Y^* с ядром, порожденным y. В силу сказанного, ${}^t\varphi_y$ есть несепарабельная изогения многообразия Y типа i_2.

Для любой изогении $X \to Y$ условимся отождествлять поле $R_k(Y)$ с подполем поля $R_k(X)$.

Рассмотрим отображение φ_y: $Y^* \to Z$ и сопряженное ему отображение ${}^t\varphi_y : Z^* \to Y$. Поскольку

$$(R_k(Z^*))^p \subset R_k(Y) \subset R_k(Z^*)$$

и

$$R_k(Y) = (R_k(X))^p,$$

имеет место также включение

$$(R_k(X))^p \subset R_k(Z^*) \subset R_k(X).$$

Пусть τ: $X \to Z^*$ — соответствующая изогения. Тогда

$${}^t\varphi_y \circ \tau = \sigma.$$

Двойственная последовательность дает:

$${}^t\sigma = {}^t\tau \circ \varphi_y,$$

откуда и следует, что

$$Y^*_p \subset \operatorname{Ker} {}^t\sigma.$$

Примечание. Можно показать, что даже $Y^*_p = \operatorname{Ker} {}^t\sigma$. В самом деле, достаточно доказать, что порядок группы $\operatorname{Ker} {}^t\sigma$ равен p^s. Он не может быть больше, чем p^s, ибо число элементарных изогений типа i_2,

входящих в произвольное разложение изогении σ, равно размерности «полупростой компоненты» пространства π или двойственного к нему пространства $H^0(X, \Omega^1)$. Эта размерность в точности равна s в силу предложения 10 работы ([12]).

Возвращаясь к формуле (2), получаем (ибо $s + r = 2g$):

$$\overline{\pi}(\lambda) = (-1)^g \lambda^g \,|\, B' - \lambda E \,|, \tag{3}$$

где B' — матрица представления эндоморфизма π абелева многообразия X в произвольном базисе k-пространства

$$H^1(X, \mathfrak{W}_1) = H^1(X, O).$$

Пусть теперь Γ — полная неособая кривая, определенная над полем k_0 из $q = p^a$ элементов, $p_1, \ldots, p_g$ — неспециальная система рациональных точек на ней. В силу известного построения Чжоу ([4]), можно считать, что якобиево многообразие J кривой Γ и каноническое отображение $\varphi : \Gamma \to J$ определены над полем k_0.

Обозначим через O пучок локальных колец на многообразии J, а через O_Γ—пучок локальных колец на многообразии Γ. Как показал Розенлихт ([11]), индуцированное отображение групп когомологий φ^*: $H^1(J, O) \to H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ является изоморфизмом [см. также ([15]), гл. VII, § 4]. Напомним, что точная последовательность пучков над кривой Γ вида

$$0 \to O_\Gamma \to R \to R / O_\Gamma \to 0$$

(R — постоянный пучок со слоем $R_k(\Gamma)$) и соответствующая ей точная когомологическая последовательность

$$R_k(\Gamma) \to H^0(\Gamma,\ R / O_\Gamma) \to H^1(\Gamma,\ O_\Gamma) \to 0$$

позволяют отождествить k-пространства $H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ и $\mathfrak{K} / (\mathfrak{K}(0) + R_k(\Gamma))$. Выберем базис $h_1, \ldots, h_g$ пространства $H^1(J, O)$, который при таком отождествлении отображается изоморфизмом φ^* на базис пространства $\mathfrak{K} / (\mathfrak{K}(0) + R_k(\Gamma))$, построенный в п. 1. Как заметил впервые Картье ([1]) [см. также ([12]), п. 9], матрица Хассе — Витта A является матрицей эндоморфизма F группы $H^1(\Gamma, O_\Gamma)$, индуцированного эндоморфизмом Фробениуса пучка локальных колец O_Γ в базисе $\varphi^*(h_1), \ldots, \varphi^*(h_g)$. Обозначая через π эндоморфизм $(x) \to (x^q)$ якобиева многообразия J, имеем:

$$\varphi^{*-1} \circ F^a \circ \varphi^*(h_i) = \pi^*(h_i).$$

Это непосредственно следует из того, что отображение φ и классы когомологий h_i рациональны над полем k_0 [ср. ([14]), гл. VI, § 1, предложение 1]. Поскольку отображение φ^* линейно, а отображение F p-линейно, матрица

$$A_\pi = A A^{(p)} \ldots A^{(p^{a-1})}$$

совпадает с матрицей представления эндоморфизма π в базисе $(h_1, \ldots, h_g)$. Следовательно, из равенства (3) выводим:

$$\overline{\pi}(\lambda) = (-1)^g \lambda^g \,|\, A_\pi - \lambda E \,|,$$

что и доказывает теорему 1.

6. Замечания. Матрица Хассе — Витта представляет собой обьект, который (по крайней мере, в принципе) можно вычислить в функции от модулей кривой (в любом разумном смысле этого слова). С другой стороны, многочлен $\pi(\lambda)$ в основном совпадает с ζ-функцией поля $R_k(\Gamma)$ и, следовательно, является важнейшей арифметической характеристикой кривой Γ. Таким образом, теорема 1 дает некоторую информацию о зависимости ζ-функции кривой Γ от модулей этой кривой. Характер этой информации примерно таков же, как классической теоремы о том, что

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p,$$

и в действительности эта аналогия связана с существом дела (см. п. 2).

В свою очередь, вопрос о зависимости матрицы Хассе — Витта от модулей кривой Γ допускает ответ, который показывает, что в некотором смысле матрица A подобна матрице периодов кривой Γ. Точнее, матрица A представляет собой матрицу решений той же системы дифференциальных уравнений, которая в классическом случае связывает периоды дифференциалов первого рода кривой с ее модулями. Уточнению формулировки и доказательству этого результата посвящен следующий параграф.

§ 2. Дифференциальные уравнения матрицы Хассе-Витта

1. Пример. Вернемся снова к случаю $g = 1$. Зададим аффинную эллиптическую кривую с рациональной бесконечно удаленной точкой уравнением вида

$$y^2 = x(x-1)(x-t).$$

Положим

$$r = \frac{p-1}{2},$$

где p — характеристика поля определения кривой Γ. Несложный подсчет, подобный проведенному в п. 2 § 1, показывает, что инвариант Хассе выражается через t следующим образом:

$$A(t) = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}^2 t^i.$$

В заметке ([8]) Игуза, имея в виду показать, что многочлен $A(t)$ не имеет кратных корней, обратил внимание на то, что этот многочлен удовлетворяет классическому дифференциальному уравнению

$$t(1-t)\frac{d^2A}{dt^2} + (1-2t)\frac{dA}{dt} - \frac{1}{4}A = 0.$$

Этому же уравнению удовлетворяет период абелева интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-t)}}$$

по любому одномерному циклу римановой поверхности кривой Γ (в слу-

чае комплексного поля констант), рассматриваемый как функция параметра t. Мы распространим результат Игуза на случай любого рода $g \geqslant 1$.

Приведем сначала несколько замечаний общего характера. Прежде всего, для общей кривой Г рода $g > 1$ автору не известна никакая каноническая форма, канонический выбор базиса дифференциалов первого рода или многообразия модулей. Поэтому мы будем рассматривать произвольный базис пространства дифференциалов первого рода и считать кривую Г определенной над любым полем, в котором существуют нетривиальные абстрактные дифференцирования. Алгебраическая конструкция системы дифференциальных уравнений для периодов кривой Г дана в более ранней работе автора ([17]) для случая характеристики нуль. Мы приведем ее ниже в несколько более общем виде, чем это требуется непосредственно для нашей цели, и для случая произвольной характеристики. Затем мы покажем, что при $p \neq 0$ матрица Хассе — Витта является матрицей решений системы дифференциальных уравнений для некоторого базиса пространства дифференциалов первого рода. Наконец, мы сделаем несколько замечаний об универсальности этой системы дифференциальных уравнений (в смысле ее независимости от характеристики p).

2. Дифференцирования. Пусть A — коммутативное кольцо. Дифференцированием d этого кольца называется эндоморфизм аддитивной группы A, удовлетворяющий дополнительному условию

$$\partial (ab) = \partial a \cdot b + a \partial b$$

для любых $a, b \in A$. Эндоморфизмы $a\partial$ и $[\partial, \partial'] = \partial \circ \partial' - \partial' \circ \partial$ являются дифференцированиями кольца A вместе с ∂, ∂'. Поэтому множество $\mathfrak{S}(A)$ всех дифференцирований кольца A обладает структурой A-алгебры Ли. Имеют место обычные формальные правила дифференцирования, в частности формула Лейбница

$$\partial^m (ab) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \partial^i a \partial^{m-i} b.$$

Из нее следует, что если характеристика кольца A равна p, то ∂^p является дифференцированием вместе с ∂, так что $\mathfrak{S}(A)$ обладает структурой p-алгебры Ли (ограниченной алгебры Ли в смысле Джекобсона). Для любой подалгебры Ли $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}(A)$ множество элементов $A^{\mathfrak{H}}$ кольца A, аннулируемых всеми элементами $\mathfrak{H}$, является подкольцом A.

Пусть M — левый A-модуль, $\partial \in \mathfrak{S}(A)$. Дифференцированием $r(\partial)$ модуля M, продолжающим дифференцирование ∂, называется любой эндоморфизм аддитивной группы $r(\partial)\colon M \to M$, удовлетворяющий дополнительному условию

$$r(\partial)(am) = \partial a \cdot m + a r(\partial) m, \quad a \in A.$$

В частности, при $\partial = 0$ получается, что любой A-эндоморфизм модуля M является дифференцированием. Множество $\mathfrak{S}(M)$ дифференцирований

M обладает структурой A-модуля. Кроме того, отображения $M \to M$ можно итерировать, и множество $\mathfrak{S}(M)$ приобретает дополнительную структуру A-алгебры Ли (ограниченной алгебры Ли, если характеристика кольца A равна некоторому простому числу p). Аналогично можно определить дифференцирование колца A в A-модуль M.

3. Модуль дифференциальных соотношений. Пусть A — кольцо, M — левый A-модуль, $\mathfrak{H}$ — некоторая подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{S}(M)$. Обозначим через $U = U(\mathfrak{H})$ универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{H}$ (в приложениях она всегда существует). A-модуль M обладает естественной структурой левого U-модуля.

Пусть $m_1, \ldots, m_g$ — некоторая конечная совокупность элементов U-модуля M. Любое равенство вида

$$u_1 m_1 + \ldots + u_g m_g = 0$$

в дальнейшем мы его будем иногда записывать в виде равенства нулю символического скалярного произведения $(\overline{u}, \overline{m}) = 0$) называется линейно дифференциальным (или просто дифференциальным) соотношением между элементами $m_1, \ldots, m_g$ (относительно алгебры дифференцирований $\mathfrak{H}$). Множество всех дифференциальных соотношений между элементами $m_1, \ldots, m_g$ обладает естественной структурой левого U-модуля

$$R(m_1, \ldots, m_g) \subset U^g = U \oplus \ldots \oplus U.$$

Для удобства ссылок сформулируем некоторые достаточные условия, при которых U-модуль $R(m_1, \ldots, m_g)$ конечно-порожден.

Предложение 2. *Пусть $A = K$ — некоторое поле, а алгебра $\mathfrak{H}$ и модуль M являются конечномерными векторными пространствами над полем K. Тогда U-модуль $R(m_1, \ldots, m_g)$ для любой конечной совокупности элементов $m_1, \ldots, m_g \in M$ конечно-порожден.*

Доказательство. Для случая нулевой характеристики алгоритм построения порождающей системы указан в работе автора ([17]); нетрудно усмотреть, что предположение о характеристике в этом месте не использовалось. Само построение опирается лишь на тот факт, что в условиях предложения алгебра U конечно-порождена над полем K. Конкретная интерпретация алгебры U как алгебры линейных дифференциальных операторов существенна при изучении инвариантных свойств U-модуля M, когда при переходе от одной системы элементов к другой можно получить новую систему соотношений из старой, пользуясь соотношением коммутирования

$$\partial(am) = \partial a \cdot m + a \partial m.$$

4. Дифференциальные формы. Ниже мы изложим, следуя Картье ([2]), определение и некоторые факты теории абстрактных дифференциальных форм.

Пусть $A = K$ — поле, являющееся регулярным расширением своего подполя k, и пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ — сепарабельно-порождающий базис трансцендентности K/k. Максимальная алгебра Ли $\mathfrak{S}$ дифференцирований поля K, удовлетворяющая условию $k \subset K^{\mathfrak{S}}$, является n-мерным

векторным пространством над полем K и имеет своим базисом систему дифференцирований $\{\partial_i\}$, которая однозначно определяется соотношениями

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, \quad j \leqslant n.$$

Хорошо известно, что $K^{\mathfrak{G}} = K^p k$, если характеристика поля K равна $p \neq 0$, и $K^{\mathfrak{G}} = k$ в противном случае.

Для любого целого числа $r \geqslant 0$ обозначим через Ω^r K-линейное пространство K-полилинейных кососимметрических форм от r переменных алгебры $\mathfrak{G}$. Пространство Ω^r естественно изоморфно r-й внешней степени пространства Ω^1 K-линейных форм на пространстве $\mathfrak{G}$: элемент

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r, \quad \omega_i \in \Omega^1,$$

отождествляется с формой

$$(\partial_1', \ldots, \partial_r') \to |\omega_i(\partial_j')|.$$

Элементы пространства Ω^r называются (однородными) дифференциальными формами степени r поля K над полем констант k.

Для любого элемента $x \in K$ обозначим через $dx \in \Omega^1$ отображение $\partial \to \partial x$. Это отображение $K^{\mathfrak{G}}$-линейно по x и удовлетворяет соотношению

$$d(xy) = dx \cdot y + x\, dy;$$

тем самым dx принадлежит пространству дифференцирований поля K в K-модуль Ω^1. Оно однозначно продолжается до $K^{\mathfrak{G}}$-линейного оператора $d: \Omega^r \to \Omega^{r+1}$, основные свойства которого даются равенствами

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d\omega', \qquad \omega \in \Omega^r, \quad d(d\omega) = 0. \tag{4}$$

Положим

$$Z^r = \operatorname{Ker}(d: \Omega^r \to \Omega^{r+1}), \quad B^r = \operatorname{Im}(d: \Omega^{r-1} \to \Omega^r)$$

(по определению, $\Omega^0 = K$). Очевидно, $B^r \subset Z^r$; фактор-пространство $H^r(K) = Z^r / B^r$ является пространством «когомологий де Рама» поля K/k размерности r.

5. Оператор Картье. Прямая сумма

$$\sum_r Z^r = Z$$

обладает структурой $K^{\mathfrak{G}}$-подалгебры внешней алгебры пространства Ω^1; из формул (4) немедленно следует, что $\sum B^r = B$ является идеалом Z, так что

$$H(K) = \sum Z^r / B^r$$

есть $K^{\mathfrak{G}}$-алгебра когомологий. В случае, когда характеристика p поля K отлична от нуля, ее строение описывается следующей теоремой Картье ([2]). Пусть $dx_1, \ldots, dx_n$ — K-базис пространства Ω^1; тогда $K^{\mathfrak{G}}$-алгебра Z яв-

ляется прямой суммой идеала B и $K^{\mathfrak{G}}$-алгебры, порожденной элементами $f_i = x_i^{p-1}\,dx_i$.

Следовательно, любая замкнутая форма $\omega \in Z^r$ однозначно представляется в виде:

$$\omega = d\varphi + \sum_{i_1 < \ldots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r},$$

где $a_{i_1, \ldots, i_r} \in K^{\mathfrak{G}} = K^p k$. Оператор Картье $C: Z^r \to k^{\frac{1}{p}} \Omega^r$ определяется формулой

$$C\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r}^{\frac{1}{p}}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

и не зависит от выбора базиса $dx_1, \ldots, dx_n$, так что C индуцирует гомоморфизм

$$H(K) \to k^{\frac{1}{p}} \Omega.$$

Для любой формы φ, в силу определения, $C(d\varphi) = 0$.

6. Дифференцирование модуля $H^r(K)$. (В этом пункте характеристика любая.) Допустим, что поле констант k обладает нетривиальными дифференцированиями. Пусть $\partial \in \mathfrak{G}(k)$. Любой сепарабельный базис трансцендентности $x = (x_1, \ldots, x_n)$ поля K/k однозначно определяет некоторое дифференцирование ∂_x поля K, обладающее двумя свойствами: 1) $\partial_x x_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 2) на подполе $k \subset K$ дифференцирование ∂_x совпадает с ∂. В свою очередь, дифференцирование ∂_x продолжается до дифференцирования $r(\partial_x)$ K-модуля Ω^r при помощи формулы:

$$r(\partial_x)\Big(\sum_{i_1 < \ldots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}\Big) = \\ = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \partial_x a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

ЛЕММА 2. $r(\partial_x) B \subset B$; $r(\partial_x) Z \subset Z$.

Доказательство. Покажем, что

$$r(\partial_x)(d\omega) = d(r(\partial_x)\omega).$$

Для этого, очевидно, достаточно доказать, что отображение

$$r(\partial_x) \circ d - d \circ \partial_x : K \to \Omega^1$$

равно нулю. Но оно принадлежит $\mathfrak{G}(K, \Omega^1)$ и равно нулю на подполе $k \subset K$ и на элементах x_i; поскольку расширение $K/k(x_1, \ldots, x_n)$ сепарабельно, стандартные рассуждения показывают, что

$$r(\partial_x) \circ d - d \circ \partial_x = 0.$$

Дифференцирование $r(\partial_x)$ зависит не только от дифференцирования ∂, но и от базиса x. Обобщая на многомерный случай лемму Шевалле, мы докажем сейчас, что при $\omega \in Z^r$ класс $r(\partial_x)\omega + B$ зависит только от дифференцирования ∂.

Предложение 3. *Пусть* $\partial \in \mathfrak{S}(k)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, \ldots, y_n)$ — *два сепарабельно-порождающих базиса трансцендентности поля* K/k.

Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}, \quad d\omega = 0.$$

Тогда

$$(r(\partial_y) - r(\partial_x))\,\omega = d\varphi,$$

где

$$\varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha-1} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_y x_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Доказательство. Прежде всего, $\partial_y - \partial_x \in \mathfrak{S}(K/k)$, поэтому существуют такие элементы $z_i \in K$, что

$$\partial_y - \partial_x = \sum_{i=1}^{n} z_i \partial_i$$

(дифференцирования ∂_i образуют базис пространства $\mathfrak{S}(K/k)$, двойственный к базису dx_i, т. е. $\partial_i x_j = \delta_{ij}$). Применяя $\partial_y - \partial_x$ к x_i, немедленно получаем, что

$$z_i = \partial_y x_i.$$

Далее, из определения легко получается, что

$$\partial_y (\omega \wedge \omega') = \partial_y \omega \wedge \omega' + \omega \wedge \partial_y (\omega').$$

Это дает:

$$(r(\partial_y) - r(\partial_x))\,\omega = \sum_{i_0=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \partial_y x_{i_0} \partial_{i_0} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} +$$
$$+ \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(\partial_y x_{i_\alpha}) \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

С другой стороны,

$$d\varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha-1} da_{i_1 \ldots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_y x_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} +$$
$$+ \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge d(\partial_y x_{i_\alpha}) \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Следовательно, нужно показать, что

$$\sum_{i_0=1}^{n} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \partial_y x_{i_0} \cdot \partial_{i_0} a_{i_1 \ldots i_r} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} =$$
$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{\alpha-1} da_{i_1 \ldots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial_y x_{i_\alpha} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Для этого достаточно установить совпадение коэффициентов при $\partial_y x_m$ в левой и правой частях этого равенства:

$$\sum_{i_1<\dots<i_r} \partial_m a_{i_1\dots i_r} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r} =$$

$$= \sum_{(i_1\dots i_r)\ni m=i_\alpha} (-1)^{\alpha-1} da_{i_1\dots i_r}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx}_{i_\alpha}\wedge\dots\wedge dx_{i_r} \qquad (5)$$

(суммирование в правой части производится по всем упорядоченным сочетаниям индексов, содержащим m; крышечка, как обычно, означает, что соответствующий член должен быть опущен). Но сумма справа равна:

$$\sum_{(i_1\dots i_r)\ni m} \partial_m a_{i_1\dots i_r} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r} +$$

$$+\sum_{i_0\neq m}\ \sum_{(i_1\dots i_r)\ni m=i_\alpha} (-1)^{\alpha-1}\partial_{i_0} a_{i_1\dots i_r} dx_{i_0}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx}_{i_\alpha}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}. \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), мы видим, что нужно проверить равенство

$$\sum_{(i_1\dots i_r)\not\ni m} \partial_m a_{i_1\dots i_r} dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r} =$$

$$= \sum_{i_0\neq m}\ \sum_{(i_1\dots i_r)\ni m=i_\alpha} (-1)^{\alpha-1}\partial_{i_0} a_{i_1\dots i_r} dx_{i_0}\wedge dx_{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx}_{i_\alpha}\wedge\dots\wedge dx_{i_r}.$$

Фиксируем сочетание $(j_1,\dots,j_r)$ и проверим совпадение коэффициентов при членах $dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_{j_r}$ слева и справа. Если $m\in(j_1\dots j_r)$, то эти коэффициенты равны нулю. Пусть

$$m\notin(j_1\dots j_r),\qquad j_\alpha<m<j_{\alpha+1};$$

тогда коэффициент слева равен $\partial_m a_{j_1\dots j_r}$. Несложный комбинаторный подсчет показывает, что коэффициент справа равен

$$\sum_{1\leqslant\beta\leqslant\alpha} (-1)^{\alpha+\beta}\partial_{j_\beta} a_{j_1\dots\hat{j}_\beta\dots m\dots j_r} + \sum_{\alpha+1\leqslant\beta\leqslant r} (-1)^{\alpha+\beta+1}\partial_{j_\beta} a_{j_1\dots m\dots\hat{j}_\beta\dots j_r}.$$

Совпадение этой величины с $\partial_m a_{j_1\dots j_r}$ немедленно следует из того, что $d\omega=0$ (нужно развернуть это равенство и учесть равенство нулю коэффициента при члене вида $dx_{j_1}\wedge\dots\wedge dx_m\wedge\dots\wedge dx_{j_r}$). Утверждение доказано.

Это предложение вместе с леммой позволяет задать на $H^r(K)$ естественную структуру $\mathfrak{S}(k)$-модуля.

В случае нулевой характеристики эту структуру можно интерпретировать следующим образом. Пусть K — поле функций на алгебраиче-

ском многообразии X, которое определено над конечным расширением k поля комплексных чисел, т. е. является общим членом алгебраической системы многообразий. Хорошо известно, что в этом случае замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^r(K)$ определяет некоторый r-мерный коцикл на многообразии X, значение которого на r-мерном топологическом цикле Z равно интегралу формы ω по Z. Этот интеграл (период формы ω) зависит от параметров алгебраической системы, и можно поставить вопрос о вычислении его «производной по параметру» $\partial\left(\int\limits_Z \omega\right)$ для $\partial \in \mathfrak{G}(k)$. Предложение 3 показывает, что неоднозначность, возникающая при внесении ∂ под знак интеграла, компенсируется тем, что разница результатов будет интегралом по циклу от полного дифференциала, т. е. нулем. Тем самым дифференцирование абстрактного класса когомологий де Рама соответствует взятию производной по параметру от вектора, компонентами которого являются периоды дифференциальной формы по базису топологических циклов соответствующей размерности.

7. Дифференцирования и оператор Картье. В этом пункте будем считать, что характеристика $p \neq 0$. Пусть $\partial \in \mathfrak{G}(k)$. Изоморфизм $F^{-1}\colon k \to k^{\frac{1}{p}}$ порождает изоморфизм $F^{*}\colon \mathfrak{G}(k) \to \mathfrak{G}\left(k^{\frac{1}{p}}\right)$, где, по определению,

$$(F^{*}\partial)\, a = (\partial a^{p})^{\frac{1}{p}}.$$

Любой сепарабельно-порождающий базис трансцендентности $(x_1, \ldots, x_n)$ поля K/k является также сепарабельно-порождающим базисом трансцендентности расширения $Kk^{\frac{1}{p}} \Big/ k^{\frac{1}{p}}$. Это позволяет определить дифференцирование $F^{*}\partial_x$.

Пусть теперь Γ — полная неособая кривая рода $g \geqslant 1$ над полем характеристики $p \neq 0$, $\mathfrak{G}$ — некоторая конечномерная алгебра Ли дифференцирований этого поля, $(r_1, \ldots, r_g)$ — канонический базис пространства

$$\mathfrak{R}/(\mathfrak{R}(0) + R_k(\Gamma)) = H^1(\Gamma, O_\Gamma).$$

Хорошо известно, что пространства $H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ и $H^0(\Gamma, \Omega^1)$, где $\Omega^1 = \Omega^1(R_k(\Gamma)/k)$, двойственны. Выберем некоторый базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ пространства дифференциалов первого рода $H^0(\Gamma, \Omega^1)$ на кривой Γ и обозначим через $K = \|(\omega_i, r_j)\|$ соответствующую матрицу скалярных произведений. Из определения матрицы Хассе — Витта A кривой Γ легко следует, что

$$KA = \|(\omega_i, Fr_j)\|.$$

В частности, если базис $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ двойственен базису $(r_1, \ldots, r_g)$, то

$$A = \|(\omega_i, Fr_j)\|.$$

В дальнейшем мы будем считать это предположение выполненным.

Рассмотрим k-модуль M, представляющий собой фактор-пространство дифференциалов второго рода кривой Γ по пространству полных

дифференциалов. Розенлихт [10] показал, что размерность M равна g. Обозначим через m_i образ дифференциала ω_i в пространстве M. Предложение 3 позволяет считать, что алгебра $\mathfrak{S}$ действует на M. Построим модуль дифференциальных соотношений

$$R(m_1, \ldots, m_g) \subset U^g.$$

Кроме того, алгебра $\mathfrak{S}$ действует на k^g; обозначая через $n_i \in k^g$ i-ю строку матрицы A, мы можем построить модуль дифференциальных соотношений

$$R(n_1, \ldots, n_g) \subset U^g.$$

ТЕОРЕМА 2. $R(m_1, \ldots, m_g) \subset R(n_1, \ldots, n_g)$. *Иначе говоря, строки n_i матрицы Хассе — Витта удовлетворяют любому дифференциальному соотношению, которому удовлетворяют элементы базиса пространства дифференциалов первого рода (двойственного каноническому базису пространства $H^1(\Gamma, O_\Gamma)$) по модулю пространства полных дифференциалов.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{g} u_i m_i = 0, \quad u_i \in U.$$

Это означает, что для любого сепарабельно-порождающего элемента $x \in R_k(\Gamma)/k$ имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{g} r(u_i)_x \, \omega_i = d\varphi,$$

где оператор $r(u_i)_x$ составлен из дифференцирований $r(\partial_x)$ так же, как оператор u_i из ∂, а дифференциал $d\varphi$ зависит от x. Отсюда следует, что для любого элемента канонического базиса r_j, $j = 1, \ldots, g$, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{g} (r(u_i)_x \, \omega_i, \; Fr_j) = (d\varphi, \; Fr_j). \tag{7}$$

В силу леммы Картье [см. [13], § 9], для любого дифференциала $\omega \in \Omega^1$ имеет место равенство

$$(\omega, \; Fr_j) = (C\omega, \; r_j)^p.$$

Применяя его к соотношению (7) и пользуясь тем, что $C(d\varphi) = 0$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{g} (Cr(u_i)_x(\omega_i), \; r_j)^p = 0, \quad j = 1, \ldots, g. \tag{8}$$

Из предложения 3 следует, что оператор $C \circ r(u_i)_x$ не зависит от выбо-

ра x. Поэтому, выбирая для каждой точки P_i, $i=1, \ldots, g$, в качестве x локальную униформизирующую t_i, легко получаем, что

$$(Cr(u_i)_x(\omega_i),\ r_j)^p = (F^*u_i(C\omega_i,\ r_j))^p =$$
$$= u_i((C\omega_i,\ r_j)^p) = u_i(\omega_i,\ Fr_j).$$

Таким образом, равенство (8) дает:

$$\sum_{i=1}^{g} u_i(\omega_i,\ Fr_j) = 0, \quad j=1, \ldots, g,$$

а это равносильно утверждению теоремы.

8. Замечания об универсальности. Корректно интерпретировать утверждение о том, что классическая система дифференциальных уравнений для периодов кривой Г имеет своими решениями строки матрицы Хассе — Витта *независимо от характеристики* p, можно следующим образом. Возьмем некоторую кривую рода $g \geqslant 1$ над полем алгебраических функций в характеристике нуль (например, «общую кривую рода g»). Выберем на ней базис пространства дифференциалов первого рода, двойственный каноническому, и построим систему дифференциальных соотношений между ними. Это будет совокупность формул вида:

$$\sum a_{i_1 \ldots i_k} \partial_1^{i_k} \ldots \partial_k^{i_k} u_j\, dv = dv_j,$$

где $a_{i_1 \ldots i_k} \in R$, u_j, $v_j \in R_k(\Gamma)$. Построим алгебраическое многообразие X над абсолютно алгебраическим полем констант конечной степени k_0, поле функций на котором абстрактно изоморфно полю функций на кривой Г. Кривая Г лежит на этом многообразии. Для почти всех простых дивизоров $\mathfrak{p}$ поля k_0 редукции $X \to \overline{X}$ и $\Gamma \to \overline{\Gamma}$ невырожденны, не меняют рода кривой Г, переводят дифференциалы первого рода в дифференциалы первого рода и вообще обладают всеми «хорошими» свойствами. Тот факт, что можно редуцировать также дифференцирования ∂, следует из того, что формулы дифференцирования универсальны, а существование результата обеспечивается регулярностью редукции (эти соображения не претендуют на строгое доказательство).

Возвращаясь к примеру, рассмотренному в начале этого параграфа, мы можем получить результат Игуза из теоремы 2, пользуясь тем, что дифференциал $\omega = \frac{dx}{y}$ кривой

$$y^2 = x(x-1)(x-t)$$

удовлетворяет соотношению

$$t(1-t)\,\partial_x^2\omega + (1-2t)\,\partial_x\omega - \frac{1}{4}\omega = d\frac{y}{(x-t)^2}, \tag{9}$$

где ∂ — дифференцирование по $t : \partial t = 1$.

Игуза замечает, что хотя уравнение для периодов, которое полу-

чается из (9), дает в случае нулевой характеристики два линейно независимых решения, соответствующее уравнение в конечной характеристике обладает лишь одним независимым решением A. Этот факт непосредственно связан с упомянутой теоремой Розенлихта о размерности фактор-пространства дифференциалов первого рода по пространству полных дифференциалов. В самом деле, если в характеристике нуль дифференциалы ω и $\partial_x\omega$ линейно независимы по модулю полных дифференциалов [см. ([17]), п. 11], то в случае конечной характеристики имеет место уравнение вида

$$\partial_x \omega + a(t)\omega = d\varphi,$$

т. е. уравнение

$$\frac{dA}{dt} + a(t)A = 0.$$

Однако коэффициент $a(t)$ здесь явно зависит от характеристики p, так что снижение порядка уравнения достигается ценой утраты универсальности

Автор глубоко признателен И. Р. Шафаревичу, под руководством которого была выполнена эта работа, за советы и указания.

Поступило
16.IV.1960

ЛИТЕРАТУРА

1 Cartier P., Une nouvelle opération sur les formes différentielles, Comptes Rendus Ac. Sci. Paris, 244 (1957), 426—428.

2 Cartier P., Questions de rationalité des diviseurs en géomètrie algébrique (thèse), Bull. Soc. Math. France, 86, F. 3 (1958), 177 — 251.

3 Cartier P., Dualité des variétés abéliennes, Séminaire Bourbaki, mai 1958.

4 Chow W. L., The Jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. of Math., 76 (1954), 453 — 476.

5 Deuring M., Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abhandlungen Math. Sem. Hamburg Univ., 14 (1941), 197—272.

6 Hasse H., Zur Theorie der abstraktern elliptischen Funktionenkörper, J. reine u. angew. Math., 175 (1936), 55—62, 69—88, 193—208.

7 Hasse H., Witt E., Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Charakteristik p, Monatshefte für Math. und Phys., 43 (1936), 477 — 492.

8 Igusa J. И., Class number of a definite quaternion with prime discriminant, Proc. Nat. Ac. Sci. USA, 44 (1958), 312 — 314.

9 Lang S., Abelian Varieties, Interscience Tracts, New York, 1959.

10 Rosenlicht M., Differentials of the second kind for algebraic function fields of one variable, Ann. of Math., 57 (1953), 517—523.

11 Rosenlicht M., Extensions of vector groups by abelian varieties, Amer. J. of Math., 80 (1958), 685—714.

12 Serre J.-P., Sur la topologie des variétés abéliennes en caracteristique p, Symposium de topologie algébrique, Mexico, 1956.

13 Serre J.-P., Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p, Amer. J. of Math., 80 (1958), 715—739.

14 Serre J.-P., Groupes algébriques et corps de classes, Paris, 1959.

[15] W i t t E., Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grade p^m, J. reine u. angew. Math., 176 (1936), 126—140.
[16] Ш е в а л л е К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, Физматгиз, 1959.
[17] М а н и н Ю. И., Алгебраические кривые над полями с дифференцированием, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 737—756.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 173–238

В. К. ДЗЯДЫК

К ВОПРОСУ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ L ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Изучается вопрос о движении корней при дифференцировании разностей вида $T(x) - \varphi(x)$, где $T(x)$ — тригонометрический полином, а $\varphi(x)$ — кратно монотонная функция.

Доказывается, что для любой аналитической в интервале $(0, 2\pi)$ функции вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{или} \quad f(x) = \int_{2n}^{\infty} x^s \, d\sigma(s),$$

где все $a_k \geqslant 0$ или, соответственно, $\sigma(s)$ — не убывающая в промежутке $[2n, \infty)$ функция, среди тригонометрических полиномов $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$ наилучшее приближение в метрике L осуществляет тот полином $T_n^*(x) = T_n(f; x)$, который интерполирует функцию $f(x)$ в точках $x_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, и находится точная величина наилучшего (в L) приближения $E_n(f)_L$ для каждой такой функции, а также для некоторых других функций.

Введение

В работе ([1]) нами был решен вопрос о наилучшем в метрике L приближении на отрезке $[0, 2\pi)$ при помощи тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$ для любой функции $f(x)$, определенной и абсолютно монотонной не только на отрезке приближения $[0, 2\pi)$, но и на целой полуоси $(-\infty, 2\pi)$. В настоящей работе получено решение аналогичного вопроса для более широкого класса функций и, в частности, для всех функций, абсолютно монотонных на конечном отрезке (см. §§ 4 и 5). Задача эта оказалась значительно более сложной, чем предыдущая, и вызвала для своего решения необходимость в применении новых методов, которые в свою очередь позволили дать, на наш взгляд, более или менее удовлетворительное решение задачи о скорости движения корней тригонометрических полиномов при дифференцировании (§ 1) и решить две задачи о максимальном числе корней некоторых трансцендентных уравнений (§ 2).

В §§ 5 и 6 при помощи общих теорем, доказанных С. М. Никольским [см. ([2])], извлекается ряд следствий из результатов, полученных в § 4. В частности, из более общих соображений получаются результаты Ж. Фавара [см. ([3]) и ([4])] и Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [см. ([5])] о наилучшем приближении на классах функций, имеющих ограниченную s-ю производную $(s = 1, 2, \ldots)$, а также на классах сопряженных функций.

§ 1. О движении корней тригонометрического полинома при дифференцировании

Из равенства

$$(\sin nx)' = n \sin n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right)$$

видно, что каждый корень функции $\sin nx$ после дифференцирования смещается влево на расстояние, равное $\frac{\pi}{2n}$.

Для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$ закономерность в движении корней (если они существуют) при дифференцировании оказывается значительно более сложной. Приведем некоторые (нужные для дальнейшего) полученные в этом направлении результаты, которые, на наш взгляд, представляют также самостоятельный интерес.

Определение. Пусть x_0 — простой корень полинома $T_n(x)$. Назовем смещением этого корня влево (вправо) при дифференцировании величину

$$c_1(x_0) = |x_0' - x_0|, \tag{1.1}$$

где x_0' — самый правый в интервале $(x_0 - 2\pi,\ x_0)$ (соответственно самый левый в интервале $(x_0,\ x_0 + 2\pi)$) корень полинома $T_n'(x)$, и будем говорить, что при дифференцировании корень x_0 полинома $T_n(x)$ сместился в корень x_0' полинома $T_n'(x)$.

В том случае, когда x_0 есть корень кратности k для полинома $T_n(x)$, мы этот корень будем рассматривать как k корней $x_0^{[0]}$, $x_0^{[1]}$, $x_0^{[2]}, \ldots, x_0^{[k-1]}$ и считать, что корень $x_0^{[j]}$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, при первых j дифференцированиях не получает никакого смещения (т. е. получает смещение, равное нулю), а при $(j+1)$-м дифференцировании получает смещение $c_{j+1}(x_0^{[j]})$, которое определяется по формуле

$$c_{j+1}(x_0^{[j]}) = |x_0' - x_0^{[j]}| = |x_0' - x_0|, \tag{1.1'}$$

где x_0' — самый правый в интервале $(x_0 - 2\pi,\ x_0)$ (соответственно самый левый в интервале $(x_0,\ x_0 + 2\pi)$) корень полинома $T_n^{j+1}(x)$.

Принимая во внимание, что смещение влево корня x_0 полинома $T_n(x)$, очевидно, является в то же время смещением вправо корня $-x_0$ полинома $T_n(-x)$, мы при исследовании вопроса о смещении корней ограничимся только рассмотрением смещений влево, хотя все результаты тривиальным образом будут верны и для смещений корней вправо.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если тригонометрический полином $T_n(x)$ (четный или нечетный) имеет на периоде столько корней, сколько их имеет его производная $T_n'(x)$, то сумма смещений всех корней (расположенных на периоде) полинома $T_n(x)$ при дифференцировании равна π.*

Доказательство. Предположим, для определенности, что полином $T_n(x)$ является нечетным, и обозначим его корни на периоде $(-\pi,\ \pi]$ (или же на $[-\pi,\ \pi]$, если $\alpha_1 = -\beta_1 = -\pi$) в порядке возра-

стания через

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0, \beta_k, \beta_{k-1}, \ldots, \beta_0, \pi\ ^*,$$

где

$$-\pi \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k \leqslant 0, \quad \beta_j = -\alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k), \ k \leqslant n-1.$$

Тогда корнями полинома $T'_n(x)$ будут некоторые числа

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k+1}, \quad \delta_{k+1}, \delta_k, \ldots, \delta_1,$$

где

$$-\pi \leqslant \gamma_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_k \leqslant \gamma_{k+1} \leqslant 0 \leqslant \delta_{k+1} \leqslant \beta_k \leqslant \delta_k \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \beta_1 \leqslant \delta_1 \leqslant \pi,$$

причем, в силу четности полинома $T'_n(x)$,

$$\delta_j = -\gamma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Отсюда следует, что сумма смещений (влево) всех корней полинома $T_n(x)$ равна

$$|\gamma_1 - \alpha_1| + |\gamma_2 - \alpha_2| + \ldots + |\gamma_k - \alpha_k| + |\gamma_{k+1} - 0| + |\delta_{k+1} - \beta_k| + \ldots$$
$$\ldots + |\delta_2 - \beta_1| + |\delta_1 - \pi| = \pi - \sum_1^{k+1} \delta_j + \sum_1^k \beta_j + \sum_1^k \alpha_j - \sum_1^{k+1} \gamma_j =$$
$$= \pi - \sum_1^{k+1} (\gamma_j + \delta_j) + \sum_1^k (\alpha_j + \beta_j) = \pi,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть k — произвольное натуральное число. Тогда если $T_n(x)$ — полином порядка не выше n (четный или нечетный), то после $2k+5n$ последовательных дифференцирований каждый из его корней (если они существуют) сместится влево на величину $> \frac{k}{n}\pi$.*

Доказательство. Действительно, если после дифференцирования число корней остается тем же, то, в силу предыдущей теоремы, сумма смещений всех корней будет равна π. Если же после какого-нибудь j-го дифференцирования полинома $T_n(x)$ появляются новые корни, то сумма смещений всех корней при этом дифференцировании будет равна некоторому числу $\pi_j \leqslant \pi$. Но так как число дифференцирований, при которых могут появляться новые корни (каждый раз в четном числе), очевидно, не превосходит n, то после $2k+5n$ дифференцирований сумма последовательных смещений корней полинома $T_n^{(2k+5n)}(x)$ будет больше $(2k+4n)\pi$. Поэтому среди 2ν корней ($\nu \leqslant n$) полинома $T_n^{(2k+5n)}(x)$ по крайней мере один корень получит при дифференцированиях общее смещение, которое будет больше, чем $\frac{k}{n}\pi + 2\pi$; отсюда следует, что каждый из корней полинома $T_n(x)$ должен получить сме-

* В случае, если точки $-\pi$ и π служат для полинома $T_n(x)$ корнями кратности $2i+1$, $i \leqslant k$ (так что $-\pi^{[0]} = -\pi^{[1]} = \ldots = -\pi^{[i-1]} = -\pi^{[i]} = \ldots = -\pi^{[2i]} = -\pi$ и $\pi^{[0]} = \pi^{[1]} = \ldots = \pi^{[i-1]} = \pi^{[i]} = \ldots = \pi^{[2i]} = \pi$), мы полагаем:

$$\beta_i = \pi^{[0]}, \quad \beta_{i-1} = \pi^{[1]}, \ \ldots, \ \beta_1 = \pi^{[i-1]}, \quad \pi = \pi^{[i]};$$

$$\alpha_1 = -\pi^{[i+1]}, \ \alpha_2 = -\pi^{[i+2]}, \ \ldots, \ \alpha_{i-1} = -\pi^{[2i-1]}, \ \alpha_i = -\pi^{[2i]}.$$

щение $> \frac{k}{n}\pi$ (действительно, из того очевидного факта, что всякие два корня x_0 и $x_0+2\pi$ полинома $T_n(x)$ получают при дифференцировании одно и то же смещение *, легко заключить, что если два каких-нибудь корня x_1 и x_2 полинома $T_n(x)$ находятся на рсстоянии $< 2\pi$ и после j дифференцирований смещаются в корни $x_1^{(j)}$ и $x_2^{(j)}$ полинома $T_n^{(j)}(x)$, то $|x_2^{(j)} - x_1^{(j)}| < 2\pi$; отсюда и следует доказываемое утверждение).

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть* $T_n(x)$ — *произвольный тригонометрический полином порядка* $\leqslant n$, *обращающийся в нуль по крайней мере в одной точке, и пусть* x_0 — *точка (или одна из точек), в которой* $T_n(x)$ *по модулю принимает свое наибольшее на периоде значение (так что* $\max_x |T_n(x)| = |T_n(x_0)|$). *Тогда, каково бы ни было натуральное число* N, *после* N *дифференцирований самый правый в интервале* $(x_0 - 2\pi, x_0)$ *корень полинома* $T_n(x)$ *сместится влево за точку* $x_0 - \frac{N}{en}$.

Доказательство. Предположим для определенности, что $T_n(x_0) > 0$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = T_n(x_0)\, e^{en(x-x_0)}. \tag{1.2}$$

Так как $f(x_0) = T_n(x_0)$ и, в то же время, $T_n'(x_0) = 0 < f'(x_0)$, то в точках x, расположенных достаточно близко к точке x_0 слева от нее, $T_n(x) > f(x)$. С другой стороны, вследствие того, что $f(x) > 0$ при всех x, а $T_n(x)$ в некоторых точках обращается в нуль, левее точки x_0 найдется некоторая точка x_1, в которой полином $T_n(x)$ снова интерполирует функцию $f(x)$, и, далее, в некоторой точке ξ**, расположенной еще левее, обращается в нуль, т. е. имеют место условия:

а) $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T_n(x_1) = f(x_1)$, $T_n(\xi) = 0$, $\xi < x_1 < x_0$;

б) в точках x, расположенных достаточно близко к точке x_0 слева от нее, $T_n(x) > f(x)$.

Из этих условий видно, что после первого дифференцирования найдется точка $x_0' \in (x_1, x_0)$ такая, что $T_n'(x_0') = f'(x_0')$ и, в то же время, в точках x, расположенных достаточно близко к точке x_0' слева от нее, $T_n'(x) > f'(x)$ ***. Поэтому если обозначить через ξ' тот из кор-

---

* В отношении кратных корней кратности l это утверждение верно в том смысле, что при каждом $j = 0, 1, 2, \ldots, l-1$, корни $x_0^{[j]}$ и $(x_0+2\pi)^{[j]}$ (т. е. «соответствующие» корни) получают одинаковое смещение.

** Эту точку мы будем считать (очевидно, не ограничивая общности) самым правым в интервале $(x_0 - 2\pi, x_0)$ корнем полинома $T_n(x)$.

*** Действительно, так как в точках x, расположенных достаточно близко к точке x_0 слева от нее,

$$T_n(x) - f(x) = \int_{x_1}^{x} [T_n'(t) + f'(t)]\, dt > 0,$$

то найдется хотя бы одна точка $\eta \in (x_1, x) \subset (x_1, x_0)$, в которой $T_n'(\eta) - f'(\eta) > 0$. С другой стороны, $T_n'(x_0) - f'(x_0) < 0$. Поэтому в интервале (η, x_0) существуют корни разности $T_n'(x) - f'(x)$. Самый левый из этих корней, очевидно, можно принять за x_0'.

ней полинома $T'_n(x)$, в который сместится влево после дифференцирования корень ξ полинома $T_n(x)$, то в интервале (ξ', x'_0) найдется некоторая точка x'_1, в которой $T'_n(x'_1) = f'(x'_1)$, т. е. после первого дифференцирования получим:

a) $T'_n(x'_0) = f'(x'_0), \quad T'_n(x'_1) = f'(x'_1), \quad T'_n(\xi') = 0, \quad \xi' < x'_1 < x'_0;$

б) в точках, расположенных достаточно близко к точке x'_0 слева от нее, $T'_n(x) > f'(x)$.

Продолжая подобные рассуждения, убедимся, что после N дифференцирований корень ξ полинома $T_n(x)$ сместится в некоторый корень $\xi^{(N)}$ полинома $T_n^{(N)}(x)$, правее которого найдутся точки $x_1^{(N)} < x_0^{(N)}$ такие, что

$$T_n^{(N)}(x_1^{(N)}) = f^{(N)}(x_1^{(N)}), \quad T_n^{(N)}(x_0^{(N)}) = f^{(N)}(x_0^{(N)}).$$

Так как, с одной стороны,

$$f^{(N)}(x_0^{(N)}) = T_n(x_0)\cdot n^N e^N \cdot e^{en\,(x_0^{(N)} - x_0)} = \max_x |T_n(x)|\, n^N e^{en\left(x_0^{(N)} + \frac{N}{en} - x_0\right)},$$

а с другой — в силу неравенства Бернштейна,

$$f^{(N)}(x_0^{(N)}) = T_n^{(N)}(x_0^{(N)}) = |T_n^{(N)}(x_0^{(N)})| \leqslant \max_x |T_n(x)|\cdot n^N,$$

то

$$x_0^{(N)} + \frac{N}{en} - x_0 \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$\xi^{(N)} < x_0^{(N)} \leqslant x_0 - \frac{N}{en},$$

что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает следующее обобщение теоремы 1.2 на случай произвольных тригонометрических полиномов.

ТЕОРЕМА 1.2′. *Всякий корень тригонометрического полинома* $T_n(x)$ *порядка* $\leqslant n$ *после* $[(k+2n)e\pi + 1]$ *дифференцирований сместится влево на расстояние* $> \frac{k}{n}\pi$.

Действительно, в силу предыдущей теоремы, после $[(k+2n)e\pi+1]$ дифференцирований самый правый в интервале $(x_0 - 2\pi, x_0)$ корень ξ полинома $T_n(x)$ сместится влево за точку $x_0 - \frac{k\pi}{n} - 2\pi$. Поэтому каждый из остальных корней полинома $T_n(x)$, расположенных в полуинтервале $[\xi, \xi + 2\pi)$, должен, очевидно, сместиться влево за точку $x_0 - \frac{k\pi}{n}$, т. е. на расстояние $> \frac{k\pi}{n}$.

Замечание. Если число корней полинома $T_n(x)$ не увеличивается после дифференцирования, то сумма смещений вправо корня x_i и влево соседнего с ним (справа) корня x_{i+1}, очевидно, равна $x_{i+1} - x_i$, т. е. в этом случае сумма смещений всех корней влево и вправо после одного дифференцирования равна 2π. Отсюда, рассуждая так же, как в тео-

реме 1.2, легко заключить, что для смещения по крайней мере одного корня на расстояние $> \frac{k}{n}\pi + 2\pi$ достаточно произвести некоторое число N дифференцирований, где $N \leqslant 2k+5n$; следовательно, после $2k+5n < [(k+2n)e\pi + 1]$ дифференцирований каждый из корней полинома $T_n(x)$ получит смещение $> \frac{k\pi}{n}$ в одном и том же (в каком — неизвестно) для всех корней направлении.

Недостаток этого рассуждения состоит в том, что оно не дает возможности сделать какое-нибудь заключение о скорости движения корней во вполне определенном направлении.

§ 2. О максимальном числе корней некоторых трансцендентных уравнений

Пусть $T_n(x)$ — произвольный тригонометрический полином порядка не выше n.

В работе (1) была доказана теорема, согласно которой для класса функций $f(x)$, абсолютно монотонных на полуоси $(-\infty, 2\pi)$, любое трансцендентное уравнение вида

$$f(x) - T_n(x) = 0$$

имеет в полуинтервале $[0, 2\pi)$ не больше чем $2n+1$ корней.

В этом параграфе будут доказаны две теоремы аналогичного характера (см. теоремы 2.2 и 2.3), роль которых в теории приближения функций выяснится в §§ 5 и 6.

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть при каком-нибудь натуральном l у функции $k(x)$ существуют производные до l-го порядка включительно, неотрицательные и непрерывные в некотором промежутке (a, b) (или $(a, b]$), $a < b - 2\pi$, причем производная $k^{(l-1)}(x)$ выпукла, и пусть какой-нибудь тригонометрический полином $T(x)$ интерполирует функцию $k(x)$ с учетом кратностей не меньте чем в $2N$ точках $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2N}$ полуинтервала $[b-2\pi, b)$ (или $(b-2\pi, b]$). Тогда если после l-кратного дифференцирования разности $k(x) - T(x)$ корень этой разности ξ_{2N} сместится влево в точку $\xi_{2N}^{(l)}$ так, что $\xi_{2N}^{(l)} > a + 2\pi$, то разность $k^{(l)}(x) - T^{(l)}(x)$ будет иметь в промежутке $(\xi_{2N}^{(l)} - 2\pi, \xi_{2N}^{(l)}]$ не меньше чем $2N$ корней.*

Доказательство. Будем считать, что $l = 1$ (чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно, очевидно, рассмотреть только этот случай).

Кроме того, будем считать, что $\xi_{2N} = b$ (от этого предположения условия, содержащиеся в теореме, очевидно, не нарушаются) и что в промежутке $(b-2\pi, b]$, кроме точек $\xi_i\ (i = 1, 2, \ldots, 2N)$, других точек интерполяции функции $k(x)$ полиномом $T(x)$ нет (в противном случае справедливость теоремы 2.1 немедленно следовала бы из теоремы Ролля). Наконец, предположим, что $k(\xi_{2N}) > k(\xi)$ при всех $\xi \in (a, \xi_{2N})$ (ибо в случае равенства $k(\xi_{2N}) = k(\xi)$ функция $k(x)$ вследствие монотонного возрастания и выпуклости была бы постоянной на всем промежутке $(a, b]$ и доказательство теоремы было бы тривиальным).

Согласно теореме Ролля, в сегменте $[\xi_1, \xi_{2N}]$ найдется по крайней мере $2N-1$ точек ξ_i' $(i=1, 2, 3, \ldots, 2N)$, в каждой из которых полином $T'(x)$ интерполирует функцию $k'(x)$:

$$\xi_1 \leqslant \xi_2' \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_3' \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2N-1} \leqslant \xi_{2N}' \leqslant \xi_{2N},$$

$$T'(\xi_i') = k'(\xi_i'), \quad i = 2, 3, \ldots, 2N.$$

В силу выпуклости функции $k(x)$, $k'(\xi_{2N}') \geqslant k'(\xi_{2N}' - 2\pi)$ [см., например, ([8]), § 4. 141]. Рассмотрим отдельно случаи равенства и неравенства.

1. Пусть $k'(\xi_{2N}') = k'(\xi_{2N}' - 2\pi)$. В этом случае, в силу монотонного возрастания (в слабом смысле) и выпуклости функции $k(x)$, она должна быть линейной на сегменте $[\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}']$:

$$k(x) = cx + d, \quad x \in [\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}'], \quad c \geqslant 0.$$

Поэтому разность $k'(x) - T'(x)$, будучи в промежутке $[\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}']$ тригонометрическим полиномом (при $x \in [\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}']$ разность $k'(x) - T'(x) = c - T'(x)$) имеет на периоде $(\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}']$, кроме корней $\xi_2', \xi_3', \ldots, \xi_{2N}'$, еще по крайней мере один корень (ибо число корней на периоде у любого тригонометрического полинома является четным).

2. Пусть $k'(\xi_{2N}') > k'(\xi_{2N}' - 2\pi)$. В этом случае следует рассмотреть следующие две возможности.

а) Если $\xi_1 < \xi_{2N}$, то, в силу соотношений

$$T'(\xi_{2N}' - 2\pi) = T'(\xi_{2N}') = k'(\xi_{2N}') > k'(\xi_{2N}' - 2\pi),$$

будем иметь:

$$T'(\xi_{2N}' - 2\pi) - k'(\xi_{2N}' - 2\pi) > 0, \tag{α}$$

а так как

$$T(\xi_{2N} - 2\pi) = T(\xi_{2N}) = k(\xi_{2N}) > k(\xi_1) = T(\xi_1),$$

то найдется по крайней мере одна точка $\xi' \in (\xi_{2N} - 2\pi, \xi_1)$, в которой $T'(\xi') < 0$, и, значит,

$$T'(\xi') - k'(\xi') < 0. \tag{β}$$

Из (α) и (β) следует, что найдется по крайней мере одна точка $\xi_1' \in (\xi_{2N}' - 2\pi, \xi') \subset (\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_2')$, в которой

$$T'(\xi_1') = k'(\xi_1').$$

б) Если $\xi_1 = \xi_{2N}$ (т. е. точка ξ_1 является $2N$-кратным корнем разности $k(x) - T(x)$), то, поскольку на периоде $(\xi_{2N} - 2\pi, \xi_{2N})$ всегда существует точка ξ', в которой $T'(\xi') = 0$, будем иметь:

$$T'(\xi_{2N} - 2\pi) - k'(\xi_{2N} - 2\pi) = k'(\xi_{2N}) - k'(\xi_{2N} - 2\pi) > 0,$$

$$T'(\xi') - k'(\xi') \leqslant 0,$$

и, значит, опять найдется по крайней мере одна точка

$$\xi_1' \in (\xi_{2N} - 2\pi, \xi'] \subset (\xi_{2N}' - 2\pi, \xi_{2N}') = (\xi_{2N}' \pi - 2, \xi_2'),$$

в которой

$$T'(\xi_1') = k'(\xi_1').$$

Этим теорема 2.1 для всех случаев полностью доказана.

Определение 2.1. Будем говорить, что заданная в промежутке $[0, 2\pi)$ функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $A_n^1(a)$ или $A_n^2(a)$, где n—натуральное число и $a \in [0, 2\pi]$ *, если:

1) функция $\varphi(x)$ является непрерывной вместе со своими производными до n-го порядка включительно;

2) при всех $x \in [a, 2\pi)$ имеют место неравенства

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad \varphi'(x) \geqslant 0, \ \ldots, \ \varphi^{(n)}(x) \geqslant 0;$$

3) $\varphi(a) = \varphi'(a) = \ldots = \varphi^{(n)}(a) = 0$;

4) при всех $x \in [0, a]$

$$\varphi(x) \leqslant 0, \quad \varphi'(x) \geqslant 0, \quad \varphi''(x) \leqslant 0, \ \ldots, \ (-1)^{n-1}\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$$

для функций классов $A_n^1(a)$ и

$$\varphi(x) \geqslant 0, \quad \varphi'(x) \leqslant 0, \quad \varphi''(x) \geqslant 0, \ \ldots, \ (-1)^{n}\varphi^{(n)}(x) \geqslant 0$$

для функций классов $A_n^2(a)$.

В силу этого определения,

$$A_1^1(a) \supset A_2^1(a) \supset A_3^1(a) \supset \ldots$$

и

$$A_1^2(a) \supset A_2^2(a) \supset A_3^2(a) \supset \ldots .$$

Примерами функций классов $A_n^1(a)$ и $A_n^2(a)$ могут служить аналитические в интервале $(0, 2\pi)$ функции соответственно вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} a_{2k+1}(x-a)^{2k+1}, \quad a_{2k+1} \geqslant 0,$$

и

$$\varphi(x) = \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{\infty} a_{2k}(x-a)^{2k}, \quad a_{2k} \geqslant 0.$$

ЛЕММА 2.1. *Если функция* $\varphi(x) \in A_l^1(0) = A_l^2(0)$, $l = [6ne\pi] + 3$, *то, каков бы ни был тригонометрический полином* $T_n(x) \not\equiv 0$ *порядка* $\leqslant n$, *уравнение* $\varphi(x) - T_n(x) = 0$ *может иметь в полуинтервале* $[0, 2\pi)$ *не больше чем* $2n+1$ *корней.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ x \leqslant 0, \\ \varphi(x), & \text{если} \ x \in [0, 2\pi), \end{cases}$$

и допустим противное — что некоторый полином $\overline{T}_n(x)$ порядка $\leqslant n$ ин-

* Если $a = 2\pi$, то функция $\varphi(x)$ должна быть определена также в точке 2π.

терполирует функцию $\varphi(x)$, а следовательно, и функцию $\Phi(x)$ по крайней мере в $2n+2$ точках * $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2n+2}$ из полуинтервала $[0, 2\pi): 0 \leqslant \xi_1, \xi_{2n+2} < 2\pi$. Тогда, продифференцировав один раз полином $\overline{T}_n(x)$, мы получим полином $\overline{T}'_n(x)$, который, в силу теоремы 2.1, будет интерполировать функцию $\Phi'(x)$ по крайней мере в $2n+2$ точках ξ'_i:

$$\xi'_1 \leqslant \xi'_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi'_{2n+2}, \quad \xi'_{2n+2} < \xi'_1 + 2\pi,$$

и, кроме того, будет обращаться в нуль по крайней мере в одной точке $r'_0 \in (\xi'_{2n+2}, \xi'_{2n+2} + 2\pi)$. Будем считать, что r'_0 является первым корнем полинома $\overline{T}'_n(x)$, расположенным правее точки ξ'_{2n+2}.

Учитывая теперь, что

а) функция $\Phi'(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1,

б) после $(l-2)$-кратного дифференцирования $(l-2 = [6ne\pi]+1)$ корень r'_0 полинома $\overline{T}'_n(x)$, в силу теоремы 1.2', сместится влево в некоторую точку $r_0^{(l-1)}$ на расстояние $> 4\pi$ (так что $r_0^{(l-1)} < r'_0 - 4\pi < 0$),

в) вместе с корнем $r_0^{(l-1)}$ сместится влево за начало координат корень ξ'_{2n+2} разности $\Phi'(x) - \overline{T}'_n(x)$:

$$\xi_{2n+2}^{(l-1)} \leqslant r_0^{(l-1)} < 0,$$

мы, в силу теоремы 2.1, заключаем, что разность $\Phi^{(l-1)}(x) - \overline{T}_n^{(l-1)}(x)$ будет в полуинтервале $(\xi_{2n+2}^{(l-1)} - 2\pi, \xi_{2n+2}^{(l-1)}]$ содержать $\geqslant 2n+2$ корня. Но так как при $x \in (\xi_{2n+2}^{(l-1)} - 2\pi, \xi_{2n+2}^{(l-1)}] \subset (-\infty, 0)$ $\Phi^{(l-1)}(x) = 0$, то отсюда следует, что число корней полинома $-T_n^{(l-1)}(x)$ на периоде $(\xi_{2n+2}^{(l-1)} - 2\pi, \xi_{2n+2}^{(l-1)}]$ будет $\geqslant 2n+2$, что, очевидно, невозможно, ибо $\overline{T}_n^{(l-1)}(x)$ — не равный тождественно нулю полином порядка $\leqslant n$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — функции, принадлежащие соответственно классам $A_2^1(a)$ и $A_2^2(a)$, $0 < a < 2\pi$, и пусть*

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_\mu, \quad \mu \geqslant 4, \tag{ξ}$$

и

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_\nu, \quad \nu \geqslant 1, \tag{r}$$

— две системы точек, удовлетворяющих условиям:

$$0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 < a, \quad a < \xi_{\mu-1} \leqslant \xi_\mu < 2\pi, \quad \xi_\mu - 2\pi < r_1, \quad r_\nu < \xi_1,$$
$$\varphi_i(\xi_2) \neq 0, \quad \varphi_i(\xi_{\mu-1}) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда если какой-нибудь тригонометрический полином $T(x)$ интерполирует функцию $\varphi_1(x)$ (или $\varphi_2(x)$) в точках системы (ξ) и обращается в нуль в точках системы (r), то полином $T'(x)$ будет интерполиро-

* Так как из условий леммы легко вытекает, что всякая функция вида $\equiv \text{const} \neq 0$ может интерполировать функцию $y = \varphi(x)$ не больше чем в одной точке, то, очевидно, $\overline{T}_n(x) \neq \text{const}$.

вать функцию $\varphi_1'(x)$ (соответственно $\varphi_2'(x)$) в системе точек

$$\xi_1' \leqslant \xi_2' \leqslant \ldots \leqslant \xi_{\mu-1}'$$

и будет обращаться в нуль в системе точек

$$r_1' \leqslant r_2' \leqslant \ldots \leqslant r_{\nu+1}';$$

при этом

$$\xi_i' \in [\xi_i, \ \xi_{i+1}], \quad i = 1, 2, \ldots, \mu - 1, \quad r_i' \in [r_{i-1}, \ r_i], \quad i = 2, 3, \ldots \nu,$$

$$r_1' \in (\xi_{\mu-1}' - 2\pi, \ r_1), \quad r_{\nu+1}' \in (r_\nu, \ \xi_1').$$

Доказательство. В существовании точек $\xi_1', \ldots, \xi_{\mu-1}'$ и $r_2', \ldots, r_\nu'$ можно убедиться, применяя теорему Ролля. Чтобы убедиться в существовании корней r_1' и $r_{\nu+1}'$, достаточно заметить, что, в силу условий леммы, в промежутках $(\xi_{\mu-1}' - 2\pi, \ r_1)$ и $(r_\nu, \ \xi_1')$ полином $T(x)$ обязательно переходит от возрастания к убыванию или наоборот. Этим лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. *Если $T_n(x)$ — произвольный, не тождественно постоянный тригонометрический полином порядка не выше n, то среди чисел*

$$T_n'(0), \ T_n''(0), \ \ldots, \ T_n^{(2n+2)}(0) \tag{2.1}$$

найдутся по крайней мере одно положительное число и одно отрицательное.

Доказательство. А) Предположим сначала, что $T_n(x)$ — нечетный полином, и докажем, например, что в этом случае среди чисел

$$T_n'(0), \ T_n'''(0), \ \ldots, \ T_n^{(2n+1)}(0) \tag{2.1'}$$

найдется по крайней мере одно отрицательное число. Допустим противное, предположив, что

$$T_n'(0) \geqslant 0, \quad T_n'''(0) \geqslant 0, \ \ldots; \ T_n^{(2n+1)}(0) \geqslant 0. \tag{2.2}$$

1) Обозначим при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+2$ через $x_1^{(i)}$ самый левый в полуинтервале $(0, 2\pi]$ корень полинома $T_n^{(i)}(x) - T_n^{(i)}(0)$:

$$T_n^{(i)}(x_1^{(i)}) - T_n^{(i)}(0) = 0, \quad T_n^{(i)}(x) - T_n^{(i)}(0) \neq 0 \text{ при } x \in (0, \ x_1^{(i)}),$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, 2n+2, \tag{2.3}$$

и предположим, что при каком-нибудь целом неотрицательном k: $k \leqslant 2n+1$, полином $T_n^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(0)$ является отрицательным в интервале $(0, \ x_1^{(k)})$:

$$T_n^{(k)}(x) - T_n^{(k)}(0) < 0 \text{ при } x \in (0, \ x_1^{(k)}). \tag{2.4}$$

Тогда если $\overline{x}_1^{(k+1)}$ — самый левый в $(0, \ x_1^{(k)})$ корень полинома $T_n^{(k+1)}(x)$, то при всех $x \in (0, \ \overline{x}_1^{(k+1)}) \subset (0, \ x_1^{(k)})$, очевидно, будем иметь:

$$T_n^{(k+1)}(x) < 0, \quad x \in (0, \ \overline{x}_1^{(k+1)}). \tag{2.5}$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства (2.2), если $k+1$ нечетно, и нечетность полиномов $T_n(x)$, $T''_n(x)$, ..., $T_n^{(k+1)}(x)$, если $k+1$ четно, следует, что $T_n^{(k+1)}(0)=0$ и, значит,

$$T_n^{(k+1)}(x)-T_n^{(k+1)}(0)=T_n^{(k+1)}(x)<0 \text{ при } x\in(0,\ \overline{x}_1^{(k+1)})=(0,\ x_1^{(k+1)}). \quad (2.4')$$

Повторяя проведенное рассуждение, получим:

$$T_n^{(k+1)}(0)=T_n^{(k+2)}(0)=\ldots=T_n^{(2n+2)}(0)=0,$$

т. е. точка $x=0$ является для полинома $T_n^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(0)$ корнем кратности $\geqslant 2n+3-k$ и, следовательно, число k, при котором может иметь место неравенство (2.4), должно удовлетворять условию

$$k\geqslant 3. \quad (2.5')$$

2) Сохраняя за $x_1^{(i)}$ тот же смысл, что в случае 1), обозначим через k наибольшее в множестве $\{2,\ 3,\ \ldots,\ 2n+1\}$ число $\widetilde{k}$, обладающее тем свойством, что

$$T_n^{(i)}(x)-T_n^{(i)}(0)>0 \text{ для всех } x\in(0,\ x_1^{(i)}) \text{ и } i=1,\ 2,\ \ldots,\ \widetilde{k}-1, \quad (2.6)$$

так что если $k\leqslant 2n+1$, то

$$T_n^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(0)<0 \text{ для всех } x\in(0,\ x_1^{(k)}). \quad (2.6')$$

В силу случая 1) [см. неравенство (2.5′)], число k будет удовлетворять условию

$$3\leqslant k\leqslant 2n+1. \quad (2.7)$$

Далее, обозначим через $y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_j^0$ все различные точки из полуинтервала $[0,\ 2\pi)$, в которых полином $T_n(x)$ обращается в нуль:

$$T_n(y_\nu^0)=0,\quad \nu=1,2,\ldots,j,\quad 0=y_1^0<y_2^0<y_3^0<\ldots<y_j^0<2\pi. \quad (2.8)$$

Так как, по предположению, $T_n(x)$ — нечетный полином, то, очевидно, $j\geqslant 2$.

После первого дифференцировавия мы получим полином $T'_n(x)$, который, в силу теоремы Ролля, будет обращаться в нуль по крайней мере в j различных точках $y_\nu^{(1)}$ из интервала $(0,\ 2\pi)$:

$$0<y_1^{(1)}<y_2^{(1)}<\ldots<y_j^{(1)}<2\pi;\quad T'_n(y_\nu^{(1)})=0,\quad \nu=1,2,\ldots,j. \quad (2.8')$$

Так как в силу (2.3) $T'_n(0)=T'_n(x_1^{(1)})$, то существует по крайней мере одна точка $y_2^{(2)}\in(0,x_1^{(1)})$, в которой $T''_n(y_2^{(2)})=0$, а так как вследствие (2.6) и (2.2) при всех $x\in(0,x_1^{(1)})$ $T'_n(x)>T'_n(0)\geqslant 0$,то $x_1^{(1)}\leqslant y_1^{(1)}$ и, следовательно, $y_2^{(2)}\in(0,\ y_1^{(1)})$. Отсюда, учитывая нечетность полинома $T_n(x)$, заключаем, что полином $T''_n(x)$ обращается в нуль по крайней мере в $j+2$ различных точках $y_\nu^{(2)}$ из полуинтервала $[0,\ 2\pi)$:

$$\begin{gathered}0=y_1^{(2)}<y_2^{(2)}<y_3^{(2)}<\ldots<y_{j+1}^{(2)}<y_{j+2}^{(2)}=2\pi-y_2^{(2)},\\ T''_n(y_\nu^{(2)})=0,\quad \nu=1,2,\ldots,j+2,\end{gathered} \quad (2.8'')$$

т. е. если условия (2.6) выполняются при $k \geqslant 2$, то после двух дифференцирований число различных корней полинома $T_n''(x)$ по сравнению с числом корней полинома $T_n(x)$ увеличивается не меньше, чем на 2. Повторяя проведенное рассуждение, убедимся в том, что после $\bar{k} = 2\left[\frac{k}{2}\right]$ дифференцирований мы получим полином $T_n^{(\bar{k})}(x)$, который в полуинтервале $[0, 2\pi)$ будет иметь $\geqslant j + \bar{k}$ различных корней и, значит, в силу теоремы Ролля, полином $T_n^{(\bar{k}+1)}(x)$ в интервале $(0, 2\pi)$ будет иметь $\geqslant j + \bar{k}$ различных корней, а полином $T_n^{(\bar{k}+2)}(x)$ в интервале $(0, 2\pi)$ будет иметь $\geqslant j + \bar{k} - 1 \geqslant \bar{k} + 1$ различных корней.

Учитывая, наконец, что, в силу случая 1), полином $T_n^{(\bar{k}+2)}(x)$ будет иметь в точке $x = 0$ корень кратности $\geqslant 2n + 3 - \bar{k} - 2 = 2n + 1 - \bar{k}$, заключаем, что полином $T_n^{(\bar{k}+2)}(x)$ на периоде $[0, 2\pi)$ имеет в общей сложности $\geqslant \bar{k} + 1 + 2n + 1 - \bar{k} = 2n + 2$ корня, т. е. мы опять приходим к противоречию. Этим лемма 2.3 для случая А) полностью доказана.

Б) Для четных полиномов справедливость леммы следует (путем дифференцирования) из доказанной в А) справедливости этой леммы для нечетных полиномов.

В) Если $T(x)$ — произвольный тригонометрический полином порядка не выше n, то представим его в виде суммы нечетного и четного полиномов порядка не выше n:

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x),$$

где

$$T_1(x) = \frac{1}{2}[T(x) - T(-x)], \qquad T_2(x) = \frac{1}{2}[T(x) + T(-x)].$$

Тогда из предположения, что $T^{(k)}(0) \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n + 2$, будет следовать:

$$T_1'(0) = T'(0) \geqslant 0,\ T_1'''(0) = T'''(0) \geqslant 0, \ldots, T_1^{(2n+1)}(0) = T^{(2n+1)}(0) \geqslant 0$$

и, аналогично,

$$T_2''(0) \geqslant 0,\ T_2^{(\mathrm{VI})}(0) \geqslant 0, \ldots, T_2^{(2n+2)}(0) \geqslant 0,$$

что противоречит тому обстоятельству, что для нечетных и четных полиномов лемма 2.3 уже установлена.

Этим лемма 2.3. полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Полагая

$$T_n(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx$$

и решая относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ систему из $n + 1$ уравнений

$$T_n'(0) = c_1,\ T_n'''(0) = c_3, \ldots, T_n^{(2n+1)}(0) = c_{2n+1}, \qquad (2.9)$$

где $c_1, c_3, \ldots, c_{2n+1}$ — заданные числа, легко найдем, что для совмест-

ности системы (2.9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n & c_1 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \dots n^3 & -c_3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 \dots n^5 & c_5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{2n+1} & 3^{2n+1} \dots n^{2n+1} & (-1)^n c_{2n+1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} c_{2i-1} M_{2i-1} = 0, \quad (2.10)$$

где M_{2i-1} — миноры элементов $(-1)^{i+1} c_{2i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$.

В силу леммы 2.3, легко усмотреть, что все эти миноры являются положительными:

$$M_{2i-1} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Наоборот, если алгебраическим путем доказать положительность всех M_{2i-1}, то отсюда будет следовать утверждение леммы 2.3*.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть* $T_n(x) \neq 0$ — *произвольный тригонометрический полином порядка не выше* n, $a \in [0, 2\pi]$ *и* $l = [6ne\pi] + 3$. *Тогда если* $\varphi_1(x) \in A_l^1(a)$, *то каждое уравнение вида*

$$\varphi_1(x) - T_n(x) = 0 \quad (2.11')$$

имеет в полуинтервале $[0, 2\pi)$ *не больше чем* $2n+1$ *корень, а если* $\varphi_2(x) \in A_{l+1}^2(a)$, *то каждое уравнение вида*

$$\varphi_2(x) - T_n(x) = 0 \quad (2.11'')$$

имеет в полуинтервале $[0, 2\pi)$ *не больше чем* $2n+2$ *корня.*

Доказательство. Так как уравнение вида (2.11″) после дифференцирования сведется к уравнению вида (2.11′), то доказательство достаточно провести только для уравнений вида (2.11′).

Положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant a, \\ \varphi_1(x), & \text{если} \quad x \in [a, 2\pi), \end{cases}$$

и обозначим в порядке возрастания все корни уравнения (2.11′), содержащиеся в полуинтервале $[0, 2\pi)$, через

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_N, \quad 0 \leqslant \xi_1, \quad \xi_N < 2\pi. \quad (2.12)$$

Будем доказывать от противного, предполагая, что $N \geqslant 2n+2$.

Если бы оказалось, что $\varphi_1(\xi_1) \geqslant 0$, то тогда во всех точках ξ_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ полином $T_n(x)$, очевидно, интерполировал бы также

---

* Примечание при корректуре. После сдачи работы в печать нам удалось алгебраическим путем обобщить лемму 2.3 на почти периодические полиномы $T(x)$ вида

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos \lambda_k x + \beta_k \sin \mu_k x),$$

где α_k, β_k, λ_k и μ_k — любые действительные числа.

функцию $\Phi(x) \in A_l^1(0)$ и мы пришли бы к противоречию с леммой 2.1. Поэтому мы будем считать, что $\varphi_1(\xi_1) < 0$ и, из подобных же соображений, что $\varphi_1(\xi_N) > 0$. В таком случае

$$T_n(\xi_N - 2\pi) = \varphi_1(\xi_N) > 0$$

и

$$T_n(\xi_1) = \varphi_1(\xi_1) < 0;$$

следовательно, $T_n(x) \neq \text{const}$ и найдется по крайней мере одна точка $r_1 \in (\xi_N - 2\pi, \xi_1)$, в которой $T_n(r_1) = 0$.

Аналогично, если бы оказалось, что $\varphi_1(\xi_2) \geqslant 0$ (т. е. $\xi_2 \geqslant a$ или же $\xi_2 < a$, но $\varphi_1(\xi_2) = 0$), то полином $T_n(x)$ интерполировал бы функцию $\Phi(x)$ в точках $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_N$ и в точке $r_1 \in (\xi_N - 2\pi, \xi_1) \subset (\xi_N - 2\pi, a)$, т. е. опять в $N \geqslant 2n+2$ точках, и мы снова пришли бы к противоречию с леммой 2.1. Поэтому, пользуясь аналогичными соображениями в отношении точек ξ_{N-1} и ξ_N, мы можем считать, что

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 < a, \quad \varphi_1(\xi_2) \neq 0 \text{ и } a < \xi_{N-1} \leqslant \xi_N, \quad \varphi_1(\xi_{N-1}) \neq 0.$$

Отсюда, принимая во внимание, что в точке $r_1 \in (\xi_N - 2\pi, \xi_1)$ $T_n(r_1) = 0$, в силу леммы 2.2, найдем, что полином $T_n'(x)$ будет интерполировать функцию $\varphi_1'(x)$ в некоторой системе точек

$$\xi_1' \leqslant \xi_2' \leqslant \ldots \leqslant \xi_{N-1}', \quad (\xi_1', \xi_{N-1}') \subset (\xi_1, \xi_N),$$

и обращаться в нуль по крайней мере в двух точках

$$r_1' \leqslant r_2', \quad (r_1', r_2') \subset (\xi_{N-1}' - 2\pi, \xi_1').$$

Если снова окажется, что

$$\xi_1' \leqslant \xi_2' < a, \quad \varphi_1'(\xi_2') \neq 0 \text{ и } a < \xi_{N-2}' \leqslant \xi_{N-1}', \quad \varphi_1'(\xi_{N-2}) \neq 0,$$

то мы опять применим лемму 2.2 и будем проводить аналогичные рассуждения до тех пор, пока после некоторого числа λ дифференцирований, $\lambda \leqslant N-3$ *, не получим полинома $T_n^{(\lambda)}(x)$, интерполирующего функцию $\varphi_1^{(\lambda)}(x)$ в некоторой системе точек

$$\xi_1^{(\lambda)} \leqslant \xi_2^{(\lambda)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{N-\lambda}^{(\lambda)}$$

(из которых, например, только $\xi_1^{(\lambda)}$ будет $< a$ или же несколько первых точек будут $< a$, но $\varphi_1^{(\lambda)}(\xi_2^{(\lambda)}) = 0$) и обращающегося в нуль в системе точек

$$r_1^{(\lambda)} \leqslant r_2^{(\lambda)} \leqslant \ldots \leqslant r_{\lambda+1}^{(\lambda)},$$

где $r_1^{(\lambda)} > \xi_{N-1}^{(\lambda)} - 2\pi$ и $r_{\lambda+1}^{(\lambda)} < \xi_1^{(\lambda)}$.

Отсюда следует, что полином $T_n^{(\lambda)}(x)$ будет интерполировать функцию $\Phi^{(\lambda)}(x)$ по крайней мере в $2n+2$ точках

$$r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \ldots, r_{\lambda+1}^{(\lambda)}, \xi_2^{(\lambda)}, \xi_3^{(\lambda)}, \ldots, \xi_{N-\lambda}^{(\lambda)}. \tag{2.13}$$

---

* Если бы мы дошли до $\lambda = N-2$, то тогда, очевидно, число корней полинома $T_n^{(\lambda)}(x)$ на периоде было бы $\geqslant 2N+1$, и мы сразу пришли бы к противоречию.

Повторяя рассуждения, которыми мы пользовались в пунктах а), б), в) доказательства леммы 2.1, найдем, что корень ξ_N уравнения $\Phi(x)-T_n(x)-0$ после $l-1=[6ne\pi]+2$ дифференцирований сместится влево за начало. А отсюда, в силу теоремы 2.1, следует, что после $(l-\lambda-1)$-кратного дифференцирования разности $\Phi^{(\lambda)}(x)-T_n^{(\lambda)}(x)$ все корни (2.13) этой разности (которая при $x\leqslant 0$ сводится к $-T_n^{(\lambda)}(x)$) сместятся влево за начало и, значит, полином $T_n^{(l-1)}(x)$ будет иметь на периоде $\leqslant 2n+2$ корня, что невозможно, ибо $T_n(x)\not\equiv \mathrm{const}$ и $T_n(x)$ имеет порядок $\leqslant n$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть в интервале* $(-\pi, \pi)$ *заданы функции* $\check{\varphi}(x)$ *и* $\check{\check{\varphi}}(x)$ *со следующими свойствами*:

1) *функции* $\check{\varphi}(x)$ *и* $\check{\check{\varphi}}(x)$ *существуют и непрерывны вместе с производными соответственно до* $2n$*-го и до* $2n+1$*-го порядков включительно*;

2) *при* $x\in(0,\pi)$ *все производные от функций* $\check{\varphi}(x)$ *и* $\check{\check{\varphi}}(x)$ *до* $2n$*-го и соответственно* $2n+1$*-го порядков включительно являются неотрицательными*;

3) $\check{\varphi}(x)$ — *нечетная, а* $\check{\check{\varphi}}(x)$ — *четная функции.*

Тогда если $\check{T}_n(x)$ — *произвольный нечетный, а* $\check{\check{T}}_n(x)$ — *произвольный четный тригонометрические полиномы порядков не выше* n *и не равные тождественно* const, *то в промежутке* $(-\pi, \pi)$ *всякое уравнение вида*

$$\check{\varphi}(x)-\check{T}_n(x)=0 \tag{2.14'}$$

имеет не больше чем $2n+1$ *корней, а всякое уравнение вида*

$$\check{\check{\varphi}}(x)-\check{\check{T}}_n(x)=0 \tag{2.14''}$$

имеет не больше чем $2n+2$ *корня.*

Доказательство. Так как уравнение (2.14″) после дифференцирования сведется к уравнению вида (2.14′), то доказательство достаточно провести только для уравнения (2.14′). Будем доказывать от противного, предполагая, что уравнение (2.14′) имеет $\geqslant 2n+2$ корня $\xi_i\in(-\pi,\pi)$, $i=1, 2, \ldots, 2n+2$.

Если мы, сверх того, предположим, что

$$\xi_1=\xi_2=\xi_3=\ldots=\xi_{2n+2}=0,$$

то отсюда сразу будет следовать, что разность $\check{\varphi}(x)-\check{T}_n(x)$ (а значит, и функция $\check{\varphi}(x)$) в точке $x=0$ имеет производные до $2n+1$-го порядков включительно и что все эти производные равны нулю. Отсюда, в силу условий, которым удовлетворяет функция $\check{\varphi}(x)$, мы получим:

$$\check{T}_n'(0)=\check{\varphi}'(0)\geqslant 0,\quad \check{T}_n''(0)=\check{\varphi}''(0)=0,\quad \check{T}_n'''(0)=\check{\varphi}'''(0)\geqslant 0, \ldots$$
$$\ldots, \check{T}_n^{(2n)}(0)=\check{\varphi}^{(2n)}(0)=0,$$

$$\check{T}_n^{(2n+1)}(0)=\check{\varphi}^{(2n+1)}(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\check{\varphi}^{(2n)}(\Delta x)-\check{\varphi}^{(2n)}(0)}{\Delta x}\geqslant 0,\quad \check{T}_n^{(2n+2)}(0)=0$$

и, таким образом, придем к противоречию с леммой 2.3.

Поэтому будем считать, что среди корней ξ_i уравнения (2.14′) имеются корни, отличные от нуля. В таком случае полином $\check{T}_n(x)$ будет, очевидно, интерполировать функцию $\check{\varphi}(x)$ по крайней мере в $2n+3$ точках

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n+1} \leqslant \xi_{n+2} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2n+3},$$

где $\xi_{n+2}=0$ и $\xi_{n+2-j}=-\xi_{n+2+j}$ $(j=1, \quad 2, \ldots, n+1)$, и, кроме того, точка $r_1=\pi \in (\xi_{2n+3}, \ \xi_1+2\pi)$ будет служить корнем полинома $\check{T}_n(x)$.

Докажем по индукции, что после ν дифференцирований $(\nu \leqslant 2n-1)$ полином $\check{T}_n^{(\nu)}(x)$ будет интерполировать функцию $\check{\varphi}^{(\nu)}(x)$ по крайней мере в $2n+3-\nu$ точках $\xi_i^{(\nu)}$ из интервала $(-\pi, \pi)$:

$$\begin{gathered}\xi_1^{(\nu)} \leqslant \xi_2^{(\nu)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \\ \xi_j^{(\nu)} = -\xi_{2n+4-\nu-j}^{(\nu)}, \quad j=1, 2, \ldots, \left[\frac{2n+4-\nu}{2}\right],\end{gathered} \tag{ξ}$$

и что в интервале $(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \ 2\pi-\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) = (\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \ 2\pi+\xi_1^{(\nu)})$ существует по крайней мере $\nu+1$ корней $r_i^{(\nu)}$ полинома $\check{T}_n^{(\nu)}(x)$:

$$\begin{gathered}r_1^{(\nu)} \leqslant r_2^{(\nu)} \leqslant \ldots \leqslant r_{\nu+1}^{(\nu)}, \quad \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)} < r_1^{(\nu)}, \quad r_{\nu+1}^{(\nu)} < 2\pi+\xi_1^{(\nu)}, \\ r_{\nu+1-j}^{(\nu)} = 2\pi - r_{j+1}^{(\nu)}, \quad j=0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{\nu}{2}\right].\end{gathered} \tag{r}$$

Действительно, предположим, что данное утверждение верно при некотором натуральном $\nu \leqslant 2n-2$; не ограничивая общности, будем считать, что в интервале $(-r_1^{(\nu)}, \ r_1^{(\nu)})$ все точки интерполяции функции $\check{\varphi}^{(\nu)}(x)$ полиномом $\check{T}_n^{(\nu)}(x)$ содержатся в системе (ξ) и что все корни полинома $\check{T}_n^{(\nu)}(x)$ из интервала $(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \ 2\pi-\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)})$ содержатся в системе (r). Тогда

1. сли $\check{T}_n^{(\nu)}(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) = \check{\varphi}^{(\nu)}(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) = 0$, то, в силу четности на $(-\pi, \pi)$ функции $|\check{\varphi}^{(\nu)}(x)|$ и ее монотонного возрастания (в слабом смысле) на $[0, \ \pi)$, при всех

$$x \in [-\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \ \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}] = [\xi_1^{(\nu)}, \ \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}]$$

будем иметь:

$$\check{\varphi}^{(\nu)}(x) = 0;$$

значит, для полинома $T_n^{(\nu)}(x)$ все точки $\xi_i^{(\nu)}$ $(i=1, 2, \ldots, 2n+3-\nu)$ являются корнями. Таким образом, в этом случае полином $T_n^{(\nu)}(x)$ на периоде $[\xi_1^{(\nu)}, \ 2\pi+\xi_1^{(\nu)})$ имеет $\geqslant (2n+3-\nu)+\nu+1 = 2n+4$ корня, и мы приходим к противоречию.

2. Если $\check{T}_n^{(\nu)}(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) = \check{\varphi}^{(\nu)}(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) > 0$, то, принимая во внимание, что в точке $\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}$, очевидно,

$$\check{T}_n^{(\nu+1)}(\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}) = \check{\varphi}^{(\nu+1)}(\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}) \geqslant 0$$

и что в то же время в интервале $(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, r_1^{(\nu)})$ найдутся точки строгого убывания полинома $\check{T}_n^{(\nu)}(x)$ (ибо $\check{T}_n^{(\nu)}(\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}) > \check{T}_n^{(\nu)}(r_1^{(\nu)}) = 0$), заключаем отсюда, что найдется по крайней мере одна точка $r_1^{(\nu+1)} \in [\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}, r_1^{(\nu)})$, в которой $\check{T}_n^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)}) = 0$ *. Будем считать, что точка $r_1^{(\nu+1)}$ есть ближайший к $r_1^{(\nu)}$ слева корень полинома $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x)$ (так что, очевидно, при всех $x \in (r_1^{(\nu+1)}, r_1^{(\nu)})$ $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x) < 0$). Тогда если окажется, что $\check{\varphi}^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)}) = 0$, то, в силу четности на $(-\pi, \pi)$ и монотонного возрастания на $[0, \pi)$ функции $|\check{\varphi}^{(\nu+1)}(x)|$ (ибо $\nu + 1 < 2n$), полином $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x)$ будет иметь $\geqslant 2n + 2 - \nu$ корней в точках $\xi_j^{(\nu+1)}$:

$$-r_1^{(\nu+1)} \leqslant \xi_1^{(\nu+1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)} \leqslant r_1^{(\nu+1)}, \qquad \xi_j^{(\nu+1)} \in [\xi_j^{(\nu)}, \xi_{j+1}^{(\nu)}],$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, 2n + 2 - \nu,$$

из промежутка $(-r_1^{(\nu)}, r_1^{(\nu)}) \supset [\xi_1^{(\nu)}, \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}]$ и ν корней $r_2^{(\nu+1)}, \ldots, r_{\nu+1}^{(\nu+1)}$ из промежутка $[r_1^{(\nu)}, 2\pi - r_1^{(\nu)}]$, т. е. полином $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x)$ на периоде $[-r_1^{(\nu+1)}, 2\pi - r_1^{(\nu+1)}]$ будет иметь $\geqslant 2n + 2$ корня, и мы снова приходим к противоречию.

Если же $\check{\varphi}^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)}) > 0 = \check{T}_n^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)})$, то полином $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x)$ будет в промежутке $[-\xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}, \xi_{2n+3-\nu}^{(\nu)}]$ интерполировать функцию $\check{\varphi}^{(\nu+1)}(x)$ по крайней мере в $2n + 2 - \nu$ точках

$$\xi_1^{(\nu+1)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)},$$

которые все будут содержаться в интервале $(-r_1^{(\nu+1)}, r_1^{(\nu+1)})$, ибо $r_1^{(\nu+1)} \geqslant \xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}$ и, в то же время,

$$\check{T}_n^{(\nu+1)}(\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}) = \check{\varphi}^{(\nu+1)}(\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}), \quad \check{T}_n^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)}) \neq \check{\varphi}^{(\nu+1)}(r_1^{(\nu+1)}).$$

Кроме того, полином $\check{T}_n^{(\nu+1)}(x)$ будет иметь в интервале

$$(\xi_{2n+2-\nu}^{(\nu+1)}, \ 2\pi + \xi_1^{(\nu+1)}) \supset [r_1^{(\nu+1)}, \ 2\pi - r_1^{(\nu+1)}] = [r_1^{(\nu+1)}, r_{\nu+2}^{(\nu+1)}]$$

по крайней мере $\nu + 2$ корня

$$r_1^{(\nu+1)} \leqslant r_2^{(\nu+1)} \leqslant \ldots \leqslant r_{\nu+2}^{(\nu+1)}, \quad r_{\nu+3-j}^{(\nu+1)} = 2\pi - r_j^{(\nu+1)},$$
$$j = 1, 2, \ldots, \left[\frac{\nu+1}{2}\right].$$

Этим индукция доказана.

Полагая $\nu = 2n - 1$ и повторяя рассуждения, которые мы провели для случая 1 и для начала случая 2 (до сноски), легко найдем, что полином $\check{T}_n^{(2n)}(x)$ имеет на периоде $\geqslant 2n + 1$ корней, что невозможно. Теорема 2.3 полностью доказана.

П р и м е р ы. Кроме функций $y = x^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, важным для дальнейшего примером функции, удовлетворяющей условиям теоремы 2.3, является функция

$$y = \psi_1(x) = -\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).$$

---

* Отметим, что рассуждения, которые мы проводили до сих пор, начиная со случая 1, верны также при $\nu = 2n - 1$.

Действительно, для этой функции имеем:

$$y' = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ y'' = \frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}} = e^{2y},\ y''' = 2y' e^{2y},\ y^{IV} = 2e^{4y} + 4e^{2y}\cdot(y')^2, \ldots .$$

Замечание. Доказывая от противного, легко обнаружить, что если уравнение (2.14′) или (2.14″) имеет $2n+1$ или соответственно $2n+2$ корня, содержащихся в интервале $(-\pi, \pi)$, и X_0 — самый правый из этих корней, то при всех $x \in (X_0, \pi)$ будем иметь: $\check{\varphi}(x) > \check{T}_n(x)$ и, соответственно, $\check{\check{\varphi}}(x) > \check{\check{T}}_n(x)$.

§ 3. Об одной тригонометрической интерполяционной формуле для случая равноотстоящих узлов

Пусть сегмент $[0, 2\pi]$ разделен на $2n+2$ равные части точками

$$x_1 = \frac{\pi}{n+1},\quad x_2 = \frac{2\pi}{n+1}, \ldots, x_k = \frac{k\pi}{n+1}, \ldots, x_{2n+1} = \frac{2n+1}{n+1}\pi, \quad (3.1)$$

и пусть требуется построить полином порядка $\leqslant n$, принимающий в этих точках соответственно значения, равные y_k $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$. Хорошо известно, что поставленная задача решается полиномом $T_n(x)$ вида

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} y_k t_k(x), \quad (3.2)$$

где

$$t_k(x) = \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{k-1}}{2}\,\sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n+1}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_1}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\,\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{2n+1}}{2}}. \quad (3.3)$$

Покажем, что для узлов вида (3.1) элементарные полиномы $t_k(x)$, а с ними и полином $T_n(x)$, можно преобразовать к более удобному виду.

Положим

$$t(x) = \prod_{k=1}^{2n+1} \sin\frac{x-x_k}{2}. \quad (3.4)$$

Тогда, принимая во внимание, что в силу (3.1)

$$\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_1}{2} = \sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}\ldots\sin\frac{x_{k-1}}{2},$$

$$\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k+2}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{2n+1}}{2} =$$

$$= \sin\frac{x_k-(2\pi-x_{2n+1-k})}{2}\sin\frac{x_k-(2\pi-x_{2n-k})}{2}\ldots\sin\frac{x_k-(2\pi-x_1)}{2} =$$

$$= (-1)^{2n+1-k}\sin\frac{x_k+x_1}{2}\ldots\sin\frac{x_k+x_{2n-k}}{2}\sin\frac{x_k+x_{2n+1-k}}{2} =$$

$$= (-1)^{k-1}\sin\frac{x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_{2n+1}}{2},$$

получим:

$$\sin\frac{x_k-x_1}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{2n+1}}{2}=$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{\sin\frac{x_k}{2}}\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x_2}{2}\ldots\sin\frac{x_{2n+1}}{2}=\frac{(-1)^k t(0)}{\sin\frac{x_k}{2}}.$$

Подставляя это значение в (3.3), найдем:

$$t_k(x)=(-1)^k\frac{t(x)}{t(0)}\cdot\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}} \tag{3.3'}$$

и

$$T_n(x)=\frac{t(x)}{t(0)}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k y_k\cdot\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}. \tag{3.2'}$$

Так как, очевидно,

$$\frac{t(x)}{t(0)}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\equiv 1,$$

то в том случае, когда в полуинтервале $[0, 2\pi)$ задана некоторая функция $f(x)$, мы для разности $R_n(x)$ между этой функцией и полиномом $T_n(x)=T_n(f;\ x)$, интерполирующим ее в точках x_k, получим следующую формулу:

$$R_n(x)=f(x)-T_n(f;x)=\frac{t(x)}{t(0)}\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k[f(x)-f(x_k)]\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}. \tag{3.5}$$

Замечание 1. Формулу (3.3′) можно было бы получить также при помощи следующих рассуждений. Так как полином

$$\tau_k(x)=\frac{t(x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}$$

обращается в нуль в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{2n+1}$, то его корни, расположенные на сегменте $\left[\frac{x_k}{2}-\pi,\ \frac{x_k}{2}+\pi\right]$, являются симметричными относительно точки $\frac{x_k}{2}$. Кроме того, этот полином относительно точки $\frac{x_k}{2}$ является нечетным, если k — четное (и, следовательно, $\frac{1}{2}x_k=x_{\frac{k}{2}}$), и четным, если k — нечетное. Поэтому

$$\tau_k(0)=(-1)^{k-1}\tau_k(x_k).$$

Далее, в силу того, что

$$t_k(x) = c\,\frac{t(x)}{\sin\frac{x-x_k}{2}} = c\cdot\tau_k(x), \tag{3.6}$$

где c выбрано так, что

$$t_k(x_k) = 1 = c\tau_k(x_k),$$

имеем

$$c = \frac{1}{\tau_k(x_k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{\tau_k(0)} = \frac{(-1)^k}{t(0)}\sin\frac{x_k}{2}.$$

Подставляя найденное для c значение в (3.6), получим формулу (3.3′).

Замечание 2. Отметим, что при каждом фиксированном x последовательность множителей

$$\left|\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1, \tag{3.7}$$

в формуле (3.5) как слева, так и справа от точки x, монотонно убывает при удалении точки x_k от точки x, ибо при всех $x \in (0, 2\pi)$, $x \neq x_k$, $x \neq x_{k+1}$,

$$\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}} - \frac{\sin\frac{x_{k+1}}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x_k-x}{2}\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}}\left[\sin\frac{x_k}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x_{k+1}}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x_{k+1}}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sin\frac{x_{k+1}}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x_k}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x_k}{2}\right)\right]$$

или

$$\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}} - \frac{\sin\frac{x_{k+1}}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}} = \frac{\sin\frac{x_1}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}\cdot\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}}. \tag{3.8}$$

Из этого равенства, в частности, вытекает следующая нужная нам в дальнейшем формула:

$$\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}} : \frac{\sin\frac{x_{k+1}}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}} = 1 + \frac{\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}}{2}\cdot\sin\frac{x_k-x}{2}}. \tag{3.9}$$

§ 4. Интерполирование в промежутке $[0, 2\pi)$ функций вида $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $(a_k \geqslant 0)$ в равноотстоящих узлах

Прежде чем приступить к формулировке и доказательству основной в этом параграфе теоремы 4.1, условимся в некоторых определениях и докажем ряд лемм.

ЛЕММА 4.1. *Пусть тригонометрический полином* $T(x)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $T(x)$ *пересекает кривую* $y = x^2$ *в* k *точках* $(k \geqslant 3)$

$$x_1 < x_2 < x_3 \leqslant x_4 \leqslant \ldots \leqslant x_k, \quad x_k < x_1 + 2\pi, \tag{4.1}$$

причем $x_{k-1} > 0$;

2) $T(x)$ *пересекает в интервале* (x_2, x_3) *кривую* $y = -x^2$;

3) *в полуинтервале* $(x_k - 2\pi, x_1]$ *полином* $T(x)$ *имеет* l *корней* $(l \geqslant 0)$:

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_l, \quad x_k - 2\pi < r_1, \quad r_l \leqslant x_1\ ^*. \tag{4.2}$$

Тогда полином $T(x)$ *является полиномом порядка не ниже* $\left[\frac{1}{2}(k + l - 1)\right]$ *(через* $[\ldots]$ *обозначена целая часть).*

Доказательство. Так как в случае $l = 0$ лемма 4.1 является тривиальной (в этом случае разность $(T(x) - x^2)'' = T''(x) - 2$, в силу теоремы Ролля, имеет на периоде $\geqslant k - 2$ корней и, следовательно, полином $T''(x)$, а значит, и полином $T(x)$ имеет порядок не ниже $\left[\frac{1}{2}(k-1)\right] = \left[\frac{1}{2}(k + 0 - 1)\right]$), то мы будем считать, что $l > 0$. Кроме того, будем считать (очевидно, не ограничивая общности), что в системе (4.1) содержатся все корни уравнения $T(x) - x^2 = 0$ из промежутка $[r_l, r_1 + 2\pi)$, а в системе (4.2) — все корни полинома $T(x)$ из промежутка $(x_k - 2\pi, x_1]$. В таком случае из условия 2) следует, что в точке x_2 полином $T(x)$ пересекает кривую $y = x^2$ сверху вниз, а в точке x_1 — снизу вверх, так что

$$T'(x_1) > 2x_1, \quad T'(x_2) < 2x_2 \tag{4.3}$$

и, далее,

$$T'(x_3) \geqslant 2x_3, \quad T'(x_4) \leqslant 2x_4, \ \ldots, \ T'(x_k) \leqslant 2x_k.$$

Принимая во внимание, что

$$T(x_k - 2\pi) = T(x_k) = x_k^2 > 0, \quad T(x_1) = x_1^2 \geqslant 0,$$

легко убедиться, что число l корней полинома $T(x)$, содержащихся в полуинтервале $(x_k - 2\pi, x_1]$, является четным (ибо если $x_1 \neq 0$, то на концах промежутка $[x_k - 2\pi, x_1]$ $T(x_k - 2\pi) > 0$ и $T(x_1) > 0$, а если $x_1 = 0$, то $T(x_k - 2\pi) > 0$, $T(x_1) = 0$ и $T'(x_1) > 0$). Аналогично является четным и число k точек пересечения кривой $y = x^2$ полиномом $T(x)$ в полуинтервале $[r_l, r_1 + 2\pi)$. Действительно, так как

$$T(r_l) = T(r_1 + 2\pi) = 0,$$

* Знак равенства, очевидно, возможен тогда и только тогда, когда $r_l = x_1 = 0$.

то $T(r_l) \leqslant r_l^2$ и $T(r_1+2\pi) < (r_1+2\pi)^2$. Отсюда видно, что если $r_l \neq 0$, то на концах промежутка $[r_l, r_1+2\pi]$ $T(r_l) < r_l^2$ и $T(r_1+2\pi) < < (r_1+2\pi)^2$, а если $r_l = x_1 = 0$, то $T(r_l) = 0$, $T'(r_l) = T'(x_1) > 0$ и $T(r_1+2\pi) < (r_1+2\pi)^2$. Поэтому во всех случаях число $k+l$ также является четным.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $x_2 \leqslant 0$. В этом случае полином $T(x)$ будет в интервале (r_l, x_2) сначала возрастать, а затем, достигнув наибольшего на $[r_l, x_2]$ значения в некоторой точке $\xi \in (r_l, x_2)$, начнет убывать. Вследствие этого, $T'(\xi)=0$ и, в то же время, в интервале (ξ, x_2) найдется точка x_1', в которой $T'(x_1') = 2x_1'$ (ибо $T'(\xi) > 2\xi$ и $T'(x_2) < 2x_2$). Аналогично, в силу того, что

$$x_{k-1} - 2\pi \leqslant x_k - 2\pi < r_1,$$

в интервале $(x_{k-1} - 2\pi, r_1)$ найдется точка η, в которой $T'(\eta) = 0$. Поэтому полином $T'(x)$ имеет в полуинтервале $(x_{k-1} - 2\pi, \xi]$ по крайней мере $l+1$ корней $r_1', r_2', \ldots, r_{l+1}'$: корень $r_1' = \eta$ — в интервале $(x_{k-1} - 2\pi, r_1)$, $l-1$ корней $r_2', \ldots, r_l'$ — в полуинтервале $(r_1, r_l]$ и корень $r_{l+1}' = \xi > r_l$. Кроме того, полином $T'(x)$ имеет с функцией $y = 2x$ по крайней мере $k-1$ общих значений в точках $x_1', x_2', \ldots, x_{k-1}'$, которые содержатся в интервале $(r_{l+1}', r_1' + 2\pi)$, ибо $x_1' > \xi = r_{l+1}'$ и, в то же время, $x_{k-1}' \in [x_{k-1}, r_1' + 2\pi)$, т. е. $x_{k-1}' < r_1' + 2\pi$ (ибо $T'(x_{k-1}) \geqslant 2x_{k-1}$ и $T'(r_1' + 2\pi) = T'(r_1') = 0 < 2(r_1' + 2\pi)$).

Таким же путем можно убедиться, что полином $T''(x)$ имеет по крайней мере $l+1$ * корней $r_1'', r_2'', \ldots, r_{l+1}''$, содержащихся в интервале $(x_{k-2}' - 2\pi, r_{l+1}')$: корень r_1'' — в интервале $(x'_{k-2} - 2\pi, r_1')$, корни $r_2'', \ldots, r_{l+1}''$ — в интервале (r_1', r_{l+1}') и, кроме того, по крайней мере $k-2$ точки пересечения с прямой $y=2$, абсциссы которых содержатся в интервале $(r_{l+1}'', r_1'' + 2\pi)$.

Отсюда, в силу теоремы Ролля, следует, что $T'''(x)$ имеет по крайней мере l корней, содержащихся в интервале (r_1'', r_{l+1}''), и $k-3$ корня, содержащихся в интервале $(r_{l+1}'', r_1'' + 2\pi)$. Поэтому, в силу четности числа $k+l$, полином $T'''(x)$ имеет на периоде по крайней мере $k+l-2$ корня и, значит, полином $T(x)$ является полиномом порядка не ниже $\frac{1}{2}(k+l-2) = \left[\frac{1}{2}(k+l-1)\right]$.

2. Пусть $x_2 > 0$. В этом случае полином $T(x)$, пересекая, согласно условию, в интервале (x_2, x_3) кривую $y = -x^2$, будет в некоторой точке $\xi \in (x_2, x_3)$ достигать своего наименьшего на $[x_2, x_3]$ значения. Поэтому $T'(\xi) = 0 < 2\xi$. Так как, в то же время, в интервале (ξ, x_3) существуют точки $\bar{x}$, в которых $T'(\bar{x}) > 2\bar{x}$ (ибо $T(x_3) - T(\xi) > x_3^2 \geqslant x_3^2 - \xi^2$), то в интервале (ξ, x_3) найдется по крайней мере одна точка x_1', в которой $T'(x_1') = 2x_1'$. Отсюда следует, что полином $T'(x)$ имеет в полуинтервале $(x_{k-1} - 2\pi, \xi]$ по крайней мере $l+2$ корня $r_1', r_2', \ldots, r_{l+2}'$: корень r_1' — в интервале $(x_{k-1} - 2\pi, r_1)$, $l-1$ корней $r_2', \ldots, r_l'$ — в интервале (r_1, r_l), корень r_{l+1}' — точка, в которой $T(x)$ достигает своего наибольшего в интервале (r_l, ξ) значения, и корень $r_{l+2}' = \xi$. Кроме того, поли-

* Точнее, $l+2$.

ом $T'(x)$ имеет с функцией $y=2x$ по крайней мере $k-2$ общих начения в точках $x_1', \ldots, x_{k-2}'$, содержащихся в интервале $(r_{l+2}', r_1'+2\pi)$; ри этом точка $x_1' \in (\xi, x_3)$, а остальные точки $x_2', \ldots, x_{k-2}'$ содержатся промежутке $[x_3, r_1'+2\pi)$.

Далее доказательство заканчивается точно так же, как и в случае 1: $''(x)$ имеет $\geqslant l+2$ корня и $\geqslant k-3$ точки пересечения с прямой $=2$, $T'''(x)$ имеет $\geqslant l+1+(k-4)=l+k-3$ корня и т. д. Лемма 4.1 олностью доказана.

Замечание. Из приведенного в начале доказательства леммы ассуждения видно, что в случае, когда $l=0$, для справедливости тверждения, содержащегося в лемме 4.1, достаточно только, чтобы олином $T(x)$ пересекал кривую $y=x^2$ в k точках $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \ldots \leqslant x_k$.

В дальнейшем важную роль будет играть следующая двузначная ункция:

$$\Phi_l(x) = \pm |x|^l = \pm x^l, \quad l \text{ — натуральное число, } x \in (-\infty, \infty). \tag{4.4}$$

Назовем кривую $y=|x|^l$ верхней ветвью, а кривую $y=-|x|^l$ — нижней ветвью функции $\Phi_l(x)$. Кроме того, назовем кривую $y=|x|^l\operatorname{sign} x$ озрастающей, а кривую $y=-|x|^l\operatorname{sign} x$ — убывающей ветвью функии $\Phi_l(x)$ и будем считать, что

$$\Phi_l^{(j)}(x) = \pm (x^l)^{(j)}, \quad j=1, 2, \ldots, l-1.$$

Определение. Будем говорить, что полином $T(x)$ имеет в проежутке $[\xi, \eta]$ уклон вверх (вниз) по отношению к функции $C\Phi_l(x)$ $C=\text{const}>0$, $l \geqslant 2)$, если существуют по крайней мере две точки $\in [\xi, \eta]$ и $\beta \in [\xi, \eta]$, $\alpha \leqslant \beta$, в которых выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &T(\alpha) < -|C\Phi_l(\alpha)| \quad (\text{соответственно } T(\alpha) > |C\Phi_l(\alpha)|), \\ &T'(\beta) > |C\Phi_l'(\beta)| \quad (\text{соответственно } T'(\beta) < -|C\Phi_l'(\beta)|). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Два уклона будем считать различными, если они или сами имеют ротивоположные направления (т. е. один из них направлен вверх, другой — вниз), или если между ними содержится уклон противоложного к ним направления.

Чтобы указать, где данный уклон расположен, мы будем еще говоть, что уклон определяется точками α и β, или что уклон расположен окрестности точки $\bar{x}$, если $\bar{x}$ — точка из промежутка $[\alpha, \eta]$.

В качестве такой точки мы всякий раз, когда это будет возможно, дем брать точку, в которой $T(\bar{x}) = C\bar{x}^l$.

Будем говорить, что на промежутке $[\xi, \eta]$ полином $T(x)$ имеет N клонов, если на $[\xi, \eta]$ существует N уклонов, которые являются очередно уклонами вверх и вниз (или вниз и вверх) и при этом чки $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_N, \beta_N$, которыми соответственно определяются и уклоны, могут быть взяты таким образом, что будут выполняться равенства:

$$\xi \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_N \leqslant \beta_N \leqslant \eta. \tag{*}$$

Кроме того, будем говорить, что на промежутке $[\xi, \eta]$ полином $T(x)$ имеет N уклонов, расположенных в окрестностях точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$, если промежуток $[\xi, \eta]$ можно разбить на N частей точками

$$\xi = \xi_1 \leqslant \eta_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \leqslant \xi_N \leqslant \eta_N = \eta$$

так, чтобы полином $T(x)$ в промежутках $[\xi_1, \eta_1]$, $[\xi_2, \eta_2]$, ..., $[\xi_N, \eta_N]$ имел N уклонов с последовательно противоположными направлениями и чтобы при этом

1) каждый из промежутков $[\xi_i, \eta_i]$ содержал в себе точки x_i, α_i и β_i, где α_i и β_i — точки, определяющие соответствующий уклон $(i = 1, 2, \ldots, N)$,

2) при каждом $i = 1, 2, \ldots, N$ $\alpha_i \leqslant \beta_i$ и $\alpha_i \leqslant x_i$.

ЛЕММА 4.2. *Для того чтобы в промежутке* $[\xi, \eta]$ *полином* $T(x)$ *имел относительно функции* $C\Phi_l(x)$, $C > 0$, $l \geqslant 2$, *уклон вверх (вниз), достаточно, чтобы в этом промежутке нашлись по крайней мере две точки* ξ_1 *и* η_1, $\xi_1 < \eta_1$, *в которых имеют место соотношения:*

$$T(\xi_1) < -|C\Phi_l(\xi_1)|, \quad T(\eta_1) > |C\Phi_l(\eta_1)| \tag{4.6}$$

(*соответственно* $T(\xi_1) > |C\Phi_l(\xi_1)|$, $T(\eta_1) < -|C\Phi_l(\eta_1)|$).

Доказательство. Из соотношений (4.6) вытекает, что на отрезке $[\xi_1, \eta_1]$ полином $T(x)$ получает приращение, которое больше, чем приращение возрастающей ветви функции $C\Phi_l(x)$ на этом отрезке. Поэтому найдется по крайней мере одна точка $\beta \in [\xi_1, \eta_1] \subset [\xi, \eta]$, в которой $T'(\beta) > |C\Phi_l'(\beta)|$. Это неравенство вместе с первым из неравенств (4.6) и доказывают лемму для случая уклона вверх. Случай уклона вниз доказывается аналогично.

Замечание. Так как при наличии точек ξ_1 и η_1, в которых имеют место неравенства (4.6), очевидно, всегда найдется по крайней мере одна точка $\bar{x} \subset (\xi_1, \eta_1)$, в которой $T(\bar{x}) = C\bar{x}^l$ (ибо $T(\xi_1) < -|C\Phi_l(\xi_1)| \leqslant \leqslant C\xi_1^l$ и $T(\eta_1) > C|\Phi_l(\eta_1)| \geqslant C\eta_1^l$), то мы имеем право утверждать, что уклон, о котором идет речь в лемме 4.2, расположен в окрестности той точки $\bar{x}$ (или одной какой-нибудь из таких точек) из промежутка (ξ_1, η_1), в которой полином $T(x)$ интерполирует функцию $y = Cx^l$.

Следствие. *Между уклонами вниз и вверх (вверх и вниз) полинома* $T(x)$ *относительно функции* $C\Phi_l(x)$ *всегда содержится уклон вверх (вниз) полинома* $T'(x)$ *относительно функции* $C\Phi_l'(x)$. *При этом, если уклоны полинома* $T(x)$ *определяются соответственно парами точек* α_1, β_1 *и* α_2, β_2, *то уклон полинома* $T'(x)$ *будет расположен в промежутке* $[\beta_1, \beta_2]$ *в окрестности той точки* $\bar{x}'$ *(или одной из таких точек) из интервала* (β_1, β_2), *в которой* $T'(x)$ *интерполирует функцию* $y = C \cdot lx^{l-1}$.

Действительно, так как из определения уклонов вниз и вверх полинома $T(x)$ вытекает, что в точках β_1 и β_2, $\beta_1 < \beta_2$, имеют место неравенства

$$T'(\beta_1) < -C|\Phi_l'(\beta_1)| \text{ и } T'(\beta_2) > C|\Phi_l'(\beta_2)|,$$

то доказываемое утверждение немедленно следует из леммы 4.2 и замечания к ней.

ЛЕММА 4.3. *Пусть при каком-нибудь натуральном $l \geqslant 3$ дифференцируемая в промежутке $[-\pi, a]$, $a \geqslant 0$, функция $\nu(x)$ обладает свойствами*:

1) *при всех* $x \in (-\pi, a]$ $\nu(x) > |C\Phi_l(x)|$,
2) *при всех* $x \in (-\pi, a]$ $\nu'(x) > |C\Phi_l'(x)|$, $C = \text{const} > 0$,

*и пусть тригонометрический полином $T(x)$ пересекает кривую $y = \nu(x)$ в двух точках с абсциссами c_1 и c_2, где $-\pi \leqslant c_1 < c_2 \leqslant a$ или же $-\pi < c_1 \leqslant c_2 \leqslant a$, так, что при $c_1 < c_2$ кривая $y = T(x)$ в достаточной близости справа от c_1 расположена над кривой $y = \nu(x)$. Пусть x' — первая точка из полуинтервала $(c_1, c_2]$ *, в которой $T'(x') = \nu'(x')$ **.*

Тогда если справа от c_1 полином $T(x)$ имеет уклон вниз (по отношению к функции $C\Phi_l(x)$) и этот уклон определяется точками α и β, $c_1 \leqslant \alpha \leqslant \beta$, то полином $T'(x)$ в промежутке $[x', \beta]$ будет иметь уклон вниз (по отношению к функции $C\Phi_l'(x)$) и этот уклон будет расположен в окрестности той точки $\bar{x}'$ (или же одной из таких точек) из промежутка (x', β), в которой $T'(\bar{x}') = Cl(\bar{x}')^{l-1}$.

Действительно, так как, с одной стороны,

$$T'(x') = \nu'(x') > |C\Phi_l'(x')|,$$

а с другой стороны, в силу определения уклона вниз,

$$T'(\beta) < -|C\Phi_l'(\beta)|$$

и при этом, очевидно, $\beta > x'$ (ибо $T'(\beta) < 0$), то утверждение доказываемой леммы немедленно следует из леммы 4.2 и замечания к ней.

ЛЕММА 4.4. *Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная и непрерывная вместе со своими производными первого и второго порядков в некотором промежутке $[-\pi, b]$, $\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \pi$, и пусть при некотором натуральном $j \geqslant 3$ для всех $x \in (-\pi, b)$*

$$\varphi(x) > |C\Phi_j(x)|, \quad \varphi'(x) < -|C\Phi_j'(y)|, \quad \varphi''(x) > |C\Phi_j''(x)|, \quad C = \text{const} > 0.$$

Тогда:

1. *Если некоторый тригонометрический полином $T(x)$ имеет относительно функции $C\Phi_j(x)$ уклон вниз, определяемый точками α и β, $-\pi < \alpha \leqslant \beta < b$, так, что при этом $T(\alpha) \geqslant \varphi(a)$, $T(\beta) = \varphi(\beta)$, и если, кроме того, справа от точки β полином $T(x)$ имеет с кривой $y = Cx^j$ по крайней мере две общие точки с абсциссами x' и x'', $\beta < x' \leqslant x'' \leqslant b$, $x' < b$, то в промежутке $[\beta, \bar{x}']$, где $\bar{x}'$ — какая-нибудь точка из $[x', x'')$, в которой $T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1}$, полином $T'(x)$ будет иметь по отношению к функции $C\Phi_j'(x)$ уклон вверх и этот уклон будет определяться парой точек α' и β', $\beta < \alpha' < \beta' < \bar{x}'$, так, что при этом $T'(\alpha') \leqslant \varphi'(\alpha')$, $T'(\beta') = \varphi'(\beta')$.*

Если же $b < x'' \leqslant 2\pi$, то при сохранении всех остальных условий полином $T'(x)$ в промежутке $[\beta, \bar{x}']$ также будет иметь уклон вверх.

---

* Условимся считать, что $(c_1, c_2] \supset c_2$ и в случае, когда $c_1 = c_2$.

** Так, что при всех $x \in (c_1, x']$, очевидно, $T'(x) \geqslant \nu'(x) > 0$.

2. *Если тригонометрический полином $T(x)$ имеет уклон вверх, определяемый точками α и β, $-\pi < \alpha \leqslant \beta < b$, так, что при этом $T(\alpha) \leqslant -\varphi(\alpha)$, $T(\beta) = -\varphi(\beta)$, и если, кроме того, $T(x)$ в промежутке $[\beta, b]$ имеет с кривой $y = Cx^j$ по крайней мере две общие точки с абсциссами x' и x'', $\beta < x' \leqslant x'' \leqslant b$, $x' < b$, то в промежутке $[\beta, \bar{x}']$, где $\bar{x}'$ — какая-нибудь точка из $[x', x'')$, в которой $T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1}$, полином $T'(x)$ будет иметь по отношению к функции $C\Phi_j'(x)$ уклон вниз и этот уклон будет определяться парой точек α' и β', $\beta < \alpha' < \beta' < \bar{x}'$ так, что при этом $T'(\alpha') \geqslant -\varphi'(\alpha')$, $T'(\beta') = -\varphi'(\beta')$.*

В обоих случаях рассматриваемый уклон полинома $T'(x)$ будет расположен в окрестности точки $\bar{x}'$.

Доказательство. В случае 1 мы имеем:

$$T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1}, \quad \bar{x}' \in [x', x''], \quad \bar{x}' < b,$$

и так как в данном случае

$$T(x') - T(\beta) = C(x')^j - \varphi(\beta) < \varphi(x') - \varphi(\beta),$$

то найдется по крайней мере одна точка $\alpha' \in (\beta, x')$, в которой

$$T'(\alpha') < \varphi'(\alpha') = -|\varphi'(\alpha')|.$$

Из неравенств

$$T'(\alpha') < \varphi'(\alpha'), \quad T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1} > \varphi'(\bar{x}')$$

вытекает, что если β' — самая правая в интервале $(\alpha', \bar{x}')$ точка, в которой $T'(\beta') = \varphi'(\beta')$, то

$$T''(\beta') \geqslant \varphi''(\beta').$$

Полученные неравенства

$$T'(\alpha') < \varphi'(\alpha') < -C|\Phi_j'(\alpha')|, \quad T''(\beta') \geqslant \varphi''(\beta') > C|\Phi_j''(\beta')|$$

означают, что полином $T'(x)$ имеет относительно функции $C\Phi_j'(x)$ уклон вверх, определяемый точками α' и β', и что при этом

$$T'(\alpha') < \varphi'(\alpha'), \quad T'(\beta') = \varphi'(\beta'), \quad \beta < \alpha' < \beta' < \bar{x}'.$$

В случае $b < x'' \leqslant 2\pi$ существование уклона вверх у полинома $T'(x)$ в промежутке $[\beta, \bar{x}']$ аналогичным образом вытекает из соотношений

$$T'(\alpha') < -C|\Phi_j'(\alpha')|, \quad \alpha' > \beta \text{ и } T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1}, \quad \bar{x}' > \alpha'.$$

Этот уклон мы, очевидно, вправе считать расположенным в окрестности точки $\bar{x}'$.

В случае 2 мы имеем:

$$T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1} < -\varphi'(\bar{x}'), \quad \bar{x}' \in [x', x''], \; \bar{x}' < b,$$

и так как в данном случае

$$T(x') - T(\beta) = C(x')^j - [-\varphi(\beta)] > -\varphi(x') - [-\varphi(\beta)],$$

то найдется хотя бы одна точка $\alpha' \in (\beta, x')$, в которой

$$T'(\alpha') > -\varphi'(\alpha').$$

Из соотношений $T'(\alpha') > -\varphi'(\alpha')$ и $T'(\bar{x}') < -\varphi'(\bar{x}')$ вытекает, что если β' — самая правая в интервале $(\alpha', \bar{x}')$ точка, в которой $T'(\beta') = -\varphi'(\beta')$, то

$$T''(\beta') \leqslant -\varphi''(\beta') < -C\,|\Phi_j''(\beta')|\,.$$

Полученное неравенство вместе с неравенством $T'(\alpha') > C\,|\Phi_j'(\alpha')|$ доказывает, что полином $T'(x)$ имеет относительно функции $C\,|\Phi_j'(x)|$ уклон вниз, определяемый точками α' и β', и что при этом

$$T'(\alpha') > -\varphi'(\alpha'), \quad T'(\beta') = -\varphi'(\beta'), \quad \beta < \alpha' < \beta' < \bar{x}'.$$

Как и в случае 1, этот уклон мы вправе считать расположенным в окрестности той точки $\bar{x}' \in [x', x''] \subset [\beta, x'']$, в которой $T'(\bar{x}') = Cj(\bar{x}')^{j-1}$. Этим лемма 4.4 доказана.

ЛЕММА 4.5. *Пусть при некотором натуральном k тригонометрический полином $T(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) *$T(x)$ пересекает на периоде кривую Cx^k, где C — положительная постоянная, в l различных точках*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_l, \quad x_l < x_1 + 2\pi \quad (l \geqslant 4) \tag{4.7}$$

и при этом $x_{l-1} > 0$.

2) *$T(x)$ имеет в полуинтервале $(x_l - 2\pi, x_1]$ в точности m простых корней*

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_m \quad (m \geqslant 1) \tag{4.8}$$

и в полуинтервале $[r_m, r_1 + 2\pi)$ пересекает кривую $y = Cx^k$ только в точках системы (4.7).

3) *При каком-нибудь натуральном j, $3 \leqslant j \leqslant l-1$, $T(x)$ по отношению к функции $C\Phi_k(x)$ имеет в полуинтервале $(r_{m-1}, x_j]$ j уклонов, расположенных в окрестностях точек $x_1, x_2, \ldots, x_j$, или, соответственно, в полуинтервале $(r_m, x_{j+1}]$ j уклонов, расположенных в окрестностях точек $x_2, x_3, \ldots, x_{j+1}$; при этом в обоих случаях последний уклон является уклоном вверх.*

Тогда

А. *Если выполняется одно из условий:*

а) *число k нечетное и в то же время или $r_m < 0$, или $r_m = 0$ и $T'(0) = T'(r_m) < 0$,*

б) *число k четное и в то же время или $x_2 \leqslant 0$, или $x_1 < 0 < x_2$ и существует по крайней мере одна точка $\xi \in (r_m, x_3)$, $\xi \leqslant 0$, в которой $T'(\xi) = 0$, или $x_1 = 0$ и $T'(0) < 0$,*

то имеют место следующие утверждения:

А1. *Полином $T'(x)$ пересекает кривую $y = Ckx^{k-1}$ по крайней мере в $l-1$ точках $x_1' < x_2' < \ldots < x_{l-1}'$, содержащихся, соответственно, в интервалах (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{l-1}, x_l).*

А2. *$T'(x)$ имеет в полуинтервале $(x_{l-1}' - 2\pi, x_1']$ по крайней мере $m+1$ корней $r_1' < r_2' < \ldots < r_{m+1}'$, содержащихся, соответственно, в промежутках $(x_{l-1}' - 2\pi, r_1)$, (r_1, r_2), $\ldots$, (r_{m-1}, r_m), $(r_m, x_1']$.*

А3. *$T'(x)$ по отношению к функции $C\Phi_k'(x)$ имеет в полуинтервале $(r_m', x_{j-1}']$ $j-1$ уклонов, расположенных в окрестностях точек $x_1', x_2', \ldots$*

$\ldots, x'_{j-1}$, *или, соответственно, в полуинтервале* $(r'_{m+1}, x'_j]$ $j-1$ *уклонов, расположенных в окрестностях точек* $x'_2, x'_3, \ldots, x'_j$.

Б. *Если выполняется одно из условий:*

а) *число* k *нечетное и в то же время или* $r_m > 0$, *или* $r_m = 0$ *и* $T'(0) > 0$,

б) *число* k *четное и в то же время или* $x_1 > 0$, *или* $x_1 = 0$ *и* $T'(0) > 0$, *или* $x_1 < 0 < x_2$ *и все точки* $\xi \in (r_m, x_3)$, *в которых* $T'(\xi) = 0$, *расположены правее начала* $(\xi > 0)$,

то имеют место следующие утверждения:

Б1. $T'(x)$ *пересекает кривую* $y = Ckx^{k-1}$ *по крайней мере в* $l-1$ *точках* $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{l-1}$, *содержащихся, соответственно, в интервалах* $(x_1, x_2), \ldots, (x_{l-1}, x_l)$.

Б2. $T'(x)$ *имеет в интервале* $(x'_{l-1} - 2\pi, x'_2)$ *по крайней мере* $m+2$ *корня* $r'_1 < r'_2 < \ldots < r'_{m+2}$, *из которых первые* m *содержатся, соответственно, в промежутках* $(x'_{l-1} - 2\pi, r_1)$, $(r_1, r_2), \ldots, (r_{m-1}, r_m)$, *а корни* r'_{m+1} *и* r'_{m+2} — *в промежутке* (r_m, x'_2).

Б3. $T'(x)$ *по отношению к функции* $C\Phi'_k(x)$ *имеет в полуинтервале* $(r'_{m+1}, x'_{j-1}]$ $j-1$ *уклонов, расположенных в окрестностях точек* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{j-1}$, *или, соответственно, в полуинтервале* $(r'_{m+2}, x'_j]$ $j-1$ *уклонов, расположенных в окрестностях точек* $x'_2, x'_3, \ldots, x'_j$.

При последующем дифференцировании случай Б *дает:*

Б1'. $T''(x)$ *пересекает кривую* $y = Ck(k-1)x^{k-2}$ *по крайней мере в* $l-2$ *точках* $x''_1 < x''_2 < \ldots < x''_{l-2}$, *содержащихся, соответственно, в интервалах* $(x'_1, x'_2), \ldots, (x'_{l-2}, x'_{l-1})$.

Б2'. $T''(x)$ *имеет в интервале* $(x''_{l-2} - 2\pi, x''_1)$ *по крайней мере* $m+2$ *корня* $r''_1 < r''_2 < \ldots < r''_{m+2}$.

Б3'. $T''(x)$ *по отношению к функции* $C\Phi''_k(x)$ *имеет в полуинтервале* $(r''_{m+1}, x''_{j-2}]$ $j-2$ *уклона, расположенных в окрестностях точек* $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{j-2}$, *или, соответственно, в полуинтервале* $(r''_{m+2}, x''_{j-1}]$ $j-2$ *уклона, расположенных в окрестностях точек* $x''_2, x''_3, \ldots, x'''_{j-1}$.

Доказательство. А1. Как в случае а), так и в случае б) утверждение А1 следует из теоремы Ролля.

При этом для справедливости доказываемого ниже утверждения А3 в том случае, когда в интервале (x_i, x_{i+1}) существует несколько точек $\bar{x}'_i$, удовлетворяющих условию

$$T'(\bar{x}'_i) = Ck(\bar{x}'_i)^{k-1}, \tag{$*$}$$

мы (когда не оговорено противное) в качестве x'_i будем брать самую левую, если $x_i \leqslant 0$, точку $\bar{x}'_i$ интервала (x_i, x_{i+1}), удовлетворяющую условию $(*)$, а если $x_i > 0$, — то самую правую такую точку.

А2. Так как

$$T'(x'_{l-1} - 2\pi) = T'(x'_{l-1}) = Ck(x'_{l-1})^{k-1} > 0$$

и так как, с другой стороны, и интервале $(x_l - 2\pi, r_1) \subset (x'_{l-1} - 2\pi, r_1)$ существуют точки $\bar{x}$ (точки убывания), в которых $T'(\bar{x}) < 0$, то найдется по крайней мере одна точка $r'_1 \in (x'_{l-1} - 2\pi, r_1)$, в которой $T'(r'_1) = 0$.

Существование корней $r'_2, r'_3, \ldots, r'_m$ следует из теоремы Ролля.

Доказательство существования корня $r'_{m+1} \in (r_m, x'_1]$ будет для каждого из случаев а) и б) различным.

а) Если k нечетно и в то же время или $r_m < 0$, или $r_m = 0$ и $T'(0) = T'(r_m) < 0$, то в точке x_1 полином $T(x)$ будет пересекать кривую $y = Cx^k$ сверху вниз. Поэтому при всех $x \in (x_1, x_2)$ будем иметь:

$$T(x) < Cx^k,$$

а при всех $x \in (x_2, x_3)$

$$T(x) > Cx^k.$$

Принимая во внимание, что у полинома $T(x)$ в окрестностях точек x_2 и x_3 существуют уклоны, заключаем отсюда, что в окрестности точки x_3 имеет место уклон вниз и, значит, в окрестности точки x_2 — уклон вверх. Отсюда следует, что существует точка $\alpha \in (x_1, x_2)$, в которой

$$T(\alpha) < -C|\alpha|^k \leqslant 0.$$

Если теперь обозначить через ξ точку из интервала (r_m, x_2), в которой $T(x)$ принимает наименьшее в этом интервале значение, то в этой точке будем иметь:

$$T'(\xi) = 0 \leqslant Ck\xi^{k-1}.$$

Так как, с другой стороны,

$$T'(x_2) > Ckx_2^{k-1}$$

(ибо в точке x_2 полином $T(x)$ пересекает кривую $y = Cx^k$ снизу вверх), то точка x'_1, в которой

$$T'(x'_1) = Ck(x'_1)^{k-1},$$

может быть, очевидно, взятой из промежутка $[\xi, x_2) \cap (x_1, x_1)$. Поэтому если положить $r'_{m+1} = \xi$, то утверждение А2 леммы 4.5 в этом случае будет выполнено.

б) Если k четно и $x_2 \leqslant 0$, то существование корня $r'_{m+1} \in (r_m, x'_1]$ следует из неравенств

$$T'(r_m) > 0, \quad T'(x'_1) = Ck(x'_1)^{k-1} < 0.$$

Если k четно и $x_1 < 0 < x_2$, то существует точка $\xi \in (r_m, x_2)$, $\xi \leqslant 0$, в которой

$$T'(\xi) = 0 \geqslant Ck\xi^{k-1}.$$

В то же время, очевидно,

$$T'(x_2) < Ckx_2^{k-1}.$$

Отсюда заключаем, что в полуинтервале $[\xi, x_2)$ существует по крайней мере одна точка x'_1, в которой

$$T'(x'_1) = Ck(x'_1)^{k-1}.$$

Поэтому, полагая $r'_{m+1} = \xi$, будем иметь: $T'(r'_{m+1}) = 0$ и $r'_{m+1} \in (r_m, x'_1]$.

Наконец, при $x_1 = 0 = r_m$, $T'(0) < 0$ следует повторить рассуждения случая а).

А3. Для доказательства утверждения А3 обозначим через

$$\alpha_1, \beta_1; \ \alpha_2, \beta_2; \dots; \alpha_j \beta_j$$

пары точек, которыми определяются уклоны в окрестностях точек $x_1, x_2, \dots, x_j$ *, так, что при этом

$$\alpha_i \leqslant \beta_i, \quad \alpha_i \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$x_i, \beta_i \leqslant \alpha_i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, j - 1, \quad r_{m-1} < \alpha_1, \quad \beta_j \leqslant x_j,$$

$$T(\alpha_i) < -C\,|\,\Phi_k(\alpha_i)\,|, \quad T'(\beta_i) > C\,|\,\Phi_k'(\beta_i)\,|, \quad i = 1, 2, \dots, j$$

(или $T(\alpha_i) > C\,|\,\Phi_k(\alpha_i)\,|$, $T'(\beta_i) < -C\,|\,\Phi_k'(\beta_i)\,|$).

Пользуясь произволом в выборе точек α_i и β_i, будем выбирать точки β_i таким образом, чтобы, кроме предыдущих, выполнялись еще следующие условия.

α) В случаях, когда

1) k четно, $x_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j - 1)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вниз,

2) k нечетно, $x_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вверх,

3) k — любое, $x_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вверх,

мы берем $\beta_i = x_i$.

При этом вследствие того что, по условию леммы, у разности $Cx^k - T(x)$ все корни $x_1, x_2, \dots, x_j$ простые, равенство $\beta_i = x_i$, как легко видеть, не приведет нас к противоречию с определением уклонов ни в одном из случаев 1), 2), 3).

β) Если k четно, $x_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вверх, то в качестве β_i мы берем произвольную точку из интервала (α_i, x_i), в которой

$$T'(\beta_i) > -Ck\beta_i^{k-1} = Ck\,|\,\beta_i\,|^{k-1}$$

(хотя бы одна такая точка β_i найдется, ибо $\alpha_i < x_i$, $T(\alpha_i) < -C\alpha_i^k$ и $T(x_i) = Cx_i^k \geqslant -Cx_i^k$).

γ) Если k нечетно, $x_i \leqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j - 1)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вниз, то в качестве β_i мы берем произвольную точку из интервала (α_i, x_i), в которой

$$T'(\beta_i) < -Ck\,\beta_i^{k-1}.$$

δ) Если k — любое, $x_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant j - 1)$ и в окрестности точки x_i имеет место уклон вниз, то в качестве β_i мы берем произвольную точку

* В случае, когда уклоны расположены в окрестностях точек $x_2, x_3, \dots, x_{j+1}$, рассуждения проводятся аналогично.

из интервала (x_i, α_{i+1}), в которой

$$T'(\beta_i) < -Ck\beta_i^{k-1}.$$

Применяя следствие из леммы 4.2, выводим, что полином $T'(x)$ будет иметь в интервале (r'_m, x'_j) по крайней мере $j-1$ уклонов, расположенных в промежутках $[\beta_1, \beta_2], [\beta_2, \beta_3], \ldots, [\beta_{j-1}, \beta_j]$ *. Учитывая способ выбора точек x'_i (см. доказательство утверждения А1) и способ выбора точек β_i, легко убедиться, что во всех случаях

$$x'_i \in (\beta_i, \beta_{i+1}) \cap (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, j-1 \;**$$

и что, следовательно, полином $T'(x)$ действительно имеет в интервале (r'_m, x'_j) по крайней мере $j-1$ уклонов, расположенных в окрестностях точек $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{j-1}$. Принимая во внимание, что последний из этих уклонов является уклоном вверх, и учитывая условия $\alpha) - \delta)$, мы можем считать его расположенным на сегменте $[\beta_{j-1}, x'_{j-1}]$. Отсюда и следует, что все рассматриваемые уклоны расположены в полуинтервале $(r'_m, x'_{j-1}]$.

Б1. Утверждение Б1 как в случае а), так и в случае б) следует из теоремы Ролля.

Б2. Доказательство существования корня $r'_1 \in (x'_{l-1} - 2\pi, r_1)$ и корней $r'_2, r'_3, \ldots, r'_m$ — то же, что и в случае А2.

Чтобы доказать, что в интервале (r_m, x'_2) содержатся еще по крайней мере два корня, рассмотрим отдельно случаи а) и б).

а) Если k нечетно и в то же время или $r_m > 0$, или $r_m = 0$ и $T'(0) > 0$, то, очевидно,

$$T'(r_m) > 0, \quad T'(x_1) > Ckx_1^{k-1} > 0, \quad T'(x_2) < Ckx_2^{k-1}, \quad T'(x_3) > Ckx_3^{k-1}.$$

Кроме того, очевидно, что при всех $x \in (x_1, x_2)$

$$T(x) > Cx^k.$$

Так как в окрестности точки x_2 имеет место уклон, то отсюда следует что этот уклон будет уклоном вниз и потому найдется точка $\beta \in (x_1, x_3)$, в которой

$$T'(\beta) < -Ck\beta^{k-1} < 0.$$

В силу полученных неравенств, существуют точки $r'_{m+1} \in (x_1, \beta) \subset (r_m, \beta)$ и $r'_{m+2} \in (\beta, x_3)$, в которых

$$T'(r'_{m+1}) = T'(r'_{m+2}) = 0.$$

Учитывая теперь, что

$$T'(r'_{m+2}) = 0 < Ck(r'_{m+2})^{k-1}$$

и

$$T'(x_3) > Ckx_3^{k-1},$$

---

* Чтобы убедиться в том, что $r'_m < \beta_1$, достаточно учесть, что $r_{m-1} < \alpha_1 \leqslant \beta_1$ и что если, например, $T(\alpha_1) > 0$ и $\alpha_1 < r_m$, то, очевидно, $T'(r_{m-1}) > 0$, $T'(\beta_1) < 0$ и, следовательно, точка $r'_m \in (r_{m-1}, r_m)$, в которой $T'(r'_m) = 0$, может быть взята из интервала (r_{m-1}, β_1).

** Следует принять во внимание, что в силу α), β), γ) и δ), если k — четное, $x_i \leqslant 0 < x_{i+1}$ и в окрестности точки x_{i+1} имеет место уклон вниз (и, значит, $i+1 < j$), то $[x_i, x_{i+1}] \subset (\beta_i, \beta_{i+1})$, а во всех остальных случаях или $x_i = \beta_i$, или $x_{i+1} = \beta_{i+1}$.

выводим, что существует по крайней мере одна точка $x_2' \in (r_{m+2}', x_3) \cap \cap (x_2, x_3)$, в которой

$$T'(x_2') = Ck(x_2')^{k-1}$$

(и, следовательно, точка r_{m+2}' расположена действительно левее точки $x_2' \in (x_2, x_3)$).

б) Если k четно и $x_1 > 0$, то, в силу условий леммы, $r_m > 0$, и доказательство проводится повторением рассуждений случая а).

Случай $x_1 = 0 = r_m$, $T'(0) > 0$ также разобран в п. а).

Пусть теперь $x_1 < 0 < x_2$ и все точки $\xi \in (r_m, x_3)$, в которых $T'(\xi) = 0$, расположены правее начала (т. е. пусть $\xi > 0$). В этом случае, очевидно, имеем:

$$T'(r_m) > 0, \quad T'(x_1) > Ckx_1^{k-1}, \quad T'(x_2) < Ckx_2^{k-1}, \quad T'(x_3) > Ckx_3^{k-1} > 0$$

и

$$T(x) > Cx^k \geqslant 0 \text{ при всех } x \in (x_1, x_2).$$

Поэтому в окрестности точки x_2 имеет место уклон вниз и, значит, найдется точка $\beta \in (x_1, x_3)$, в которой

$$T'(\beta) < -Ck|\beta|^{k-1} \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что существуют положительные точки $r_{m+1}' \in (r_m, \beta)$ и $r_{m+2}' \in (\beta, x_3)$, в которых

$$T'(r_{m+1}') = T'(r_{m+2}') = 0.$$

А так как

$$T'(r_{m+2}') = 0 < Ck(r_{m+2}')^{k-1}$$

и

$$T'(x_3) > Ckx_3^{k-1},$$

то в интервале $(r_{m+2}', x_3) \cap (x_2, x_3)$ существует по крайней мере одна точка x_2', в которой

$$T'(x_2') = Ck(x_2')^{k-1};$$

следовательно, и в этом случае $r_{m+2}' < x_2'$.

Б3. Утверждение Б3 доказывается так же, как и утверждение А3.

Для полного доказательства леммы требуется только установить, что при последующем дифференцировании между точкой $r_{m+2}'' \in (r_{m+1}', r_{m+2}')$, в которой $T''(r_{m+2}'') = 0$, и точкой x_2' существует по крайней мере одна точка x_1'', в которой

$$T''(x_1'') = Ck(k-1)(x_1'')^{k-2}$$

(ибо все остальные утверждения и, в частности, существование корня $r_1'' \in (x_{l-2}'' - 2\pi, r_1')$ *, доказываются при помощи повторения рассуждений, применявшихся выше, например, в случае А).

Как в случае а), так и в случае б) очевидно, что $T'(r_m) > 0$, и

* Следует учесть, что в случае Б, очевидно, $x_{l-2} > 0$ и, значит, $x_{l-2}' > 0$ и $x_{l-2}'' > 0$.

полином $T(x)$ будет пересекать кривую $y = Cx^k$ в точке x_1 снизу вверх, а в точке x_2 — сверху вниз таким образом, что

$$T'(x_1) > Ckx_1^{k-1}, \quad T'(x_2) < Ckx_2^{k-1}, \ldots .$$

Кроме того, при всех $x \in (x_1, x_2)$ будем иметь:

$$T(x) > Cx^k,$$

а при всех $x \in (x_2, x_3)$ —

$$T(x) < Cx^k.$$

В силу этого, в окрестности точки x_2 имеет место уклон вниз и потому существует точка $\beta \in (x_1, x_3)$, в которой

$$T'(\beta) < -Ck\beta^{k-1}.$$

Если при этом точку β считать такой, для которой мы имели $r'_{m+1} \in (r_m, \beta)$ и r'_{m+2} (β, x_3), то получим:

$$0 < r'_{m+1} < \beta < r'_{m+2}, \quad r'_{m+1} < r'_{m+2} < x'_2,$$

$$-Ck(r'_{m+1})^{k-1} < T'(r'_{m+1}) = 0 < Ck(r'_{m+1})^{k-1},$$

$$T'(\beta) < -Ck\beta^{k-1}, \quad T'(x'_2) = Ck(x'_2)^{k-1}.$$

Из этих неравенств следует, что в некоторых точках интервала (r'_{m+1}, β) полином $T'(x)$ убывает быстрее, чем $-Ckx^{k-1}$, а в некоторых точках интервала (β, x'_2) полином $T'(x)$ растет быстрее, чем Ckx^{k-1}; следовательно, найдутся точки $\eta \in (r'_{m+1}, \beta)$ и $\zeta \in (\beta, x'_2)$, в которых

$$T''(\eta) < -Ck(k-1)\eta^{k-2} \text{ и } T''(\zeta) > Ck(k-1)\zeta^{k-2}.$$

В силу этого, в интервале (η, ζ) всегда найдется пара точек $\mathring{r}$ и $\mathring{x}$, $\mathring{r} < \mathring{x}$, в которых

$$T''(\mathring{r}) = 0, \quad T''(\mathring{x}) = Ck(k-1)(\mathring{x})^{k-2}.$$

Отсюда без труда заключаем, что найдется такая пара точек $r''_{m+2} \in (r'_{m+1}, r'_{m+2})$, $r''_{m+2} \leqslant \mathring{r}$ и $x''_1 \in (x'_1, x'_2)$, $x''_1 \geqslant \mathring{x}$, что

$$T''(r''_{m+2}) = 0, \quad T''(x''_1) = Ck(k-1)(x''_1)^{k-2}$$

и, в то же время, $r''_{m+2} < x''_1$.

Этим лемма 4.5 полностью доказана.

ЛЕММА 4.6. *Если при каком-нибудь натуральном j тригонометрический полином $T(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) $T(x) \not\equiv 0$,

2) *$T(x)$ пересекает кривую $y = Cx^j$ $(C > 0)$ в k точках*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k, \quad x_k < x_1 + 2\pi, \tag{4.9}$$

3) *в полуинтервале $(x_k - 2\pi, x_1]$ полином $T(x)$ имеет l корней*

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_l, \quad x_k - 2\pi < r_1, \quad r_l \leqslant x_1 \quad (l \geqslant 0), \tag{4.9'}$$

то $T(x)$ является полиномом порядка не ниже $\left[\frac{1}{2}(k + l - 3)\right]$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что в системе (4.9) содержатся все корни уравнения $T(x)-x^j=0$ из промежутка $[r_l, r_1+2\pi)$ (или же, если $l=0$, из промежутка $(x_k-2\pi, x_k])$, а в системе (4.9′) — все корни полинома $T(x)$ из промежутка $(x_k-2\pi, x_1]$. Заметим, что если $k\leqslant 3$, то полином $T(x)$ будет иметь по крайней мере $k+l-3$ корня и, следовательно, является полиномом порядка не ниже $\left[\frac{1}{2}(k+l-3)\right]$. Значит, интерес представляет только тот случай, когда $k\geqslant 4$. Именно этот случай мы и будем рассматривать.

Рассмотрим следующие две возможности.

I. Пусть $l\geqslant 1$. Предположим сначала, что с каждой стороны от начала в системе (4.9) содержится не меньше, чем по две точки. Тогда число $k+l$ будет обязательно четным (это легко усматривается из геометрических соображений; самостоятельное же доказательство этого факта легко получить при помощи рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным в лемме 4.1). После дифференцирования мы получим полином $T'(x)$, который на некотором полуинтервале $(\alpha, \alpha+2\pi]$ будет иметь $\geqslant k-1$ точек пересечения с кривой $y=Cjx^{j-1}$:

$$x_1'\leqslant x_2'\leqslant\ldots\leqslant x_{k-1}'.$$

Кроме того, в интервале $(x_{k-1}'-2\pi, x_1')$ полином $T'(x)$ будет иметь по крайней мере $l+1$ корней

$$r_1'\leqslant r_2'\leqslant\ldots\leqslant r_{l+1}',$$

из которых $l-1$ корней $r_2', \ldots, r_l'$ содержатся в промежутке $[r_1, r_l]$, корень r_1' содержится в интервале $(x_{k-1}'-2\pi, r_1)$ и корень r_{l+1}' — в интервале (r_l, x_1'), ибо, как легко видеть, для полинома $T(x)$ в интервалах $(x_{k-1}'-2\pi, r_1)$ и (r_l, x_1') после точек возрастания обязательно следуют точки убывания или наоборот. Таким образом, после дифференцирования сумма числа точек x_s' и числа корней r_t' останется опять $\geqslant k+l$.

При следующих дифференцированиях картина уменьшения (не больше, чем на единицу) числа точек $x_s^{(\nu)}$ и увеличения (по крайней мере на единицу) числа корней $r_t^{(\nu)}$ будет повторяться до тех пор, пока после некоторого числа λ дифференцирований (в предположении, что $\lambda\leqslant j-1$) с одной стороны от начала, например слева, останется только одна точка $x_1^{(\lambda)}$, в которой

$$T^{(\lambda)}(x_1^{(\lambda)})=C(x^j)^{(\lambda)}_{x=x_1^{(\lambda)}}.$$

В этом случае полином $T^{(\lambda)}(x)$ будет интерполировать в некотором полуинтервале $(\beta, \beta+2\pi]$ функцию

$$K(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\leqslant 0,\\ C(x^j)^{(\lambda)}, & \text{если } x\geqslant 0,\end{cases}$$

в числе точек, которое $\geqslant k+l-1$. Продолжая процесс дифференцирования, мы, в силу теоремы 2.1, найдем, что полином $T^{(j-1)}(x)$ будет

в некотором полуинтервале $(\overline{\beta}, \overline{\beta} + 2\pi]$ интерполировать функцию

$$\overline{K}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ C \cdot j!\, x, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

в числе точек, которое также $\geqslant k + l - 1$. Пусть некоторое число μ из этих точек неположительно и ν точек > 0. Тогда в результате еще одного дифференцирования мы получим полином $T^{(j)}(x)$, который по крайней мере в $\mu - 1$ точках будет обращаться в нуль и в $\nu - 1$ точках будет принимать значение, равное $Cj!$ Поэтому после $(j+1)$-го дифференцирования мы получим полином $T^{(j+1)}(x)$, который на периоде будет иметь $\geqslant (\mu - 2) + (\nu - 2) \geqslant k + l - 5$ корней. Так как число $k + l$ четное, то отсюда следует, что полином $T^{(j+1)}(x)$, а значит, и полином $T(x)$, имеет порядок не ниже $\frac{1}{2}(k + l - 4) = \left[\frac{1}{2}(k + l - 3)\right]$.

Если бы оказалось, что $\lambda \geqslant j$, то тогда после j шагов полином $T^{(j)}(x)$ интерполировал бы функцию $y = Cj!$ в $k - j$ точках

$$x_1^{(j)} \leqslant x_2^{(j)} \leqslant \ldots \leqslant x_{k-j}^{(j)}, \quad x_{k-j}^{(j)} < x_1^{(j)} + 2\pi$$

и, кроме того, имел бы в интервале $(x_{k-j}^{(j)}, x_1^{(j)} + 2\pi)$ по крайней мере $l + j$ корней. Поэтому полином $T^{(j+1)}(x)$ имел бы $\geqslant (k - j - 1) + (l + j - 1) = k + l - 2$ корня и, значит, его порядок был бы не ниже $\left[\frac{1}{2}(k + l - 2)\right]$. Этим лемма 4.6 для случая I доказана.

II. Пусть $l = 0$. Предположим, для определенности, что $T(x_k) \geqslant T(x_1)$. Тогда

1) если $T(x_k - 2\pi) = T(x_1)$, то полином $T'(x)$ интерполирует функцию Cjx^{j-1} по крайней мере в $k - 1$ точках из промежутка $[x_1, x_k]$ и, кроме того, обращается в нуль по крайней мере в одной точке из полуинтервала $(x'_{k-1} - 2\pi, x'_1] \supset (x_k - 2\pi, x_1)$; следовательно, в силу случая I, $T'(x)$ имеет порядок не ниже $\left[\frac{1}{2}(k - 1 + 1 - 3)\right] = \left[\frac{1}{2}(k - 3)\right]$;

2) если $T(x_k - 2\pi) > T(x_1)$, то найдутся точки $\overline{x} \in (x_k - 2\pi, x_1)$, в которых $T'(\overline{x}) < 0$. Поэтому, обозначая через x'_1, x'_{k-2} и x'_{k-1} самые правые в промежутках $[x_1, x_2]$, $[x_{k-2}, x_{k-1}]$ и $[x_{k-1}, x_k]$ точки, в которых $T'(x)$ интерполирует функцию Cjx^{j-1}, и учитывая, что при четном j, очевидно, $x_k > 0$, получим:

а) если j нечетно, то $T'(x'_1) = Cj(x'_1)^{j-1} \geqslant 0$, и, следовательно, найдется по крайней мере одна точка $r' \in (\overline{x}, x')$, в которой $T'(r') = 0$. Поэтому, рассуждая как в случае 1), найдем, что $T'(x)$ имеет порядок не ниже $\left[\frac{1}{2}(k - 3)\right]$;

б) если j четно и существует по крайней мере одна точка $\overline{x} \in [x'_{k-1} - 2\pi, x_1)$, в которой $T'(\overline{x}) \geqslant 0$, то в полуинтервале $[x'_{k-1} - 2\pi, x_1)$ найдется по крайней мере одна точка r', в которой $T'(r') = 0$. Так как, кроме того, в промежутке $[x'_1, x'_{k-1}]$ существует $\geqslant k - 1$ точек, в которых $T'(x)$ интерполирует функцию Cjx^{j-1}, то, в силу случая I, полином $T'(-x)$ (а значит, и полином $T'(x)$) имеет порядок не ниже

$$\left[\frac{1}{2}(k - 1 + 1 - 3)\right] = \left[\frac{1}{2}(k - 3)\right];$$

в) если j четно и при всех $x \in [x'_{k-1} - 2\pi, x_1)$ $T'(x) < 0$, то, очевидно, $x'_{k-1} < 0$ (ибо $T'(x'_{k-1} - 2\pi) = Cj(x'_{k-1})^{j-1} < 0$). Поэтому, учитывая, что

$$T(x_{k-1}) = Cx_{k-1}^j \leqslant Cx_1^j = T(x_1) < T(x_k),$$

заключаем, что существуют точки $\bar{x} \in (x_{k-1}, x_k) \cap (x_{k-1}, x'_{k-1})$, в которых $T'(\bar{x}) > 0$. Из соотношений

$$T'(x'_{k-2}) = Cj(x'_{k-2})^{j-1} \leqslant Cj(x'_{k-1})^{j-1} = T'(x'_{k-1}) < 0$$

и

$$T'(\bar{x}) > 0, \quad \bar{x} \in (x_{k-1}, x'_{k-1}) \subset (x'_{k-2}, x'_{k-1})$$

следует, что полином $T'(x)$ обращается в нуль по крайней мере в двух точках из интервала $(x'_{k-2} - 2\pi, x'_{k-1} - 2\pi) \subset (x'_{k-2} - 2\pi, x'_1)$, и, кроме того, $T'(x)$ интерполирует функцию Cjx^{j-1} в промежутке $[x'_1, x'_{k-2}]$ по крайней мере в $k-2$ точках. Поэтому $T'(x)$, в силу случая I, имеет порядок не ниже $\left[\frac{1}{2}(k-2+2-3)\right] = \left[\frac{1}{2}(k-3)\right]$. Лемма 4.6 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\varphi(x)$ — функция, определенная рядом вида*

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad x \in [0, 2\pi), \tag{4.10}$$

где a_j — произвольные неотрицательные числа, определяющие ряд $\sum\limits_0^\infty a_j x^j$ с радиусом сходимости $\geqslant 2\pi$ $\left(т. е. \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[j]{a_j} \leqslant \frac{1}{2\pi}\right)$. Тогда при любом натуральном n тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n, который интерполирует функцию $\varphi(x)$ в точках

$$t_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1, \tag{4.11}$$

будет интерполировать эту функцию только в точках t_k и притом в каждой из этих точек разность $\varphi(x) - T_n(x)$ будет менять знак таким образом, что

$$\operatorname{sign}[\varphi(x) - T_n(x)] \equiv -\operatorname{sign}\sin(n+1)x, \quad x \in [0, 2\pi). \tag{4.12}$$

Доказательство. Обозначим через $T_{n,j}(x)$ полином порядка не выше n, интерполирующий функцию $y = x^j$ в узлах (4.11). Так как, очевидно, при всех $j = 1, 2, \ldots$ будет иметь место неравенство

$$|T_{n,j}(x)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{2n+1} (t_k)^j \frac{\sin\frac{x-t_1}{2}\ldots\sin\frac{x-t_{k-1}}{2}\sin\frac{x-t_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-t_{2n+1}}{2}}{\sin\frac{t_k-t_1}{2}\ldots\sin\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\sin\frac{t_k-t_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{t_k-t_{2n+1}}{2}} \right| \leqslant Ar^j,$$

где $r = \frac{(2n+1)\pi}{n+1}$ и A — постоянная, не зависящая от j, то, в силу сходимости ряда $\sum\limits_0^\infty a_j x^j$ в точке r, ряд $\sum\limits_0^\infty a_j T_{n,j}(x)$ будет равномерно сходиться к интересующему нас полиному $T_n(x)$. Таким образом, если

мы докажем справедливость теоремы 4.1 для каждой из функций x^j $(j = 1, 2, \ldots)$, то отсюда немедленно будет следовать справедливость этой теоремы и для функции $\varphi(x) = \sum_0^\infty a_j x^j$.

Итак, предположим, что при некотором натуральном j полином $T_n(x)$ интерполирует функцию x^j в точках t_k системы (4.11), и докажем, что тогда $T_n(x)$ интерполирует функцию x^j только в точках t_k и притом так, что

$$\operatorname{sign}[x^j - T_n(x)] = -\operatorname{sign}\sin(n+1)x. \qquad (4.12')$$

Доказательство будет различным для случаев, когда $j \leqslant 2n-1$ и когда $j \geqslant 2n$.

I. Случай, когда $j \leqslant 2n-1$. Предположим, от противного, что полином $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$, который интерполирует функцию x^j в $2n+1$ точках $t_k = \frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, имеет с этой функцией еще по крайней мере одну общую точку из полуинтервала $[0, 2\pi)$. В таком случае полином T_n (x) будет в некотором промежутке $(b-2\pi,\ b)$, $b \in (2\pi - t_1,\ 2\pi + t_1)$, иметь (с учетом кратности) по крайней мере $2n+3$ общие точки с функцией $y = x^j$. В самом деле, обозначим через t_f самый правый в промежутке $[2\pi - t_1,\ 2\pi + t_1)$ корень уравнения $x^j - T_n(x) = 0$, а через b — какую-нибудь точку из интервала $(t_f,\ 2\pi + t_1)$ такую, что

$$t_1^j < T_n(b) < t_f^j,$$

$$T_n(x) > t_1^j > (x-2\pi)^j \text{ при всех } x \in (t_f,\ b)$$

(такая точка существует, ибо $T_n(2\pi + t_1) = T_n(t_1) = t_1^j < t_f^j = T_n(t_f)$). Тогда из неравенств

$$T_n(b-2\pi) > t_1^j > (b-2\pi)^j \text{ и } T_n(b) < b^j$$

следует, что в интервале $(b-2\pi,\ b)$ полином $T_n(x)$ имеет с функцией $y = x^j$ нечетное число общих точек. Поэтому, вследствие сделанного предположения, таких точек будет также $\geqslant 2n+3$ (в случае, когда или $b - 2\pi \leqslant 0$, или $t_f > t_{2n+1}$ этот факт очевиден; если же $t_f = t_{2n+1}$ и $b - 2\pi > 0$, то тогда, в силу того, что при $x \in (t_f,\ b)$ $T_n(x) > (x-2\pi)$ в интервале $(t_f - 2\pi,\ b-2\pi) \supset [0,\ b-2\pi)$, уравнение $x^j - T_n(x) = 0$ корней не имеет и, значит, все корни этого уравнения, содержащиеся в промежутке $[0, 2\pi]$, будут находиться в интервале $(b-2\pi,\ b)$). Так как после этих замечаний случай, когда $j \leqslant 2$, очевиден, то мы будем считать, что $j \geqslant 3$.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = (2t_f - 2\pi - x)^j \qquad (4.13)$$

такую, что

1) кривая $y = \varphi(x)$ пересекается с кривой $y = x^j$ в точке $\tau = t_f - \pi \geqslant t_n = \pi - \frac{\pi}{n+1}$ и является симметричной к этой кривой по отношению к прямой $x = \tau$;

2) кривая $y = \varphi(x)$ пересекается с кривой $y = (2\pi + x)^j$ в точке $t_f - 2\pi$;

3) при всех $x \in (-\pi, \tau)$

$$\varphi(x) > |\Phi_j(x)|, \quad \varphi'(x) < -|\Phi_j'(x)|, \quad \varphi''(x) > |\Phi_j''(x)|.$$

Полином $T_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $T_n(x)$ имеет в полуинтервале $[b-2\pi, b)$, $b \in (2\pi - t_1, 2\pi + t_1)$, с функцией $y = x^j$ $2n+3$ общие точки

$$x_1^0 \leqslant x_2^0 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n+3}^0 = t_f, \tag{4.14}$$

причем $2n+1$ из этих точек являются заведомо различными и $x_{2n+3}^0 < x_1^0 + 2\pi$.

2. В промежутке $[x_{2n+3}^0 - 2\pi, x_1^0]$ в окрестности точки x_1^0 полином $T_n(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi_j(x)$ уклон вниз.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно учесть, что

$$T_n(x_{2n+3}^0 - 2\pi) = T_n(x_{2n+3}^0) = (x_{2n+3}^0)^j > |x_{2n+3}^0 - 2\pi|^j$$

и что в силу соотношений

$$T_n(x_{2n+3}^0 - 2\pi) - T_n(x_1^0) = \varphi(x_{2n+3}^0 - 2\pi) - T_n(x_1^0) \geqslant \varphi(x_{2n+3}^0 - 2\pi) - \varphi(x_1^0)$$

найдется по крайней мере одна точка $\beta^0 \in [x_{2n+3}^0 - 2\pi, x_1^0)$, в которой

$$T_n'(\beta^0) \leqslant \varphi'(\beta^0) < -|\Phi_j'(\beta^0)|. \tag{4.15}$$

Для дальнейшего условимся в качестве β^0 брать самую правую в полуинтервале $[x_{2n+3}^0 - 2\pi, x_1^0)$ точку, в которой $T_n(x)$ интерполирует функцию $y = \varphi(x)$.

3. Так как при всех $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{k\pi}{n+1} \in \left(0, \pi - \frac{\pi}{n+1}\right] \subset (0, \tau]$$

и при всех $k = n+1, n+2, \ldots, 2n+1$

$$\frac{k\pi}{n+1} \in [\pi, 2\pi),$$

то

а) в системе (4.14) существует $\geqslant n$ точек, содержащихся в промежутке $(x_{2n+3}^0 - 2\pi, \tau]$, в каждой из которых кривая $y = T_n(x)$ интерполирует кривую $y = x^j$ и при этом все точки интерполяции, за исключением, быть может, точки $\left(\frac{n\pi}{n+1}, \left(\frac{n\pi}{n+1}\right)^j\right)$, находятся под кривой $y = \varphi(x)$ (ибо $x^j < \varphi(x)$ при всех $x \in (0, \tau)$); точки $\left(\frac{n\pi}{n+1}, \left(\frac{n\pi}{n+1}\right)^j\right)$ находятся не выше кривой $y = \varphi(x)$;

б) в системе (4.14) существует $\geqslant n+1$ точек, которые после сдвига влево на 2π будут находиться в промежутке $[-\pi, x_{2n+3}^0 - 2\pi]$ и в каждой из которых кривая $y = T_n(x)$ интерполирует кривую $y = (x+2\pi)^j$. При этом все точки интерполяции, за исключением $(-\pi, \pi^j)$, находятся над кривой $y = |\Phi_j(x)|$ (ибо $|\Phi_j(x)| < (x+2\pi)^j$ при всех $x > -\pi$); точка $(-\pi, \pi^j)$ находится на кривой $y = |\Phi_j(x)| = |x|^j$.

Продифференцируем один раз рассмотренные функции $T_n(x)$, $\Phi_j(x)$, x^j и $\varphi(x)$. Тогда полином $T_n'(x)$ будет обладать следующими свойствами.

1′. Полином $T'_n(x)$ имеет с функцией $(x^j)'$ по крайней мере $2n+3$ общие точки

$$x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_{2n+3}, \tag{4.14′}$$

причем $2n+2$ из этих точек будут различными и $x'_{2n+3} < x'_1 + 2\pi$ *.

Действительно, $2n+2$ точки $x'_2 \leqslant x'_3 \leqslant \ldots x'_{2n+3}$ в промежутке $[x^0_1, x^0_{2n+3}]$ существуют в силу теоремы Ролля и при этом $2n+1$ из этих точек будут, очевидно, различными.

Кроме того, в промежутке $[x'_{2n+3} - 2\pi, \beta^0]$ полином $T'_n(x)$, в силу леммы 2.3, имеет уклон вниз (роль функции $\nu(x)$ играет функция $y = (x+2\pi)^j$, а роль точек c_1, c_2, β и x' — соответственно точки $x^0_{2n+2} - 2\pi$, $x^0_{2n+3} - 2\pi$, β^0 и $x'_{2n+3} - 2\pi$) и этот уклон расположен в окрестности некоторой точки $x'_1 \in (x'_{2n+3} - 2\pi, \beta^0) \subset (x'_{2n+3} - 2\pi, x^0_1)$, в которой

$$T'_n(x'_1) = j(x'_1)^{j-1}.$$

2′. В промежутке $[x'_{2n+3} - 2\pi, x'_2]$ полином $T'_n(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi'_j(x)$ по крайней мере два уклона: в промежутке $[x'_{2n+3} - 2\pi, \beta^0]$, в окрестности точки x'_1, полином $T'_n(x)$ имеет, как мы видели в п. 1′, уклон вниз, а в промежутке $[\beta^0, x'_2]$, в окрестности точки x'_2, полином $T'_n(x)$, в силу леммы 4.4, имеет уклон вверх (роль точек α и β играют соответственно точка $x^0_{2n+3} - 2\pi$, в которой $T_n(x^0_{2n+3} - 2\pi) = (x^0_{2n+3})^j = t^j_f = \varphi(t_f - 2\pi) = \varphi(x^0_{2n+3} - 2\pi)$, и точка β^0, а роль точек x' и x'' играют точки x^0_1 и x^0_2); этот уклон будет определяться некоторой парой точек α'_2 и β'_2, $\beta^0 \leqslant \alpha'_2 \leqslant \beta'_2 \leqslant x'_2$, так, что при этом

$$T'_n(\alpha'_2) \leqslant \varphi'(\alpha'_2), \quad T'_n(\beta'_2) = \varphi'(\beta'_2).$$

3′. а) В системе (4.14′) существует $\geqslant n-1$ точек, которые содержатся в промежутке $[x'_2, \tau)$ и в каждой из которых кривая $y = T'_n(x)$ интерполирует кривую $y = (x^j)'$. Все точки интерполяции находятся под кривой $y = |\varphi'(x)|$.

б) Существует $\geqslant n$ точек, содержащихся в промежутке $(-\pi, x'_{2n+3} - 2\pi]$, в каждой из которых $T'_n(x)$ интерполирует кривую $y = \frac{d}{dx}(x+2\pi)^j$. Все точки интерполяции находятся над кривой $y = |\Phi'_j(x)|$.

Предположим теперь, что после i-го дифференцирования ($1 \leqslant i \leqslant n-2$) мы получили полином $T^{(i)}_n(x)$, обладающий следующими свойствами:

1$^{(i)}$. Полином $T^{(i)}_n(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(i)}$ по крайней мере в $2n+3$ точках

$$x^{(i)}_1 \leqslant x^{(i)}_2 \leqslant \ldots \leqslant x^{(i)}_{2n+3}, \tag{4.14$^{(i)}$}$$

причем не меньше чем $2n+2$ из этих точек являются различными, $x^{(i)}_{2n+3} < x^{(i)}_1 + 2\pi$ и, кроме того, точка $x^{(i)}_{2n+3}$ является первой точкой из

* Кроме того, мы будем считать, что x'_{2n+3} — первая точка из полуинтервала $(x^0_{2n+2}, x^0_{2n+3}]$, в которой $T'_n(x'_{2n+3}) = j(x'_{2n+3})^{j-1}$.

полуинтервала $(x_{2n+2}^{(i-1)}, x_{2n+3}^{(i-1)}]$, в которой

$$T_n^{(i)}(x_{2n+3}^{(i)}) = (x^j)^{(i)}_{x=x_{2n+3}^{(i)}}$$

$2^{(i)}$. В промежутке $[x_{2n+3}^{(i)} - 2\pi, x_{i+1}^{(i)}]$ полином $T_n^{(i)}(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi_j^{(i)}(x)$ $i+1$ уклонов, расположенных в окрестностях точек

$$x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_{i+1}^{(i)},$$

причем точки $\alpha_l^{(i)}$ и $\beta_l^{(i)}$ $(l = 1, 2, \ldots, i+1)$, определяющие эти уклоны, расположены так, что

$$x_{2n+3}^{(i)} - 2\pi \leqslant \alpha_1^{(i)} \overset{x_1^{(i)}}{\underset{\beta_1^{(i)}}{\leqslant}} \leqslant \alpha_2^{(i)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_i^{(i)} \overset{x_i^{(i)}}{\underset{\beta_i^{(i)}}{\leqslant}} \leqslant \alpha_{i+1}^{(i)} \leqslant \beta_{i+1}^{(i)} < x_{i+1}^{(i)},$$

$$|T_n^{(i)}(\alpha_{i+1}^{(i)})| \geqslant |\varphi^{(i)}(\alpha_{i+1}^{(i)})|, \quad T_n^{(i)}(\beta_{i+1}^{(i)}) = \varphi^{(i)}(\beta_{i+1}^{(i)}).$$

$3^{(i)}$. а) В системе $(4.14^{(i)})$ существует $\geqslant n-i$ точек $(n-i \geqslant 2)$, которые содержатся в промежутке $[x_{i+1}^{(i)}, \tau)$ и в каждой из которых кривая $y = T_n^{(i)}(x)$ интерполирует кривую $y = (x^j)^{(i)}$. Все точки интерполяции находятся под кривой $y = |\varphi^{(i)}(x)|$.

б) Существует $\geqslant n-i+1$ точек $(n-i+1 \geqslant 3)$, содержащихся в промежутке $(-\pi, x_{2n+3}^{(i)} - 2\pi]$, в каждой из которых кривая $y = T_n^{(i)}(x)$ интерполирует кривую

$$y = \frac{d^i}{dx^i}(x+2\pi)^j.$$

Все точки интерполяции находятся над кривой $y = |\Phi_j^{(j)}(x)|$.

Тогда после еще одного дифференцирования мы получим полином $T_n^{(i+1)}(x)$, обладающий следующими свойствами.

$1^{(i+1)}$. Полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(i+1)}$ по крайней мере в $2n+3$ различных точках

$$x_1^{(i+1)} < x_2^{(i+1)} < \ldots < x_{2n+3}^{(i+1)}, \qquad (4.14^{(i+1)})$$

причем точка $x_{2n+3}^{(i+1)}$ может быть взята так, чтобы она была самой левой в полуинтервале $(x_{2n+2}^{(i)}, x_{2n+3}^{(i)}]$ точкой, в которой полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(i+1)}$.

α) Действительно, в силу леммы 4.3, полином $T_n^{(i+1)}(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi_j^{(i+1)}(x)$ в промежутке $[x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi, \beta_1^{(i)}]$ уклон вниз, причем этот уклон расположен в окрестности той точки $x_1^{(i+1)} \in (x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi, \beta_1^{(i)})$, в которой полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} x^j$ (роль $\nu(x)$ играет функция $\frac{d^i}{dx^i}(x+2\pi)^j$, а роль точек c_1, c_2, β и x' — точки $x_{2n+2}^{(i)} - 2\pi$, $x_{2n+3}^{(i)} - 2\pi$, $\beta_1^{(i)}$ и $x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi$).

β) В силу следствия 4.2, на каждом из сегментов

$$[\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}], [\beta_2^{(i)}, \beta_3^{(i)}], \ldots, [\beta_i^{(i)}, \beta_{i+1}^{(i)}]$$

полином $T_n^{(i+1)}(x)$ будет иметь относительно функции $\Phi_j^{(i+1)}(x)$ еще по одному уклону, которые будут направлены соответственно вверх, вниз, вверх, вниз и т. д. и будут расположены в окрестностях некоторых

точек

$$x_2^{(i+1)} \in (\beta_1^{(i)},\ \beta_2^{(i)}),\ x_3^{(i+1)} \in (\beta_2^{(i)},\ \beta_3^{(i)}), \ldots, x_{i+1}^{(i+1)} \in (\beta_i^{(i)},\ \beta_{i+1}^{(i)}),$$

в которых полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(i+1)}$.

γ) В силу леммы 4.4, полином $T_n^{(i+1)}(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi_j^{i+1}(x)$ в промежутке $[\beta_{i+1}^{(i)},\ x_{i+2}^{(i+1)}] \subset [\beta_{i+1}^{(i)},\ x_{i+2}^{(i)}]$ уклон, имеющий, как легко видеть, направление, противоположное направлению уклона в окрестности точки $x_{i+1}^{(i+1)}$, и расположенный в окрестности той точки $x_{i+2}^{(i+1)} \in (\beta_{i+1}^{(i)},\ x_{i+2}^{(i+1)}]$, в которой полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(i+1)}$. Этот уклон определяется точками $\alpha_{i+2}^{(i+1)}$ и $\beta_{i+2}^{(i+1)}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$x_{i+1}^{(i+1)} \leqslant \alpha_{i+2}^{(i+1)} \leqslant \beta_{i+2}^{(i+1)} \leqslant x_{i+2}^{(i+1)}, \quad T_n^{(i+1)}(\beta_{i+2}^{(i+1)}) = \varphi^{(i+1)}(\beta_{i+2}^{(i+1)}).$$

δ) В силу теоремы Ролля, в промежутке $[x_{i+2}^{(i)},\ x_{2n+3}^{(i)}]$ существует по крайней мере $2n+1-i$ различных точек $x_{i+3}^{(i+1)} < x_{i+4}^{(i+1)} < \ldots < x_{2n+3}^{(i+1)}$, в каждой из которых полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию $\dfrac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}\, x^j$.

$2^{(i+1)}$. Из проведенного в п. $1^{(i+1)}$ анализа [см. α), β) и γ)] следует, что полином $T_n^{(i+1)}(x)$ имеет в промежутке $[x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi,\ x_{i+2}^{(i+1)}]$ $i+2$ уклона, расположенных в окрестностях точек

$$x_1^{(i+1)} < x_2^{(i+1)} < \ldots < x_{i+2}^{(i+1)},$$

причем точки $\alpha_l^{(i+1)}$ и $\beta_l^{(i+1)}$ $(l = 1, 2, \ldots, i+2)$, определяющие эти уклоны, можно, очевидно, взять так, чтобы выполнялись условия:

$$x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi \leqslant \alpha_1^{(i+1)} \leqslant \begin{matrix} x_1^{(i+1)} \\ \beta_1^{(i+1)} \end{matrix} \leqslant \alpha_2^{(i+1)} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \alpha_{i+1}^{(i+1)} \leqslant \begin{matrix} x_{i+1}^{(i+1)} \\ \beta_{i+1}^{(i+1)} \end{matrix} \leqslant \alpha_{i+2}^{(i+1)} < \beta_{i+2}^{(i+1)} < x_{i+2}^{(i+1)},$$

$$|T_n^{(i+1)}(\alpha_{i+2}^{(i+1)})| \geqslant |\varphi^{(i+1)}(x_{i+2}^{(i+1)})|, \quad T_n^{(i+1)}(\beta_{i+2}^{(i+1)}) = \varphi^{(i+1)}(\beta_{i+2}^{(i+1)}).$$

$3^{(i+1)}$. а) В системе $(4.14^{(i+1)})$ существует $\geqslant n-i-1$ точек, которые содержатся в промежутке $[x_{i+2}^{(i+1)},\ \tau)$ и в каждой из которых кривая $y = T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует кривую $y = (x^j)^{(i+1)}$. Все точки интерполяции находятся под кривой $y = |\varphi^{(i+1)}(x)|$.

б) Существует $\geqslant n-i$ точек, содержащихся в промежутке $(-\pi,\ x_{2n+3}^{(i+1)} - 2\pi]$, в каждой из которых полином $T_n^{(i+1)}(x)$ интерполирует функцию

$$\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}(x+2\pi)^j.$$

Все точки интерполяции находятся над кривой $y = |\Phi_j^{(i+1)}(x)|$.

Придавая i значения $1, 2, \ldots, n-2$, убедимся, что после $(n-1)$-кратного дифференцирования будет иметь место следующая картина:

$1^{(n-1)}$. Полином $T_n^{(n-1)}(x)$ интерполирует функцию $(x^j)^{(n-1)}$ по крайней

мерё в $2n+3$ точках

$$x_1^{(n-1)} < x_2^{(n-1)} < \ldots < x_{2n+3}^{(n-1)}, \quad x_{2n+3}^{(n-1)} < x_1^{(n-1)} + 2\pi, \qquad (4.14^{(n-1)})$$

и все эти точки различны.

$2^{(n-1)}$. В промежутке $[x_{2n+3}^{(n-1)} - 2\pi,\ x_n^{(n-1)}]$ полином $T_n^{(n-1)}(x)$ имеет по отношению к функции $\Phi_j^{(n-1)}(x)$ по крайней мере n уклонов, расположенных соответственно в окрестностях точек $x_1^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)}$.

$3^{(n-1)}$. а) В системе $(4.14^{(n-1)})$ существует по крайней мере одна точка, которая содержится в полуинтервале $[x_n^{(n-1)}, \tau)$ и в которой кривая $y = T_n^{(n-1)}(x)$ интерполирует кривую $y = (x^j)^{(n-1)}$. Эта точка интерполяции находится под кривой $y = |\varphi^{(n-1)}(x)|$.

б) Существует по крайней мере две точки, которые содержатся в промежутке $(-\pi,\ x_{2n+3}^{(n-1)} - 2\pi]$ и в каждой из которых кривая $y = T_n^{(n-1)}(x)$ интерполирует кривую $y = [(x+2\pi)^j]^{(n-1)}$. Эти точки интерполяции находятся над кривой $y = |\Phi_j^{(n-1)}(x)|$.

При следующем дифференцировании мы получим полином $T_n^{(n)}(x)$ со свойствами:

$1^{(n)}$. Полином $T_n^{(n)}(x)$ имеет с функцией $(x^j)^{(n)}$ по крайней мере $2n+3$ общие точки

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{2n+3}^{(n)}, \quad x_{2n+3}^{(n)} < x_1^{(n)} + 2\pi, \qquad (1.14^{(n)})$$

и все эти точки различны.

$2^{(n)}$. В том случае, когда последний уклон полинома $T_n^{(n-1)}(x)$ в промежутке $[x_{2n+3}^{(n-1)} - 2\pi,\ x_n^{(n-1)}]$ является уклоном вниз, полином $T_n^{(n)}(x)$, в силу лемм 4.3 и 4.4 и следствия из леммы 4.2, будет иметь в промежутке $[x_{2n+3}^{(n)} - 2\pi,\ x_{n+1}^{(n)}]$ по отношению к функции $\Phi_j^{(n)}(x)$ $n+1$ уклон. Эти уклоны будут расположены соответственно в окрестностях точек $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{n+1}^{(n)}$, причем последний из них будет уклоном вверх. Если же последний уклон полинома $T_n^{(n-1)}(x)$ в промежутке $[x_{2n+3}^{(n-1)} - 2\pi,\ x_n^{(n-1)}]$ является уклоном вверх, то тогда лемму 4.4 мы применять, вообще говоря, не можем. В этом случае, пользуясь леммой 4.3 и следствием из леммы 4.2, найдем, что полином $T_n^{(n)}(x)$ будет иметь в промежутке $[x_{2n+3}^{(n)} - 2\pi,\ x_n^{(n)}]$ n уклонов *, расположенных соответственно в окрестностях точек $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. При этом последний из этих уклонов будет (в силу следствия из леммы 4.2) опять уклоном вверх.

В дальнейшем мы будем считать, что в промежутке $[x_1^{(n)},\ x_{2n+3}^{(n)}]$, полином $T_n^{(n)}(x)$ имеет с функцией $y = (x^j)^{(n)}$ в точности $2n+3$ общие точки и что все эти точки являются различными, ибо если бы таких точек было $\geqslant 2n+4$, то, учитывая, что $x_{2n+3}^{(n)} > \pi$, и повторяя рассуждения, проведенные в самом начале доказательства теоремы для случая $j \leqslant 2n-1$, мы легко обнаружили бы, что полином $T_n^{(n)}(x)$ в некотором промежутке $(b-2\pi,\ b]$, $b > \pi$, имел бы с функцией $y = (x^j)^{(n)}$ по крайней мере $2n+5$ общих точек и поэтому, в силу леммы 4.6, полином $T_n(x)$

* Из следствия леммы 4.2 вытекает, что последний из этих уклонов расположен на сегменте $[\beta_{n-1}^{(n-1)},\ \beta_n^{(n-1)}]$, а не на сегменте $[\beta_{n-1}^{(n-1)},\ x_n^{(n)}]$. Однако в силу рассуждений, проведенных на стр. 202 [см. случаи α) — δ)], правую точку $\beta_n^{(n)}$, определяющую этот уклон, можно считать удовлетворяющей условию $\beta_n^{(n)} \leqslant x_n^{(n)}$.

имел бы порядок не ниже $\left[\frac{1}{2}(2n+5-3)\right]=n+1$, т. е. мы бы пришли к противоречию.

Таким образом, после n дифференцирований мы получаем следующую картину.

(1) Полином $T_n^{(n)}(x)$ имеет с функцией $(x^j)^{(n)}$ в точности $2n+3$ общие точки, содержащиеся в системе $(4.14^{(n)})$, и все эти точки различны.

(2) Полином $T_n^{(n)}(x)$ имеет в промежутке $[x_{2n+3}^{(n)}-2\pi,\ x_{n^*}^{(n)}]$ по крайней мере n^* уклонов, расположенных, соответственно, в окрестностях точек $x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_{n^*}^{(n)}$ ($n^*=n$ или же $n^*=n+1$), причем последний из них является уклоном вверх.

Отметим, что из приведенных до сих пор рассуждений следует, что если бы число j удовлетворяло условию

$$j \leqslant n+2, \tag{4.16}$$

то после $j-2\leqslant n$ дифференцирований мы получили бы полином $T^{(j-2)}(x)$, который имел бы с функцией $(x^j)^{j-2}=\frac{1}{2}j!\,x^2$ по крайней мере $2n+3$ общих значения (различных) и поэтому, в силу замечания к лемме 4.1, полином $T_n(x)$ должен был бы иметь порядок не ниже

$$\left[\frac{1}{2}(2n+3-1)\right]=n+1,$$

т. е. мы сразу пришли бы к противоречию. Поэтому для случая $j\leqslant n+2$ теорема доказана.

Если же

$$j > n+2, \tag{4.16'}$$

то, дифференцируя полином $T_n^{(n)}(x)$, мы получим полином $T_n^{(n+1)}(x)$ со свойствами:

$1^{(n+1)}$. Полином $T_n^{(n+1)}(x)$ имеет с функцией $y=(x^j)^{(n+1)}$ $2n+2$ или $2n+3$ общие точки *

$$x_1^{(n+1)}<x_2^{(n+1)}<\ldots<x_\nu^{(n+1)}\quad (\nu=2n+2 \text{ или } 2n+3).$$

$2^{(n+1)}$. Полином $T_n^{(n+1)}(x)$ имеет в промежутке $(x_\nu^{(n+1)}-2\pi,\ x_1^{(n+1)}]$ два корня $r_1^{(n+1)}$ и $r_2^{(n+1)}$, $r_1^{(n+1)}<r_2^{(n+1)}$, или же один корень $r_1^{(n+1)}$, причем сумма числа $N_1^{(n+1)}$ точек $x_i^{(n+1)}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu)$ и числа $N_2^{(n+1)}$ корней $r_1^{(n+1)}$ и $r_2^{(n+1)}$ (или же только $r_1^{(n+1)}$) будет равна в обоих случаях $2n+4$ (в самом деле, из геометрических соображений легко усмотреть, что указанная сумма всегда ** является числом четным и, следовательно, $\geqslant 2n+4$; с другой стороны, из предположения, что эта сумма $>2n+4$, в силу леммы 4.6, вытекало бы, что полином $T_n(x)$ имел бы порядок не ниже $n+1$ и мы немедленно пришли бы к противоречию).

---

* Нетрудно было бы убедиться, что общих точек будет $2n+2$, если число $j-n-1$ (т. е. показатель степени у функции $y=(x^j)^{(n+1)}$) является четным, или же если число $j-n-1$ нечетно и, в то же время, $x_1^{(n+1)}\geqslant 0$; общих точек будет $2n+3$, если число $j-n-1$ нечетно и, в то же время, $x_1^{(n+1)}<0$.

** За исключением, быть может, случая, когда $x_1^{(n+1)}=0$ и $T_n^{(n+2)}(x_1^{(n+2)})=T_n^{(n+1)}(x_1^{(n+1)})=0$. В этом случае рассматриваемая сумма, очевидно, $\geqslant 2n+5$.

$3^{(n+1)}$. Полином $T_n^{(n+1)}(x)$, в силу следствия к лемме 4.2, имеет в промежутке $(r_1^{(n+1)}, x_{n^*-1}^{(n+1)}]$* по отношению к функции $\Phi_j^{(n+1)}(x)$ по крайней мере n^*-1 уклонов, расположенных, в случае, когда $x_1^{(n+1)} > x_1^{(n)}$, в окрестностях точек $x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_{n^*-1}^{(n+1)}$ (или же, в случае, когда $x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)}$, полином $T_n^{(n+1)}(x)$ имеет в промежутке $(r_1^{(n+1)}, x_{n^*}^{(n+1)}]$ n^*-1 уклонов, расположенных в окрестностях точек $x_2^{(n+1)}, x_3^{(n+1)}, \ldots, x_{n^*}^{(n+1)}$), причем последний из этих уклонов является уклоном вверх.

Мы будем считать, для определенности, что эти уклоны расположены в окрестностях точек $x_1^{(n+1)}, \ldots, x_{n^*-1}^{(n+1)}$, ибо в противном случае рассуждения были бы аналогичными. Продолжая дальше последовательно дифференцировать полином $T_n(x)$, мы, в силу леммы 4.5, придем к одной и только к одной из следующих двух возможностей.

Первая возможность состоит в том, что после некоторого числа шагов, равного μ ($\mu \leqslant j-2$), мы получим полином $T_n^{(\mu)}(x)$, для которого сумма числа $N_1^{(\mu)}+1-1^*$ точек

$$x_{1^*}^{(\mu)} \leqslant x_{1^*+1}^{(\mu)} \leqslant \ldots \leqslant x_{N_1^{(\mu)}}^{(\mu)}, \quad x_{N_1^{(\mu)}}^{(\mu)} < x_{1^*}^{(\mu)} + 2\pi \quad (1^* = 1 \text{ или } 2), \tag{*}$$

в которых полином $T_n^{(\mu)}(x)$ интерполирует функцию $y=(x^j)^{(\mu)}$, и числа $N_2^{(\mu)}$ корней

$$r_1^{(\mu)} \leqslant r_2^{(\mu)} \leqslant \ldots \leqslant r_{N_2^{(\mu)}}^{(\mu)}, \quad r_1^{(\mu)} > x_{N_1^{(\mu)}}^{(\mu)} - 2\pi, \quad r_{N_2^{(\mu)}}^{(\mu)} \leqslant x_{1^*}^{(\mu)} \tag{**}$$

полинома $T_n^{(\mu)}(x)$, расположенных в промежутке $(x_{N_1^{(\mu)}}^{(\mu)} - 2\pi,\ x_{1^*}^{(\mu)}]$, будет $\geqslant 2n+5$, и, таким образом, в силу леммы 4.6, полином $T_n^{(\mu)}(x)$, а следовательно, и $T_n(x)$ будет иметь порядок не ниже $n+1$, т. е. мы приходим к противоречию.

Вторая возможность заключается в том, что каждый раз будет $N_1^{(\mu)}+1-1^*+N_2^{(\mu)}=2n+4$, в соотношениях (*) и (**) будут иметь место строгие неравенства и, следовательно, мы будем вправе снова и снова применять лемму 4.5, вследствие чего после $j-2$ дифференцирований мы получим полином $T_n^{(j-2)}(x)$ со свойствами:

$1^{(j-2)}$. Полином $T_n^{(j-2)}(x)$ интерполирует функцию $y=\frac{1}{2}j!\ x^2$ в $\nu-(j-n-3)=\nu+n-j+3$ различных точках ($\nu=2n+2$ или $2n+3$)

$$x_1^{(j-2)} < x_2^{(j-2)} < \ldots < x_{\nu+n-j+3}^{(j-2)}, \quad x_{\nu+n-j+3}^{(j-2)} < x_1^{(j-2)} + 2\pi. \tag{4.14$^{(j-2)}$}$$

$2^{(j-2)}$. а) Если при $(j-2)$-м дифференцировании полинома $T_n(x)$ имеют место условия случая А или же второй части случая Б леммы 4.5, то полином $T_n^{(j-2)}(x)$ в промежутке $(x_{\nu+n-j+3}^{(j-2)}-2\pi,\ x_1^{(j-2)}]$ будет иметь

$$2n+4-(\nu+n-j+3)=j+n-\nu+1$$

корень.

б) Если при $(j-2)$-м дифференцировании полинома $T_n(x)$ имеют место условия первой части случая Б леммы 4.5, то полином $T_n^{(j-2)}(x)$ в промежутке $(x_{\nu+n-j+3}^{(j-2)}-2\pi,\ x_2^{(j-2)}]$ будет иметь

$$2n+4-(\nu+n-j+3)+1=j+n-\nu+2$$

корня.

* Сравни примечание на стр. 214.

$3^{(j-2)}$. Полином $T_n^{(j-2)}(x)$ в промежутке $(r^{(j-2)}_{N_2^{(j-2)}-1},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j+2})$ имеет по отношению к функции $\Phi_j^{(j-2)}(x)$ по крайней мере $n^*-1-(j-3-n)=$ $=n^*+n+2-j\geqslant 2$ уклона, которые будут расположены соответственно в окрестностях точек $x_1^{(j-2)}, \ldots, x^{(j-2)}_{n^*+n+2-j}$, причем последний из этих уклонов является уклоном вверх.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n^*+n-j}$ точки, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1 \leqslant x_1^{(j-2)} \leqslant \alpha_2 \leqslant x_2^{(j-2)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n^*+n-j} \leqslant x^{(j-2)}_{n^*+n-j},$$

$$\operatorname{sign} T_n^{(j-2)}(\alpha_1) = -\operatorname{sign} T_n^{(j-2)}(\alpha_2) = \ldots = (-1)^{n^*+n-j-1} \operatorname{sign} T_n^{(j-2)}(\alpha_{n^*+n-j}) \tag{4.17}$$

(такие точки, в силу определения уклонов, очевидно, найдутся).

Из соотношений (4.17) следует, что полином $T_n^{(j-2)}(x)$ имеет в промежутке $(x_1^{(j-2)},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j}) \supset (\alpha_2,\ \alpha_{n^*+n-j})$ по крайней мере $n^*+n-j-2$ корня, а в промежутке $(x_2^{(j-2)},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j+1}) \supset (\alpha_3, \alpha_{n^*+n-j+1})$ — по крайней мере $n^*+n-j-3$ корня. Отсюда, учитывая свойства $1^{(j-2)}$ — $3^{(j-2)}$ полинома $T_n^{(j-2)}(x)$, мы получаем следующие результаты:

a) Полином $T_n^{(j-2)}(x)$ интерполирует функцию $\frac{1}{2}j!\,x^2$ в

$$\nu+n-j+3-(n^*+n-j-1)=\nu-n^*+4$$

точках ($\nu=2n+2$ или $2n+3$, $n^*=n$ или $n^*=n+1$) из промежутка $[x^{(j-2)}_{n^*+n-j},\ x^{(j-2)}_{\nu+n-j+3}]$.

b) Полином $T_n^{(j-2)}(x)$ имеет в промежутке

$$(x^{(j-2)}_{\nu+n-j+3}-2\pi,\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j}] = (x^{(j-2)}_{\nu+n-j+3}-2\pi,\ x_1^{(j-2)}] + (x_1^{(j-2)},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j}] =$$
$$= (x^{(j-2)}_{\nu+n-j+3}-2\pi,\ x_2^{(j-2)}] + (x_2^{(j-2)},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j}]$$

по крайней мере $n^*+2n-\nu-1$ корней ($n^*+2n-\nu-1=(j+n-\nu+1)+$ $+(n^*+n-j-2)=(j+n-\nu+2)+(n^*+n-j-3)$).

c) Так как полином $T_n^{(j-2)}(x)$ в окрестности точки $x^{(j-2)}_{n^*+n-j+2}$ имеет уклон вверх, то найдется по крайней мере одна точка $\alpha \in (x^{(j-2)}_{n^*+n-j+1},$ $x^{(j-2)}_{n^*+n-j+2})$, в которой

$$T_n^{(j-2)}(\alpha) < -|\Phi_j^{(j-2)}(\alpha)| = -\frac{1}{2}j!\,x^2,$$

т. е. кривая $y=T_n^{(j-2)}(x)$ пересекает в интервале $(x^{(j-2)}_{n^*+n-j+1},\ x^{(j-2)}_{n^*+n-j+2})$ кривую $y=-\frac{1}{2}j!\,x^2$.

Из этих результатов, в силу леммы 4.1, следует, что полином $T_n^{(j-2)}(x)$, а следовательно, и полином $T_n(x)$, имеет порядок не ниже

$$\left[\frac{1}{2}((\nu-n^*+4)+(n^*+2n-\nu-1)-1)\right]=n+1,$$

т. е. мы и в случае $j>n+2$ приходим к противоречию. Этим теорема 4.1 для случая, когда $j\leqslant 2n-1$, полностью доказана.

II. Случай, когда $j\geqslant 2n$ (в данном случае, как это будет видно из доказательства, число j может быть как целым, так и дробным). Представим функцию x^j в виде

$$x^j=\frac{1}{2}\{[\pi+(x-\pi)]^j+[\pi-(x-\pi)]^j\}+\frac{1}{2}\{[\pi+(x-\pi)]^j-[\pi-(x-\pi)]^j\}$$

и обозначим через $T_1(x)$ и $T_2(x)$ тригонометрические полиномы порядков не выше n, которые интерполируют соответственно функции

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\{[\pi + (x-\pi)]^j - [\pi - (x-\pi)]^j\}$$

и

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\{[\pi + (x-\pi)]^j + [\pi - (x-\pi)]^j\}$$

в точках

$$x_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1 \text{ *}. \tag{4.18}$$

Так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются соответственно нечетной и четной относительно точки $x = \pi$, то, в силу теоремы 2.3 и замечания к ней, при всех $x \geqslant \pi$ будем иметь:

$$\operatorname{sign}[f_1(x) - T_1(x)] = \operatorname{sign}[f_2(x) - T_2(x)] = -\operatorname{sign}\sin(n+1)x$$

Поэтому если обозначить через $T_n(x)$ полином порядка $\leqslant n$, который интерполирует функцию $x^j = f_1(x) + f_2(x)$ в точках x_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, то получим:

$$T_n(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

и при всех $x \in [\pi, 2\pi]$

$$\operatorname{sign}[x^j - T_n(x)] = -\operatorname{sign}\sin(n+1)x.$$

Этим тождество (4.12) для всех $x \in [\pi, 2\pi]$ полностью доказано.

Доказательство этого тождества в случае, когда $x \in [0, \pi]$, будет значительно более сложным.

Пользуясь формулой (3.5), найдем:

$$x^j - T_n(x) = -\frac{t(x)}{t(0)} \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} [x^j - x_k^j] \frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}},$$

где

$$t(x) = \sin\frac{x-x_1}{2} \sin\frac{x-x_2}{2} \ldots \sin\frac{x-x_{2n+1}}{2},$$

$$x_k = \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n+1), \quad t(0) < 0,$$

$$\operatorname{sign}\left[-\frac{t(x)}{t(0)}\right] = -\operatorname{sign}\left[\frac{\sin(n+1)x}{\sin\frac{x}{2}}\right] = -\operatorname{sign}\sin(n+1)x.$$

Вследствие этого, для доказательства соотношения (4.12′) для значений $x \in [0, \pi]$ достаточно убедиться, что при всех $x \in [0, \pi]$ и $j \geqslant 2n$ будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} [x^j - x_k^j] \frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x-x_k}{2}} \geqslant 0, \tag{4.19}$$

или

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} A_k \geqslant 0, \quad x \in [0, \pi], \quad j \geqslant 2n, \tag{4.19′}$$

---

* Заметим, что для полинома $T_2(x)$ точка $x_{n+1} = \pi$ служит, очевидно, узлом четной кратности, а для полинома $T_1(x)$ — узлом нечетной кратности.

где

$$A_k = A_k(n;\ x) = \frac{x^j - x_k^j}{\sin\dfrac{x - x_k}{2}} \cdot \sin\frac{x_k}{2}\ (\geqslant 0), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1, \quad x \in [0, \pi]. \tag{4.20}$$

Докажем сначала справедливость неравенства (4.19′) для $n = 1$ и $n = 2$, а уже затем для $n \geqslant 3$.

1°. Пусть $n = 1$. В этом случае для слагаемых A_2 и A_3 из суммы

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} A_k = A_1 - A_2 + A_3, \quad x_k = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3), \quad j \geqslant 2, \tag{4.21}$$

имеют место следующие неравенства:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\pi^j - x^j}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^j - x^j} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\sin\frac{1}{2}(\pi - x)} \leqslant \frac{\pi^2}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{9} < 1 \tag{4.22′}$$

при всех $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\dfrac{\pi^j - x^j}{\pi - x}}{\dfrac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^j - x^j}{\frac{3\pi}{2} - x}} \cdot \sqrt{2}\ \frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\pi - x)}{\frac{1}{2}(\pi - x)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\dfrac{\pi^j - \left(\frac{3\pi}{4}\right)^j}{\frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^j - \left(\frac{\pi}{2}\right)^j}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sin\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}} < \frac{7}{8} \cdot \frac{1,415}{3} \cdot \frac{0,924}{0,382} < 1 \tag{4.22″}$$

при всех $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, ибо, во-первых, в силу того, что при всех $x \neq y$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^j - x^j}{y - x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^j - x^j}{y - x}\right) = \frac{1}{y - x}\left(\frac{y^j - x^j}{y - x} - jx^{j-1}\right) =$$
$$= \frac{j}{y - x}\{[x + \theta(y - x)]^{j-1} - x^{j-1}\} > 0 \quad (0 < \theta < 1),$$

отношение $\dfrac{y^j - x^j}{y - x}$ растет как при возрастании x, так и при возрастании y, и, во-вторых, при всех $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\left(\frac{\dfrac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t + \frac{\pi}{4}}}{\dfrac{\sin t}{t}}\right)' = \left(\frac{t\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin t}\right)' =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4}\, t\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\left[\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin t\right]^2} \cdot \left[\frac{\sin t}{t} \cdot \frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{t + \frac{\pi}{4}} - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\right] <$$

$$< \frac{\frac{\pi}{4} t \left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\left[\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\sin t\right]^2} \left[1\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{4}\pi}\right] = 0. \qquad (*)$$

Для дальнейшего нам потребуется неравенство

$$\frac{y^j - x^j}{y - x} \geqslant j\left(\frac{x+y}{2}\right)^{j-1}, \quad j \geqslant 2, \quad 0 \leqslant x < y. \qquad (4.23)$$

Чтобы убедиться в его справедливости, достаточно учесть, что в силу выпуклости функции $\eta = \xi^{j-1}$ $(\xi > 0,\ j \geqslant 2)$,

$$y^j - x^j = j\int_x^y \xi^{j-1}\,d\xi = j\int_x^{\frac{x+y}{2}} \xi^{j-1}\,d\xi + j\int_{\frac{x+y}{2}}^{y} \xi^{j-1}\,d\xi =$$

$$= j\int_0^{\frac{y-x}{2}} \left[\left(\frac{x+y}{2} - t\right)^{j-1} + \left(\frac{x+y}{2} + t\right)^{j-1}\right] dt \geqslant$$

$$\geqslant 2j \int_2^{\frac{y-x}{2}} \left(\frac{x+y}{2}\right)^{j-1} dt = j(y-x)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{j-1}$$

Из неравенств (4.23) и (*) найдем, что при всех $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\frac{\pi^j - x^j}{\pi - x}}{\frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^j - x^j}{\frac{3\pi}{2} - x}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}}{\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi - x)}{\frac{1}{2}(\pi - x)}} \leqslant \frac{j\pi^{j-1}}{j\left(\frac{9}{8}\pi\right)^{j-1}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}}{1} =$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^{j-1} \cdot \frac{4}{\pi} \leqslant \begin{cases} \frac{8}{9} \cdot \frac{4}{3{,}14} < \frac{8}{7}, & \text{если } 2 \leqslant j \leqslant 4, \\ \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot \frac{4}{3{,}14} < 1, & \text{если } j \geqslant 4, \end{cases} \qquad (4.22''')$$

и при всех $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ и $2 \leqslant j \leqslant 4$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{\pi^j - x^j}{\pi - x}}{\frac{x^j - \left(\frac{\pi}{2}\right)^j}{x - \frac{\pi}{2}}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}}{\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi - x)}{\frac{1}{2}(\pi - x)}} \leqslant \sqrt{2} \cdot \frac{j\pi^{j-1}}{j\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}}{2}\right)^{j-1}} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{8}}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left(\frac{8}{5}\right)^3 < 8. \qquad (4.22'''')$$

Из неравенств (4.22) следует, что при всех $x \in [0, \pi]$ и $j \geqslant 4$ $A_2 < A_3$, а при $2 \leqslant j \leqslant 4$ $A_2 < A_1 + A_3$; следовательно, при всех $x \in [0, \pi]$ и $j \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} A_k = A_1 - A_2 + A_3 > 0.$$

2°. Пусть $n=2$. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}A_k = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5, \tag{4.21'}$$

$$x_k = \frac{k\pi}{3} \quad (k=1, 2, \ldots, 5), \quad j \geqslant 4.$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)}\right)' = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)} > 0$$

при $x \in [0, \pi]$ и что

$$\frac{A_4}{A_5} = \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^j - x^j}{\left(\frac{5\pi}{3}\right)^j - x^j}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{6}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{3}-x\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}-x\right)},$$

получим следующие неравенства:

$$\frac{A_4}{A_5} \leqslant \frac{4^4}{5^4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{4}} < \frac{256}{625}\cdot 1{,}75\cdot\frac{0{,}97}{0{,}7} < 1, \tag{4.24'}$$

если $x \in \left[0, \pi - \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\frac{A_4}{A_5} \leqslant \frac{256-\left(3-\frac{1}{2}\right)^4}{625-\left(3-\frac{1}{2}\right)^4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 67{,}5^\circ}{\sin 37{,}5^\circ} < \frac{218}{587}\cdot 1{,}74\cdot\frac{0{,}924}{0{,}6} < 1, \tag{4.24''}$$

если $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{12}\right]$,

$$\frac{A_4}{A_5} \leqslant \frac{256-\left(3-\frac{1}{4}\right)^4}{625-\left(3-\frac{1}{4}\right)^4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 66^\circ}{\sin 36^\circ} < \frac{256-7{,}5^2}{625-7{,}5^2}\cdot 1{,}74\cdot\frac{0{,}92}{0{,}58} <$$

$$< \frac{200}{569}\cdot 0{,}03\cdot 92 < 1, \tag{4.24'''}$$

если $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{12}, \pi - \frac{\pi}{15}\right]$,

$$\frac{A_4}{A_5} \leqslant \frac{256-\left(3-\frac{1}{5}\right)^4}{625-\left(3-\frac{1}{5}\right)^4}\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 62{,}5^\circ}{\sin 32{,}5^\circ} < \frac{195}{564}\cdot 1{,}74\cdot\frac{0{,}89}{0{,}537} < 1, \tag{4.24''''}$$

если $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{15}, \pi - \frac{\pi}{36}\right]$,

$$\frac{A_4}{A_5} \leqslant \frac{256-\left(3-\frac{1}{12}\right)^4}{625-\left(3-\frac{1}{12}\right)^4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} < \frac{256-72}{625-72} \cdot 3 = \frac{552}{553} < 1, \qquad (4.24''''')$$

если $x \in \left[\pi - \frac{\pi}{36}, \pi\right]$.

Далее, принимая во внимание, что $\frac{\sin t}{t} = \cos \theta t$, $0 < \theta < 1$, найдем:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^j - x^j}{\pi^j - x^j} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi - x}{2}}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} < 1, \quad (4.25')$$

если $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\dfrac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^j - x^j}{\frac{2\pi}{3} - x}}{\dfrac{\pi^j - x^j}{\pi - x}} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{3}\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\pi - x)}{\frac{1}{2}(\pi - x)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}} < 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = 1, \qquad (4.25'')$$

если $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Из неравенств (4.24) и (4.25) следует, что, действительно, при всех $x \in [0, \pi]$ и $j \geqslant 4$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} A_k = A_1 + (A_3 - A_2) + (A_5 - A_4) \geqslant 0.$$

3°. Чтобы установить справедливость соотношения (4.19′) при $n \geqslant 3$, приведем сначала ряд нужных в дальнейшем неравенств:

1) При всех $x \in (0, x_k)$

$$\frac{x_k^j - x^j}{x_{k+1}^j - x^j} < \frac{x_k^j}{x_{k+1}^j} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^j}.$$

2) При $x \in (0, 2\pi)$, $x \neq x_k$,

$$\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x_k - x}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin^2\frac{x_k - x}{2}} > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n + 1.$$

3) При $x \in (0, 2\pi)$, $x \neq 2\pi - x_1$,

$$\left(\frac{\sin\frac{x - x_1}{2}}{\sin\frac{x + x_1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x_1}{\sin^2\frac{x + x_1}{2}} > 0.$$

4) Вследствие (3.9′) и 1), при всех $x \in (0, x_k)$ имеем:

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{x_k^j - x^j}{x_{k+1}^j - x^j} \cdot \frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x_{k+1}-x}{2}}{\sin\frac{x_k-x}{2}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^j}\left(1+\frac{\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}}{2}\cdot\sin\frac{x_k-x}{2}}\right).$$

5′) Из 4), в силу 2) и 3), для всех $k = 1, 2, \ldots, n+1$ и $x \in [0, x_k]$ следует:

$$\frac{A_{k+1}}{A_{k+2}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^j}\left(1+\frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_{k+2}}{2}}\right) \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{2n}}\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi+x_2}{2}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{\left(\frac{6}{5}\right)^6} < \frac{5}{6}. \tag{4.26′}$$

5″) В силу равенства

$$\left(\sin\frac{t+x_1}{2}\sin\frac{t-\pi}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sin\left(t-\frac{\pi-x_1}{2}\right),$$

функция $\sin\frac{t+x_1}{2}\sin\frac{t-\pi}{2}$ может в промежутке $[\pi, 2\pi]$ достигать наименьшего значения только на концах. Поэтому из 4) следует, что при $k = n+2, n+3, \ldots, 2n-1$ (так что $\pi + x_1 \leqslant x_k \leqslant 2\pi - x_3$) и $x \in [0, \pi]$

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^j}\left(1+\frac{\sin\frac{x_1}{2}}{\sin\frac{x_k+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_k-\pi}{2}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}}\left[1+\frac{\sin\frac{x_1}{2}}{\min\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)\sin\frac{x_1}{2};\ \sin x_1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x_3}{2}\right)\right\}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\min\left\{\cos x_1;\ 2\cos\frac{x_1}{2}\cdot\cos\frac{x_3}{2}\right\}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\min\left\{\cos\frac{\pi}{4};\ 2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}\right\}}\right) = \frac{1+\sqrt{2}}{e} < \frac{9}{10}. \tag{4.26″}$$

5) Объединяя (4.26′) и (4.26″), найдем, что при всех $x \in [0, x_k] \cap [0, \pi]$

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} < \frac{9}{10}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, 2n-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{4.26‴}$$

6′) Если $x \in \left(x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{5}x_1\right)$ и $k \leqslant n+1$ (так что $x_k \leqslant \pi$), то в силу неравенства

$$\frac{d}{dk}\left\{k\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5k}\right)^j\right]\right\} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5k}\right)^j - \frac{j}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{j-1} - \frac{4j}{5k}\left(1-\frac{4}{5k}\right)^{1-j} < 0$$

получим:

$$\frac{x_{k+1}^j - x^j}{x_{k+1} - x} \geqslant \frac{\left(\frac{k+1}{n+1}\pi\right)^j - \left(\frac{k-1+\frac{1}{5}}{n+1}\pi\right)^j}{\frac{k+1}{n+1}\pi - \frac{k-1}{n+1}\pi} =$$

$$= \left(\frac{k\pi}{n+1}\right)^{j-1} \cdot \frac{k}{2}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5k}\right)^j\right] \geqslant$$

$$\geqslant jx_k^{j-1} \cdot \frac{n+1}{2j}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)^j\right],$$

и так как при $j \geqslant 2n$ и $n \geqslant 3$

$$\frac{d}{dj}\left\{\frac{1}{j}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)^j\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{j^2}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^j - \left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)^j\right] +$$

$$+\frac{1}{j}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^j \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - \left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)^j \ln\left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)\right] > 0,$$

то

$$\frac{x_{k+1}^j - x^j}{x_{k+1} - x} \geqslant jx_k^{j-1} \cdot \frac{n+1}{4n}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1-\frac{4}{5(n+1)}\right)^{2n}\right] > \frac{10}{9} jx_k^{j-1} \;*.$$

Учитывая, кроме того, что $\frac{\sin t}{t}\downarrow$ и $\frac{\sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t+x_1}{2}}\uparrow$ при $t \in (0, \pi)$, для всех $x \in \left(x_{k-1}, x_{k-1} + \frac{1}{5}x_1\right)$ и $k = 1, 2, \ldots, n+1$ найдем:

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{\frac{x_k^j - x^j}{x_k - x}}{\frac{x_{k+1}^j - x^j}{x_{k+1} - x}} \cdot \frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{1}{2}(x_{k+1}-x)}{\frac{1}{2}(x_{k+1}-x)}}{\frac{\sin\frac{1}{2}(x_k - x)}{\frac{1}{2}(x_k - x)}} \leqslant jx_k^{j-1} \cdot \frac{9}{10\, jx_k^{j-1}} \cdot \frac{\sin\frac{x_k}{2}}{\sin\frac{x_{k+1}}{2}} \cdot 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} < 1. \qquad (4.27')$$

6″) Если $x \in \left(x_{k-1} + \frac{x_1}{5}, x_k\right)$ и $k \leqslant n+1$, то, принимая во внимание (4.23), получим:

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} \leqslant \frac{k}{j\left(\frac{x_{k+1}+x}{2}\right)^{j-1}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} \cdot 1 \leqslant \left(\frac{2k}{2k+\frac{1}{5}}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{0{,}9} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{10}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{10(n+1)}}\right)^{2n-1} \leqslant \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{2n-1}{10(n+1)}} < \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{8}} < 1. \qquad (4.27'')$$

---

* При $n \geqslant 6$ даже $\frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{4}{5(n+1)}\right)^{2n}\right] > \frac{10}{9}$.

7) Если $x \in [x_k, x_{k+1}]$ и $k \leqslant n$, то

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{\dfrac{x^j - x_k^j}{x - x_k}}{\dfrac{x_{k+1}^j - x^j}{x_{k+1} - x}} \cdot \frac{\sin\dfrac{x_k}{2}}{\sin\dfrac{x_{k+1}}{2}} \cdot \frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x_{k+1}-x)}{\frac{1}{2}(x_{k+1}-x)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}{\frac{1}{2}(x-x_k)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{jx^{j-1}}{jx^{j-1}} \cdot \frac{\sin\dfrac{x_k}{2}}{\sin\dfrac{x_{k+1}}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\dfrac{x_1}{2}} \leqslant \frac{\cos\dfrac{x_1}{2}}{\cos\dfrac{x_1}{2}} = 1. \qquad (4.28)$$

8) В случае $x \in [x_n, x_{n+1}]$ нам потребуются неравенства:

а) $$\frac{d}{dn}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{3\pi}{2(n+1)}}\right) = \frac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2(n+1)}}\left[-\frac{\pi}{(n+1)^2}\cdot\sin\frac{3\pi}{2(n+1)}\cos\frac{\pi}{n+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\sin\frac{\pi}{n+1}\cos\frac{3\pi}{2(n+1)}\right] = -\frac{\pi}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2(n+1)}}\left[\sin\frac{\pi}{2(n+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2(n+1)}\right] < 0, \quad n \geqslant 3;$$

б) так как при $\frac{1}{2}(x - x_3) = t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(\frac{\dfrac{\sin t}{t}}{\dfrac{\sin\left(t + \frac{x_1}{2}\right)}{t + \frac{x_1}{2}}}\right)' = \left(\frac{\left(t + \frac{x_1}{2}\right)\sin t}{t\sin\left(t + \frac{x_1}{2}\right)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\left[t\sin\left(t+\frac{x_1}{2}\right)\right]^2}\cdot\frac{x_1}{2}\cdot t\cdot\left(t+\frac{x_1}{2}\right)\left[\frac{\sin\frac{x_1}{2}}{\frac{x_1}{2}} - \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin\left(t+\frac{x_1}{2}\right)}{t+\frac{x_1}{2}}\right] > 0,$$

то при $x \in [x_n, x_{n+1}]$

$$\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-x_3)}{\frac{1}{2}(x-x_3)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x-x_2)}{\frac{1}{2}(x-x_2)}} \leqslant \frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}x_{n-2}}{\frac{1}{2}x_{n-2}}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}x_{n-1}}{\frac{1}{2}x_{n-1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\frac{x_1}{2}} < \sqrt{2}, & \text{если } n = 3, \\[2ex] \dfrac{\sin x_1}{\sin\frac{1}{2}x_3}\cdot\dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{\sin 36^\circ}{\sin 54^\circ}\,\dfrac{3}{2} < \dfrac{0{,}6}{0{,}8}\cdot\dfrac{3}{2} < \sqrt{2}, & \text{если } n = 4, \\[2ex] \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \dfrac{n-1}{n-2} \leqslant \dfrac{4}{3} < \sqrt{2}, & \text{если } n \geqslant 5. \end{cases}$$

В силу этих неравенств, для всех $x \in [x_n, x_{n+1}]$ получим:

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{\dfrac{x - x^2}{x - x_2}}{\dfrac{x^j - x_3^j}{x - x_3}} \cdot \frac{\sin\dfrac{x_2}{2}}{\sin\dfrac{x_3}{2}} \cdot \frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x - x_3)}{\frac{1}{2}(x - x_3)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(x - x_2)}{\frac{1}{2}(x - x_2)}} \leqslant 1 \cdot \frac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin\dfrac{3\pi}{8}} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{8}} < \frac{10}{9}. \quad (4.29)$$

9) При всех $x \in [0, \pi]$

$$\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^j}\left(1 + \frac{\sin\frac{x_1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x_{2n+1}}{2}\sin\frac{x_{2n} - x}{2}}\right) \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2} + x_1\right)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos x_1}\right) \leqslant \left(\frac{6}{7}\right)^6 (1 + \sqrt{2}) < \frac{49}{50}. \quad (4.30)$$

10) Если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, где k — четное число, удовлетворяющее условию

$$4 \leqslant k \leqslant n + 1, \quad n \geqslant 4$$

(так что $[x_{k-1}, x_k] \subset [x_1, \pi]$), то при каждом натуральном i, которое удовлетворяет условию

$$1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{k-1}{2}\right] = \frac{k}{2} - 1$$

$\left(\text{так что } x_i \leqslant \dfrac{\frac{k}{2} - 1}{n + 1}\pi \leqslant \dfrac{n-1}{2(n+1)}\pi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n+1}\right)$, будем иметь:

$$\frac{A_{k-2i}}{A_{k+2i+1}} < \frac{1}{10}, \quad (4.31)$$

а при $n = 3$ и $k = 4$

$$\frac{A_2}{A_7} < \frac{1}{5}. \quad (4.31')$$

Действительно, так как при $2i + 1 < k \leqslant n + 1$

$$\frac{d}{dx_k}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(x_k - x_{2i})}{\sin\frac{1}{2}(x_k + x_{2i+1})}\right) > 0,$$

то

$$\frac{A_{k-2i}}{A_{k+2i+1}} = \frac{x^j - (x_{k-2i})^j}{x_{k+2i+1}^j - x^j} \cdot \frac{\sin\frac{x_{k-2i}}{2}}{\sin\frac{x_{k+2i+1}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(x_{k+2i+1} - x)}{\sin\frac{1}{2}(x - x_{k-2i})} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k^j}{(k + 2i + 1)^j - k^j} \frac{\cos x_i}{\cos\frac{x_{2i+1}}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x_{k+2i+1} - x}{2}}{\sin\frac{x - x_{k-2i}}{2}}.$$

Отсюда следует, что если $i \geqslant 2$, то, в силу неравенства

$$\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\cos x_i}{\cos\left(x_i + \frac{x_1}{2}\right)}\right) > 0$$

и неравенства

$$\frac{\sin x}{\sin y} < \frac{x}{y} \text{ при } 0 < y < x < \pi \tag{4.32}$$

имеем:

$$\frac{A_{k-2i}}{A_{k+2i+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{2n}-1} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{2(n+1)}\right)} \cdot \frac{(x_k-x)+x_{2i+1}}{x_{2i}-(x_k-x)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{5}{4}\right)^6-1} \cdot 2 \cdot \frac{2i+2}{2i-1} < \frac{1}{124} \cdot 4 < \frac{1}{10}.$$

Если же $i=1$, то

$$\frac{A_{k-2i}}{A_{k+2i+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{3}{k}\right)^j-1} \; \frac{\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}+2x_1-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x_{k-1}}{2}+2x_1\right)-\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}-\frac{x}{2}\right)},$$

и так как при $x \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}+2x_1-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x_{k-1}}{2}+2x_1\right)-\sin\left(\frac{x_{k+1}}{2}-\frac{x}{2}\right)}\right\} < 0,$$

то, принимая во внимание четность числа k, получим:

$$\frac{A_{k-2i}}{A_{k+2i+1}} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{3}{k}\right)^j-1} \; \frac{\sin 3x_1+\sin x_1}{\sin 2x_1-\sin x_1} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\left(\frac{7}{4}\right)^6-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} < \dfrac{1}{26} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} < \dfrac{1}{5} & \text{при } n=3,\ k=4, \\ \dfrac{1}{\left(1+\frac{3}{4}\right)^8-1} \dfrac{4\sin x_1}{\sin x_1(2\cos x_1-1)} < \dfrac{4}{80} \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{5}-1} < \dfrac{1}{10} & \text{при } n=4, \\ \dfrac{1}{\left(1+\frac{3}{6}\right)^{10}-1} \cdot \dfrac{4}{2\cos\frac{\pi}{6}-1} < \dfrac{1}{56} \cdot \dfrac{4}{0{,}72} < \dfrac{1}{10} & \text{при } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Этим неравенства (4.31) и (4.31′) полностью доказаны.

11) Если $x \in [x_{k-1}, x_k]$, где k — нечетное число, удовлетворяющее условию

$$5 \leqslant k \leqslant n+1, \quad n \geqslant 4 \tag{4.33}$$

(так что $[x_{k-1}, x_k] \subset [0, \pi]$), то при каждом натуральном i, которое удовлетворяет условию

$$1 \leqslant i \leqslant \left[\frac{k-2}{2}\right] = \frac{k-3}{2}$$

$\left(\text{так что } x_i \leqslant \frac{n+1-3}{2(n+1)}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2(n+1)}\right)$, будем иметь:

$$\frac{A_{k-2i-1}}{A_{k+2i}} < \frac{1}{10}. \tag{4.34}$$

Действительно,

$$\frac{A_{k-2i-1}}{A_{k+2i}}=\frac{x^j-x^j_{k-2i-1}}{x^j_{k+2i}-x^j}\frac{\sin\frac{x_{k-2i-1}}{2}}{\sin\frac{x_{k+2i}}{2}}\frac{\sin\frac{x_{k+2i}-x}{2}}{\sin\frac{x-x_{k-2i-1}}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{k^j}{(k+2i)^j-k^j}\cdot\frac{\sin\frac{x_{k-2i-1}}{2}}{\sin\frac{x_{k+2i}}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x_{k+2i}-x}{2}}{\sin\frac{x-x_{k-2i-1}}{2}}.$$

Поэтому если $i\geqslant 2$, то, принимая во внимание (4.32), найдем:

$$\frac{A_{k-2i-1}}{A_{k+2i}}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{4}{k}\right)^j-1}\cdot 1\cdot\max\left\{1;\frac{x_{2i}+(x_k-x)}{x_{2i}+(x-x_{k-1})}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{4}{5}\right)^8-1}\cdot\frac{3}{2}<\frac{1}{10}.$$

Если же $i=1$, то при $n=4$ (и, следовательно, при $k=5$ и $x_5=\pi$) получим:

$$\frac{A_{k-2i-1}}{A_{k+2i}}=\frac{A_{k-3}}{A_{k+2}}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^8-1}\cdot\frac{\sin x_1}{\sin\frac{x_3}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x_3}{2}}{\sin x_1}<\frac{1}{10},$$

а при $n\geqslant 5$, в силу (4.32), будем иметь:

$$\frac{A_{k-2i-1}}{A_{k+2i}}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{2n}-1}\cdot\max\left\{1;\frac{x_{2i}+(x_k-x)}{x_{2i}+(x-x_{k-1})}\right\}\leqslant\frac{1}{\left(1+\frac{2}{6}\right)^{10}-1}\cdot\frac{3}{2}<\frac{1}{10},$$

и неравенство (4.34) полностью доказано.

Докажем теперь неравенство (4.19′).

Если $x\in(x_{k-1},x_k)=\left(\frac{k-1}{n+1}\pi,\ \frac{k}{n+1}\pi\right)$ и $k=1$, 2 или 3, то при любом натуральном $n\geqslant 3$ мы, вследствие положительности величин A_i $(i=1,2,\ldots,2n+1)$ и в силу (4.27′), (4.27″), (4.28), (4.26) и (4.30), получим:

$$\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}A_i=A_1+(A_3-A_2)+(A_5-A_4)+\ldots+(A_{2n+1}-A_{2n})\geqslant 0.$$

Если $n=3$ и $x\in(x_3,x_4)=(x_3,\pi)$, то, принимая во внимание положительность величин A_i, в силу (4.29), (4.27′), (4.27″), (4.30) и (4.31′), найдем:

$$\sum_{i=1}^{7}(-1)^{i-1}A_i=A_1-(A_2-A_3)+(A_5-A_4)+(A_7-A_6)\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{10}A_2+\frac{1}{50}A_7=\frac{1}{50}(A_7-5A_2)\geqslant 0.$$

Если $x\in(x_{k-1},x_k)$, где k — любое нечетное число, удовлетворяющее условию (4.33), то, принимая во внимание неравенства (4.28), (4.26)

и (4.30), при всех $n \geqslant 4$ получим:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots - A_{k-3} + A_{k-2} - A_{k-1} +$$

$$+ A_k - A_{k+1} + A_{k+2} - A_{k+3} + \ldots - A_{2n} + A_{2n+1} \geqslant - A_2 - A_4 - \ldots - A_{k-3} +$$

$$+ \frac{1}{10} A_{k+2} + \frac{1}{10} A_{k+4} + \ldots + \frac{1}{10} A_{2n-1}.$$

Отсюда, в силу (4.34), находим:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i \geqslant \sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}} \left(\frac{1}{10} A_{k+2i} - A_{k-2i-1} \right) \geqslant 0.$$

Если $x \in (x_{k-1}, x_k)$, где k — любое четное число $\geqslant 4$ и не превышающее n, $n \geqslant 4$, то, в силу неравенств (4.27′), (4.27″), (4.26) и (4.30), имеем:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots - A_{k-2} + A_{k-1} - A_k +$$

$$+ A_{k+1} - A_{k+2} + \ldots + A_{2n-1} - A_{2n} + A_{2n+1} \geqslant - A_2 - A_4 - \ldots - A_{k-2} +$$

$$+ \frac{1}{10} A_{k+3} + \frac{1}{10} A_{k+5} + \ldots + \frac{1}{10} A_{2n-1}.$$

В силу (4.31), отсюда следует:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i \geqslant \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \left(\frac{1}{10} A_{k+2i+1} - A_{k-2i} \right) \geqslant 0.$$

Наконец, если $k = n + 1$ является четным числом, то, в силу (4.29), (4.27′), (4.27″), (4.26) и (4.30), получим:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i \geqslant - \frac{1}{10} A_2 - A_4 - \ldots - A_{k-2} + \frac{1}{10} A_{k+3} +$$

$$+ \frac{1}{10} A_{k+5} + \ldots + \frac{1}{10} A_{2n-1} + \frac{1}{50} A_{2n+1}$$

и, вследствие (4.31),

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (-1)^{i-1} A_i \geqslant \sum_{i=1}^{\frac{k-4}{2}} \left(\frac{1}{10} A_{k+2i+1} - A_{k-2i} \right) +$$

$$+ \frac{1}{10} \left(\frac{1}{5} A_{n+1+2\cdot \frac{n-1}{2}+1} - A_{n+1-2\cdot \frac{n-1}{2}} \right) \geqslant 0.$$

Этим теорема 4.1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е. При сравнении между собой способов, при помощи которых доказывалась теорема 4.1 в случаях I и II, мы можем отметить следующее.

1. Способ, который был применен в случае I (т. е. когда $j \leqslant 2n - 1$), значительно менее «чувствителен» к изменению в расположении точек интерполяции x_k. Вследствие этого, при каждом фиксированном j и до-

статочно больших n этот способ после замены вспомогательной функции $\varphi(x) = (x + 2\pi)^j$ функцией вида $\varphi(x) = e^{-\alpha x+\beta}$ может быть применен также при интерполировании периодических интегралов от функций x^j. Кроме того, этот способ, очевидно, применим также при интерполировании функции x^j не только тригонометрическими, но и некоторыми другого рода периодическими полиномами. Недостаток способа заключается в том, что он применим только для случая целых значений j.

2. Способ, который был применен в случае II (т. е. когда $j \geqslant 2n$), как это было отмечено, полностью применим как при целых, так и при дробных значениях $j \geqslant 2n$. Поэтому следствием из результата, полученного для этого случая, является

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $K(x)$ есть аналитическая в интервале* $(0, 2\pi)$ *функция вида*

$$K(x) = \int_{2\nu}^{\infty} x^s \, d\sigma(s),$$

где ν — фиксированное натуральное число и $\sigma(s)$ — неубывающая в промежутке $[2\nu, \infty)$ функция с ограниченным изменением. Тогда при любом натуральном $n \geqslant \nu$ тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n, который интерполирует функцию $K(x)$ в точках $x_k = \frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$, *будет интерполировать эту функцию только в точках x_k, причем в каждой из этих точек разность $K(x) - T_n(x)$ будет менять знак таким образом, что*

$$\operatorname{sign}[K(x) - T_n(x)] = -\operatorname{sign}\sin(n+1)x, \quad x \in (0, 2\pi).$$

§ 5. О наилучшем тригонометрическом приближении в метрике L абсолютно монотонных функций, функций вида $\varphi(x) = \int_{2\pi}^{\infty} x^s \, d\sigma(s)$ и периодических интегралов s-го порядка $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ от функций классов $A_n^i(a)$ $(i = 1, 2;\ a \in [0, 2\pi])$ и функций, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3

Пользуясь результатами §§ 2 и 4, мы без труда получим ряд теорем, выражающих точную величину наилучшего приближения в метрике L для каждой отдельной функции, принадлежащей к классам функций, указанным в заглавии этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\varphi(x)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция, определенная рядом вида*

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, \quad x \in [0, 2\pi), \tag{5.1}$$

*где a_j — произвольные неотрицательные числа, определяющие ряд $\sum_0^{\infty} a_j x^j$ с радиусом сходимости $\geqslant 2\pi$ *, или же пусть $\varphi(x)$ — аналитическая*

---

* Т. е. пусть $\varphi(x)$ — произвольная абсолютно монотонная, суммируемая на $[0, 2\pi)$ функция.

и суммируемая в интервале $(0, 2\pi)$ *функция вида*

$$\varphi(x) = \int_{2n}^{\infty} x^s \, d\sigma(s), \tag{5.1'}$$

где $\sigma(s)$ — *не убывающая в промежутке* $[2n, \infty)$ *функция, и пусть* $T_n^*(x)$ — *тригонометрический полином порядка не выше* n, *который интерполирует функцию* $\varphi(x)$ *в точках* $x_k = \frac{k\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n+1)$. *Тогда среди всевозможных тригонометрических полиномов* $T_n(x)$ *порядка* $\leqslant n$ *полином* $T_n^*(x)$ *является полиномом наилучшего приближения функции* $\varphi(x)$ *в метрике* L, *причем если* $\varphi(x)$ *есть функция вида* (5.1), *то*

$$E_n(\varphi)_L = \inf_{T_n} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - T_n(x)| \, dx = \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - T_n^*(x)| \, dx =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \varphi(x) \operatorname{sign} \sin(n+1) x \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{j+1} \left[(2n+2)^{j+1} - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^{j+1}\right], \tag{5.2}$$

и если $\varphi(x)$ *есть функция вида* (5.1′), *то*

$$E_n(\varphi)_L = \inf_{T_n} \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - T_n(x)| \, dx = \int_0^{2\pi} |\varphi(x) - T_n^*(x)| \, dx =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \varphi(x) \operatorname{sign} \sin(n+1) x \, dx =$$

$$= \int_{2n}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{s+1} \left[(2n+2)^{s+1} - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^{s+1}\right] \frac{d\sigma(s)}{s+1}. \tag{5.2'}$$

Доказательство. Так как в силу теорем 4.1 и 4.2 разность $\varphi(x) - T_n^*(x)$ меняет знак в точках, являющихся нулями функции $\sin(n+1)x$, и только в этих точках, то утверждение теоремы 5.1 немедленно вытекает из теоремы А. А. Маркова [см. ([6]), стр. 96].

В 1938 г. М. Г. Крейн показал [см. ([8])], что если некоторая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(x)$ является непрерывной на сегменте $[0, 2\pi]$,

2) $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$,

3) при каком-нибудь фиксированном натуральном n каждое уравнение вида

$$\varphi(x) - T_{n-1}(x) = 0 \tag{*}$$

имеет в полуинтервале $[0, 2\pi)$ не больше чем $2n$ корней *, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию А. А. Маркова [см. ([6]), стр. 96—99] и, следовательно, для этой функции без труда находится точное значение величины $E_n(\varphi)_L$.

В нижеследующей теореме 5.2 мы получаем обобщение этого резуль-

* В работе М. Г. Крейна это условие сформулировано несколько иначе

тата на функции $\varphi(x)$, которые удовлетворяют условиям:

1) $\varphi(x)$ является непрерывной в интервале $(0, 2\pi)$,

2) в концах интервала $(0, 2\pi)$ функция $\varphi(x)$ имеет конечные или бесконечные пределы $\varphi(0+0)$ и $\varphi(2\pi-0)$,

3) каждое уравнение вида (*) имеет в интервале $(0, 2\pi)$ не больше чем $2n$ корней.

Значение этого обобщения становится ясным, если учесть, что такие простые функции, как, например, $\varphi(x)=(x-a)^2$ при $a \neq \pi$ или $\varphi(x)=e^{ax}$, $a>0$, удовлетворяют условиям теоремы 5.2 и в то же время не удовлетворяют приведенным выше условиям М. Г. Крейна.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная суммируемая на $(0, 2\pi)$ функция, имеющая у концов промежутка $(0, 2\pi)$ конечные или бесконечные пределы $\varphi(0+0)$ и $\varphi(2\pi-0)$ и обладающая тем свойством, что всякое уравнение вида $\varphi(x)-T_n(x)=0$, где $T_n(x)$ — тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, может иметь в промежутке $(0, 2\pi)$ с учетом кратностей не больше чем $2n+2$ корня, и пусть*

$$\psi(\xi)=\varphi(x_{2n+1}+\xi)-\varphi(x_{2n}+\xi)+\ldots-\varphi(x_2+\xi)+\varphi(x_1+\xi), \quad (5.3)$$

где $x_k=\frac{k\pi}{n+1}$, $k=1, 2, \ldots, 2n+1$, $\xi \in \left(-\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n+1}\right)$. *Тогда*

1) *Если*

$$\psi(0)<\min\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\} \quad \text{или} \quad \psi(0)>\max\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\}, \quad (5.4)$$

то найдется единственная точка $\xi_0 \in (0, x_1)=\left(0, \frac{\pi}{n+1}\right)$ *такая, что*

$$\varphi(x_{2n+1}+\xi_0)-\varphi(x_{2n}+\xi_0)+\ldots$$
$$\ldots-\varphi(x_2+\xi_0)+\varphi(x_1+\xi_0)-\varphi(\xi_0)=\psi(\xi_0)-\varphi(\xi_0)=0. \quad (5.5)$$

2) *Среди тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$ полиномом наилучшего приближения функции $\varphi(x)$ в метрике L является тот полином $T_n^*(x)$, который интерполирует функцию $\varphi(x)$ в точках*

$$\xi_0, \xi_0+x_1, \xi_0+x_2, \ldots, \xi_0+x_{2n},$$

где ξ_0 служит корнем уравнения (5.5), *если выполнено условие* (5.4), *и* $\xi_0=\frac{\pi}{n+1}$, *если*

$$\min\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\} \leqslant \psi(0) \leqslant \max\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\}; \quad (5.4')$$

при этом

$$E_n(\varphi)_L=\int_0^{2\pi}|\varphi(x)-T_n^*(x)|\,dx=\left|\int_0^{2\pi}\varphi(x)\operatorname{sign}\sin[(n+1)(x-\xi_0)]\,dx\right|. \quad (5.6)$$

3) *Если выполнено условие* (5.4) *и*

$$\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

то число ξ_0 *будет служить корнем уравнения*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{a_{(n+1)(2j+1)} \cos[(n+1)(2j+1)\xi] + b_{(n+1)(2j+1)} \sin[(n+1)(2j+1)\xi]\} = 0. \quad (5.7)$$

Доказательство. Если имеет место одно из неравенств (5.4), то существование точки $\xi_0 \in (0, x_1)$, являющейся корнем уравнения (5.5), вытекает из следующих фактов:

а) функция $\psi(\xi)-\varphi(\xi)$ является непрерывной в интервале $\left(-\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n+1}\right)$;

б) при $\psi(0) < \min\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\}$

$$\psi(0+0)-\varphi(0+0)=\psi(0)-\varphi(0+0)<0,$$

$$\psi\left(\frac{\pi}{n+1}-0\right)-\varphi\left(\frac{\pi}{n+1}-0\right)=\psi\left(\frac{\pi}{n+1}-0\right)-\varphi\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=$$
$$=\varphi(2\pi-0)-\psi(0)>0;$$

в) при $\psi(0) > \max\{\varphi(0+0), \varphi(2\pi-0)\}$

$$\psi(0+0)-\varphi(0+0)=\psi(0)-\varphi(0+0)>0,$$
$$\psi\left(\frac{\pi}{n+1}-0\right)-\varphi\left(\frac{\pi}{n+1}-0\right)=\varphi(2\pi-0)-\psi(0)<0.$$

Принимая во внимание, что при каждом действительном α и при любых натуральных l и n для всякого тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $\leqslant n$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k T_n\left(\alpha+\frac{k\pi}{n+1}\right)=0;$$

отсюда, учитывая (5.5), заключаем, что если тригонометрический полином $T_n^*(x)$ порядка $\leqslant n$ интерполирует функцию $\varphi(x)$ в $2n+1$ точках

$$\xi_0, \ \xi_0+\frac{\pi}{n+1}, \ldots, \xi_0+\frac{2n}{n+1}\pi,$$

то он будет ее интерполировать также в точке $\xi_0+\frac{2n+1}{n+1}\pi$. В силу условия теоремы, кроме этих $2n+2$ точек, никаких других точек интерполяции функции $\varphi(x)$ полиномом $T_n^*(x)$ в интервале $(0, 2\pi)$ не будет и, кроме того, во всех точках ξ_i $(i=0, 1, 2, \ldots, n+1)$ разность $\varphi(x)-T_n^*(x)$ будет менять знак.

Если же имеет место неравенство (5.4′), то, полагая $\xi_0=\frac{\pi}{n+1}$, в силу условий теоремы легко обнаружим, что полином $T_n^*(x)$ порядка $\leqslant n$, который интерполирует функцию $\varphi(x)$ в точках $\frac{\pi}{n+1}$, $\frac{\pi}{n+1}+x_1, \ldots$ $\ldots, \frac{\pi}{n+1}+x_{2n}$ (т. е. в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$), будет интерполировать функцию $\varphi(x)$ только в этих точках и притом с переменой знака *.

* Это утверждение легко доказывается от противного.

Поэтому в обоих случаях получим:

$$\operatorname{sign}[\varphi(x)-T_n^*(x)]=\operatorname{sign}\sin(n+1)(x-\xi_0)$$

или

$$\operatorname{sign}[\varphi(x)-T_n^*(x)]=-\operatorname{sign}\sin(n+1)(x-\xi_0).$$

Доказательство единственности точки ξ_0, а также доказательство утверждений 2) и 3) данной теоремы получаются путем почти дословного повторения соответствующих рассуждений из теоремы 3.2 работы ([1]). Теорема доказана.

Теорема 5.2 вместе с теоремой 2.2 полностью решает вопрос о наилучшем приближении при помощи тригонометрических полиномов заданного порядка $\leqslant n$ в метрике L любой функции из классов $A_l^i(a)$, $i=1,\ 2,\ a\in[0,\ 2\pi]$, $l=[6ne\pi]+\frac{7+(-1)^i}{2}$. Нижеследующая теорема 5.3 решает аналогичный вопрос для периодических интегралов от функций классов $A_l^i(a)$.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть $\varphi(x)$ — суммируемая на $[0,\ 2\pi]$ функция, принадлежащая классу $A_l^i(a)$, $i=1,\ 2,\ a\in[0,\ 2\pi]$, $l=[6ne\pi]+\frac{7+(-1)^i}{2}$, и пусть $\varphi_s(x)$ (s — целое $\geqslant 1$) служит s-м периодическим с периодом 2π интегралом от $\varphi(x)$. Тогда*

1) *В полуинтервале $\left[0,\ \frac{\pi}{n+1}\right)$ найдется единственная точка ξ_0 такая, что*

$$\varphi_s(\xi_0)-\varphi_s\left(\xi_0+\frac{\pi}{n+1}\right)+\varphi_s\left(\xi_0+\frac{2\pi}{n+1}\right)-\varphi_s\left(\xi_0+\frac{3\pi}{n+1}\right)+\ldots$$

$$\ldots-\varphi_s\left(\xi_0+\frac{2n+1}{n+1}\pi\right)=0. \tag{5.8}$$

2) *Тригонометрический полином $T_n^*(x)$ порядка не выше n, который интерполирует функцию $\varphi_s(x)$ в точках $\xi_0,\ \xi_0+\frac{\pi}{n+1},\ldots,\xi_0+\frac{2n}{n+1}\pi$, является среди всевозможных полиномов порядка $\leqslant n$ полиномом наилучшего приближения функции $\varphi_s(x)$ в метрике L и*

$$E_n(\varphi_s)_L=\int_0^{2\pi}|\varphi_s(x)-T_n^*(x)|\,dx=\left|\int_0^{2\pi}\varphi_s(x)\operatorname{sign}\sin[(n+1)(x-\xi_0)]\,dx\right|. \tag{5.9}$$

3) *Если $\varphi_s(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, то число ξ_0 будет служить корнем уравнения* (5.7).

Справедливость этой теоремы, в силу теоремы 2.2, немедленно вытекает из теоремы 3.2 работы ([1]).

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $\varphi_i(x)$ ($i=1$ или 2) — суммируемая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2.3, и пусть при произвольном целом $s\geqslant 0$ $\varphi_{i,s}(x)$ есть s-й периодический с периодом 2π интеграл от функции $\varphi_i(x)$.*

Тогда среди всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$ полиномом наилучшего приближения для функции $\varphi_{i,s}(x)$ в метрике

L служит полиномом $T_n^*(x) = T_n^*(\varphi;\ s;\ x)$, который имеет ту же четность, что функция $\varphi_{i,s}(x)$ *, *и интерполирует в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию $\varphi_{i,s}(x)$ в нулях $\cos(n+1)x$, если функция $\varphi_{i,s}(x)$ четная, и в нулях $\sin(n+1)x$, если функция $\varphi_{i,s}(x)$ нечетная. При этом если функция $\varphi_{i,s}(x)$ четная, то*

$$E_n(\varphi_{i,s})_L = \int_0^{2\pi} |\varphi_{i,s}(x) - T_n^*(x)|\,dx = \left|\int_0^{2\pi} \varphi_{i,s}(x)\,\mathrm{sign}\cos(n+1)x\,dx\right|, \tag{5.10}$$

а если функция $\varphi_{i,s}(x)$ нечетная, то

$$E_n(\varphi_{i,s})_L = \int_0^{2\pi} |\varphi_{i,s}(x) - T_n^*(x)|\,dx = \left|\int_0^{2\pi} \varphi_{i,s}(x)\,\mathrm{sign}\sin(n+1)x\,dx\right|. \tag{5.10'}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что для четной функции полиномом наилучшего приближения является четный полином, а для нечетной функции — нечетный полином, и дословно повторяя рассуждения, при помощи которых была доказана теорема 2.5 работы ([1]), мы, в силу теоремы 2.3, немедленно получим, что полином $T_n^*(x)$, который интерполирует в интервале $(-\pi, \pi)$ функцию $\varphi_{i,s}(x)$ в точках, являющихся нулями $\cos(n+1)x$, если функция $\varphi_{i,s}(x)$ четная, и нулями $\sin(n+1)x$, если функция $\varphi_{i,s}(x)$ нечетная, будет интерполировать функцию $\varphi_{i,s}(x)$ только в данных точках и притом с переменой знака. Вследствие этого, утверждение доказываемой теоремы немедленно следует из цитированной выше теоремы А. А. Маркова [см. ([6]), стр. 96].

Примеры. Рассмотрим функции [см. ([6]), стр. 112, 113 и 211]

$$\varphi_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos\left(kx - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}$$

и

$$\psi_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin\left(kx - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Эти функции, как известно, являются периодическими интегралами $(s-1)$-го порядка соответственно от функций

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \psi_1(x) = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right), \quad x \in (-\pi, \pi),$$

т. е. от функций, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3.

Поэтому, в силу теоремы 5.4, без труда найдем:

$$E_n(\varphi_s)_L = \int_0^{2\pi} |\varphi_s(x) - \check{T}_n^*(s;x)|\,dx =$$

$$= \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(x)\,\mathrm{sign}\cos\left[(n+1)x - \frac{s\pi}{2}\right]dx\right| \tag{5.11}$$

---

* При любом целом $s \geqslant 0$ функция $\varphi_{i,s}(x)$ является, очевидно, либо четной либо нечетной.

и

$$E_n(\psi_s)_L = \int_0^{2\pi} |\, \psi_s(x) - \check{T}_n^*(s;\, x)\,|\, dx =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi_s(x) \operatorname{sign} \sin \left[(n+1)\, x - \frac{s\pi}{2} \right] dx \right|, \tag{5.11'}$$

где $\check{\check{T}}_n^*(s;\, x)$ и $\check{T}_n^*(s;\, x)$ — тригонометрические полиномы порядка $\leqslant n$, которые в интервале $(-\pi,\ \pi)$ интерполируют соответственно функцию $\varphi_s(x)$ в нулях $\cos\left[(n+1)x - \frac{s\pi}{2}\right]$ и функцию $\psi_s(x)$ в нулях $\sin\left[(n+1)x - \frac{s\pi}{2}\right]$. Первая из этих формул была впервые получена в 1936 г. Ж. Фаваром [см. ([3])], вторая в 1937 г. Ж. Фаваром [см. ([4])] и независимо от него Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном [см. ([5])].

§ 6. О наилучшем приближении на классах функций

Обозначим через $\mathfrak{M}_M$ и $\mathfrak{M}_L$ классы периодических существенно ограниченных измеримых или соответственно суммируемых функций $\alpha(x)$, которые удовлетворяют соответственно условиям

$$\operatorname{ess\,sup} |\, \alpha(x)\,| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} |\, \alpha(x)\,|\, dx \leqslant 1. \tag{5.12}$$

Тогда каждая суммируемая на $[0,\ 2\pi]$ функция $K(x)$ будет определять два класса функций $f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t)\, \alpha(x-t)\, dt. \tag{5.13}$$

Эти классы мы будем обозначать через K_C, если $\alpha(x) \in \mathfrak{M}_M$, и через K_L, если $\alpha(x) \in \mathfrak{M}_L$. В том случае, когда функции $\alpha(x)$, кроме условия (5.12), удовлетворяют еще условиям

$$\int_0^{2\pi} \alpha(x) \begin{matrix} \cos kx \\ \sin kx \end{matrix}\, dx = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1, \tag{5.14}$$

мы получим некоторые подклассы классов K_C и K_L, которые обозначим соответственно через A_{C_m} и K_{L_m}.

Положим еще

$$\sup_{f \in K_C} E_n(f)_C = E_n[K_C], \qquad \sup_{f \in K_L} E_n(f)_L = E_n[K_L],$$

$$\sup_{f \in K_{C_m}} E_n(f)_C = E_n[K_{C_m}] \text{ и т. д.}$$

и будем величины $E_n[K_C]$, $E_n[K_L]$, $E_n[K_{C_m}]$ и $E_n[K_{L_m}]$ называть наилучшими приближениями на классах K_C, K_L и т. д.

Теорема § 5 вместе с теоремами 2.2 и 2.3 дает возможность автоматически применить к приближению различных классов функций $f(x)$ вида (5.13) ряд общих предложений, доказанных С. М. Никольским [см. (2), ст. 225—243]. При этом получаются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть функция $K(x)$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1) *функция $K(x)$ является абсолютно монотонной и суммируемой в полуинтервале $[0, 2\pi)$;*

2) *функция $K(x)$ является аналитической и суммируемой в интервале $(0, 2\pi)$ и может быть представлена в виде*

$$K(x) = \int_{2n}^{\infty} x^s \, d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ — не убывающая в промежутке $[2n, \infty)$ функция;

3) *функция $K(x)$ служит s-м (s — целое $\geqslant 0$) периодическим с периодом 2π интегралом от функции из класса $A_l^i(a)$, $i = 1, 2$, $a \in [0, 2\pi]$, $l = [6ne\pi] + \frac{7+(-1)^i}{2}$;*

4) *функция $K(x)$ служит s-м (s — целое $\geqslant 0$) периодическим с периодом 2π интегралом от функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2.3.*

Тогда для функций $f(x)$, выражающихся через $\alpha(x)$ при помощи соотношения (5.13), при каждом $m = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$E_n[K_{C_m}] = \sup_{f \in K_{C_{n+1}}} \|f\|_C = E_n(K)_L = \int_0^{2\pi} |K(x) - T_n^*(x)| \, dx, \tag{5.15}$$

$$E_n[K_{L_m}] = \sup_{f \in K_{L_{n+1}}} \|f\|_L = E_n(K)_L = \int_0^{2\pi} |K(x) - T_n^*(x)| \, dx, \tag{5.15'}$$

где полином $T_n^*(x) = T_n^*(K; x)$ определяется каждый раз согласно соответствующим теоремам из § 5.

Зададим, следуя Б. Надю [см. (7)], систему чисел

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1} \tag{5.16}$$

и построим для каждой функции $f(x) \in K_C$ (или соответственно $f(x) \in K_L$) тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка

$$T_n(f; x; \mu, \nu) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{\mu_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \nu_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)\}, \tag{5.17}$$

определяемый системой чисел (5.16), где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции $\alpha(x)$, которой при помощи равенства (5.13) соответствует функция $f(x) \in K_C$. Полином $T_n(f; x; \mu, \nu)$ линейно зависит от $\alpha(x)$ и называется линейным методом (определяемым системой чисел (5.16)) приближения функции f вида (5.13).

ТЕОРЕМА 6.2. *Если ядро $K(x)$ удовлетворяет одному из условий теоремы* 6.1, *то линейный метод* (5.17) *является наилучшим для класса* K_C *при* $\mu_k = \mu_k^*$ *и* $\nu_k = \nu_k^*$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, *где* μ_k^* *и* ν_k^* *служат коэффициентами Фурье тригонометрического полинома*

$$T_n^*(x) = \frac{1}{2}\mu_0^* + \sum_{k=1}^{n} (\mu_k^* \cos kx + \nu_k^* \sin kx),$$

который среди всевозможных полиномов порядка $\leqslant n$ *является полиномом наилучшего приближения функции* $K(x)$ *в метрике* L. *При этом*

$$\mathscr{E}_n[K_C;\ \mu^*,\ \nu^*] = \sup_{f \in K_C} \| f - T_n(f;\ x;\ \mu,\ \nu)\|_C =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K(x) - T_n^*(x)|\, dx. \qquad (5.18)$$

Этот линейный метод для класса K_C *является единственным.*

ТЕОРЕМА 6.3. *Если ядро* $K(x)$ *удовлетворяет одному из условий теоремы* 6.1, *то линейный метод* (5.17) *является наилучшим для класса* K_L *при тех же* μ_k^* *и* ν_k^*, *что и в теореме* 6.2. *При этом*

$$\mathscr{E}_n[K_L;\ \mu^*,\ \nu^*] = \sup_{f \in K_L} \| f - T_n(f;\ x;\ \mu,\ \nu)\|_L =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |K(x) - T_n^*(x)|\, dx. \qquad (5.18')$$

Поступило
11. VIII. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 23 (1959), 933—950.

[2] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.

[3] Favard J., Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque — périodiques, Matematisk Tidskrift, Kφbenhavn, B. H. 4 (1936), 81—94.

[4] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., LXI (1937), 209—224; 243—256.

[5] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15(1937), 107—112.

[6] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

[7] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I, Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Akademie d. Wiss. zu Leipzig, XC (1938), 103—134.

[8] Крейн М. Г., К теории наилучшего приближения периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 18 (1938), 245—250.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 239—252

Ю. П. ОФМАН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $\varphi(x)+\psi(y)$

В работе рассматривается вопрос о том, какой должна быть область определения функции $f(x, y)$ для того, чтобы существовало наилучшее ее приближение функцией вида $\varphi(x)+\psi(y)$.

Пусть на подмножестве Φ плоскости oxy задана ограниченная функция $f(x, y)=f(P)$. Рассматривается класс всех функций (включая разрывные) вида $\varphi(x)+\psi(y)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определены на проекциях Φ соответственно на оси ox и oy.

Под расстоянием между функциями $f(x, y)=f(P)$ и $g(x, y)=g(P)$ будем понимать

$$\sup_{P\in\Phi}|f(P)-g(P)|=\rho(f, g).$$

Через E_f обозначим нижнюю грань расстояний между $f(x, y)$ и функциями класса $\varphi(x)+\psi(y)$.

Будем говорить, что функция $\varphi^0(x)+\psi^0(y)$ приближает $f(x, y)$ наилучшим образом, если

$$\rho[f(x, y), \varphi^0(x)+\psi^0(y)]=E_f.$$

В настоящей работе указываются способы нахождения величины E_f.

Далее, в предположении, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица *, формулируются условия, налагаемые на ее область определения, достаточные для существования функции $\varphi^*(x)+\psi^*(y)$, наилучшим образом приближающей $f(x, y)$ и удовлетворяющей условию Липшица с той же константой, что и $f(x, y)$.

В случае, когда Φ есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, доказывается существование наилучшего приближения непрерывной функции $f(x, y)$ функцией $\varphi^*(x)+\psi^*(y)$ без ухудшения модуля непрерывности **.

Наконец, все результаты обобщаются на случай приближения функций от n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ функциями вида $\varphi_1(x_1)+\ldots+\varphi_n(x_n)$.

---

* Мы говорим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет на множестве Φ условию Липшица с константой L, если для любых двух точек $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)\in\Phi$ имеет место соотношение:

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|\leqslant L(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|).$$

** Модулем непрерывности равномерно непрерывной функции $f(P)$ называется функция

$$\omega(\delta)=\omega(\delta, f)=\sup_{\rho(P_1, P_2)\leqslant\delta}|f(P_1)-f(P_2)|.$$

1. Определение 1. Будем называть подфункцией $f(x, y)$, соответствующей подмножеству $\Phi_1 \subseteq \Phi$, функцию f_{Φ_1}, областью определения которой является подмножество Φ_1 и которая совпадает на нем с функцией $f(x, y)$.

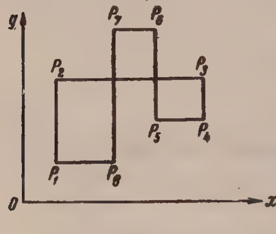


Рис. 1

Как правило, в дальнейшем нам придется иметь дело со специальными подфункциями, у которых подмножество Φ_1 есть пересечение Φ либо с прямой $x = x_0$ (такое подмножество мы будем обозначать через A_{x_0}), либо с прямой $y = y_0$ (такое подмножество мы будем обозначать через B_{y_0}). Соответствующие подфункции, в согласии со сказанным выше, мы обозначим через $f_{A_{x_0}}$ и $f_{B_{y_0}}$.

Обозначим, далее, через $A'_x (B'_y)$ проекцию множества $A_x (B_y)$ на ось $oy\,(ox)$, а через $f_{A'_x} (f_{B'_y})$ — функцию, которая определяется на $A'_x (B'_y)$ следующим образом:

$$f_{A'_x}(y) = f_{A_x}(x, y) \qquad (f_{B'_y}(x) = f_{B_y}(x, y)).$$

Сопоставим каждому $x \in \Phi'$ (проекции Φ на ox) функцию $f_{A'_x}(y)$. Тогда множеству Φ' будет сопоставлено семейство функций $\{f_{A'_x}(y)\}$. Аналогично, множеству Φ'' (проекции Φ на oy) может быть сопоставлено семейство функций $\{f_{B'_y}(x)\}$.

Определение 2. Назовем 1-м (2-м) семейством функции $f(x, y)$ семейство функций $\{f_{A'_x}(y)\}$ $(\{f_{B'_y}(x)\})$.

Определение 3. Конечная ломаная $P_1P_2 \ldots P_n\,(P_1, P_2, \ldots, P_n \in \Phi)$ называется молнией множества Φ, если

1) каждое из ее звеньев параллельно или оси x, или оси y и

2) каждые два звена, имеющие общую вершину P_k (смежные звенья), перпендикулярны.

Молния называется замкнутой, если замкнута соответствующая ломаная (см. рис. 1, на котором изображена замкнутая молния).

Очевидно, замкнутая молния имеет четное число вершин.

Под молнией мы будем понимать также конечную упорядоченную совокупность точек $P_1 \ldots P_n$, которые являются вершинами ломаной с вышеуказанными свойствами.

ТЕОРЕМА 1 *. *Пусть на прямоугольнике Φ со сторонами, параллельными координатным осям, задана непрерывная функция $f(x, y)$. Сопоставим каждой замкнутой молнии $H_\Phi = \{P_1 \ldots P_{2n}\}$ множества Φ число*

$$r_{H_\Phi}[f] = \frac{|f(P_1) - f(P_2) + \ldots - f(P_{2n})|}{2n}.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\sup_{H_\Phi} \{r_{H_\Phi}[f]\} = E_f.$$

* Эта теорема была доказана С. Смоляком в 1956 г.

Нетрудно проверить, что если функция $A(x, y)$ представима в виде

$$A(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

то $r_{H_\Phi}(A) = 0$ для любой замкнутой молнии H_Φ. Отсюда следует, что для всякой замкнутой молнии H_Φ и любых φ и ψ

$$r_{H_\Phi}[f(x, y)] = r_{H_\Phi}[f(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)].$$

Пусть

$$\rho[f(x, y), \varphi_1(x) + \psi_1(y)] \leqslant E_f + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Так как для любой замкнутой молнии H_Φ

$$r_{H_\Phi}[f(x, y)] = r_{H_\Phi}[f(x, y) - \varphi_1(x) - \psi_1(y)] \leqslant$$

$$\leqslant \sup|f(x, y) - \varphi_1(x) - \psi_1(y)| \leqslant E_f + \varepsilon,$$

то

$$\sup_{H_\Phi}\{r_{H_\Phi}[f(x, y)]\} \leqslant E_f + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε,

$$\sup_{H_\Phi}\{r_{H_\Phi}\} \leqslant E_f.$$

Чтобы установить неравенство

$$\sup_{H_\Phi}\{r_{H_\Phi}\} \geqslant E_f,$$

мы используем доказанную ниже теорему 4 о существовании для непрерывной функции $f(x, y)$, определенной на прямоугольнике, непрерывной наилучшей приближающей $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$. Рассмотрим функцию

$$R(x, y) = f(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y).$$

Очевидно, что

$$\max_{P(x, y) \in \Phi} |R(x, y)| = E_f.$$

Будем называть молнию $H_\Phi = \{P_k\}$ экстремальной относительно $R(x, y)$, если

$$|R(P_k)| = E_f, \quad R(P_k) = -R(P_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Если бы существовала замкнутая экстремальная молния, то, как нетрудно заметить, мы бы имели:

$$r_{H_\Phi}[R(x, y)] = r_{H_\Phi}[f(x, y)] = E_f,$$

чем теорема 1 была бы доказана. Поэтому мы предположим, что замкнутых экстремальных молний не существует, и покажем, что в этом случае найдется экстремальная молния, состоящая из сколь угодно большого числа точек. Допустим противное: пусть нашлось такое число N, что всякая экстремальная молния состоит не более чем из N точек. Пусть $\varphi_1(x)$ есть среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 2-го семейства $R(x, y)$, а $\psi_1(y)$ есть среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 1-го семейства функции $R(x, y) - \varphi_1(x)$. Положим

$$R_1(x, y) = R(x, y) - \varphi_1(x) - \psi_1(y).$$

Тогда $\max|R_1(x, y)| = \max|R(x, y)| = E_f$. Нетрудно заметить, что если $|R(P_0)| < E_f$, то и $|R_1(P_0)| < E_f$ (следовательно, если $R_1(P_0) = E_f$, то и $R(P_0) = E_f$). Отсюда вытекает, что всякая молния, экстремальная относительно $R_1(x, y)$, экстремальна относительно $R(x, y)$.

Покажем, что всякая молния, экстремальная относительно $R_1(x, y)$, не может иметь более чем $N-1$ точку. Рассмотрим произвольную молнию, экстремальную относительно $R(x, y)$ и состоящую из N точек. Пусть, для определенности, отрезок $[P_{N-1}, P_N]$ параллелен оси x и $R(P_N)=E_f$ (а не $-E_f$). Тогда на пересечении прямой, проходящей через точку P_N и параллельной оси y, с множеством Φ не найдется такой точки P_0, для которой

$$R(P_0)=-E_f.$$

В самом деле, если бы такая точка нашлась и не принадлежала рассматриваемой молнии, то, присоединив ее к молнии, мы получили бы экстремальную молнию из $N+1$ точки, что невозможно по предположению. А если бы такая точка принадлежала рассматриваемой молнии, то мы получили бы замкнутую экстремальную молнию, что также невозможно по предположению. Из этого нетрудно заключить, что значение функции $R(x, y)-\varphi(x)$, следовательно, и функции $R_1(x, y)$ во всякой точке прямой, проходящей через P_N и параллельной оси y, по модулю меньше, чем E_f ($|R_1(P_N)|<|R(P_N)|=E_f$). Из всех этих рассуждений следует, что всякая молния, экстремальная относительно $R_1(x, y)$, не может иметь более чем $N-1$ точку.

Обозначим через $\varphi_2(x)$ среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 2-го семейства функции $R_1(x, y)$ и через $\psi_2(y)$ — среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 1-го семейства функции $R_1(x, y)-\varphi_2(x)$. Положим

$$R_2(x, y)=R_1(x, y)-\varphi_2(x)-\psi_2(y).$$

Из рассуждений, аналогичных предыдущим, следует, что всякая молния, экстремальная относительно $R_2(x, y)$, имеет не более $N-2$ точек. Аналогично строим $R_3(x, y), \ldots, R_N(x, y)$ *. Очевидно, что не будет ни одной молнии, экстремальной относительно функции $R_N(x, y)$, т. е. для всякой точки $P \in \Phi$

$$|R_N(P)|<E_f.$$

Поскольку все рассматриваемые функции непрерывны, имеем:

$$\max|R_N(P)|=\sup|R_N(P)|<E_f,$$

что невозможно.

Итак, из предположения о том, что не существует замкнутых молний, экстремальных относительно $R(x, y)$, следует существование молний, экстремальных относительно $R(x, y)$ и состоящих из сколь угодно большого числа точек. Пусть H_Φ есть молния, экстремальная относительно $R(x, y)$ и состоящая из n точек $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$. Пусть P_{n+1} есть точка пересечения прямых $x=x_1$ и $y=y_n$. Присоединив эту точку к молнии, мы получим молнию замкнутую, но уже не экстремальную. Подобный процесс назовем замыканием молнии. Пусть $H_\Phi^1, \ldots, H_\Phi^n$ есть последовательность экстремальных молний, состоящих соответственно из $l_1, l_2, \ldots, l_n$ точек ($l_n \to \infty$). Обозначим молнии, полученные замыканием этих молний, соответственно через $H'^1_\Phi, \ldots, H'^n_\Phi$.

* Идея этого процесса принадлежит В. И. Арнольду.

Тогда очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} r_{H'^n_\Phi}[R(x, y)] = \lim_{n\to\infty} r_{H'^n_\Phi}[f(x, y)] = E_f.$$

Теорема 1 доказана.

Определение 4. Назовем расстоянием между функциями $f_{A'_{x_1}}(y)$ и $f_{A'_{x_2}}(y)$ семейства $\{f_{A'_x}\}$ величину

$$\rho[f_{A'_{x_1}}(y),\ f_{A'_{x_2}}(y)] = \sup_{y\in A'_{x_1}\cap A'_{x_2}} |f_{A'_{x_1}}(y) - f_{A'_{x_2}}(y)|.$$

Если $A'_{x_1} \cap A'_{x_2} = 0$, то полагаем

$$\rho[f_{A'_{x_1}}(y),\ f_{A'_{x_2}}(y)] = 0 \ *.$$

Верхняя грань попарных расстояний между функциями 1-го семейства называется *диаметром 1-го семейства* и обозначается через $d^1[f]$. Аналогично определяется *диаметр 2-го семейства* $d^2[f]$.

Определение 5. Если к каждой функции семейства прибавить некоторую постоянную независимо от остальных функций, то мы получим новое семейство, которое будем называть *эквивалентным* прежнему.

Нижняя грань диаметров всех семейств, эквивалентных 1-му, называется *истинным диаметром 1-го семейства* $f(x, y)$ и обозначается через $d_0^1[f]$. Аналогично определяется $d_0^2[f]$ — *истинный диаметр 2-го семейства*.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место равенства*:

$$d_0^1[f] = d_0^2[f] = 2E_f.$$

Доказательство. Пусть $\rho[f(x, y),\ \varphi(x) + \psi(y)] = E_1$. Рассмотрим функцию

$$\chi(x, y) = f(x, y) - \varphi(x).$$

Нетрудно заметить, что 1-е семейства функций $\chi(x, y)$ и $f(x, y)$ эквивалентны. Кроме того, очевидно, что диаметр 1-го семейства $\chi(x, y)$ не превышает $2E_1$. Следовательно, $d_0^1[f] \leqslant 2E_1$, а так как функция $\varphi(x) + \psi(y)$ произвольна, то

$$d_0^1[f] \leqslant 2E_f.$$

Допустим, что нашлось семейство, эквивалентное 1-му семейству $f(x, y)$, диаметр которого $d' = 2(E_f - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\psi^0(y)$ функцию, определенную на Φ'' и равную среднему арифметическому точных верхней и нижней граней этого семейства. Такая функция приближает каждую из функций семейства, эквивалентного 1-му, с точностью, не меньшей, чем $E_f - \varepsilon$. Следовательно, каждой функции 1-го семейства $f_{A'_x}(y)$ можно сопоставить постоянную функцию $C_x(y)$ так, что

$$\rho[f_{A'_x}(y) + C_x(y),\ \ \psi^0(y)] \leqslant E_f - \varepsilon.$$

Определим на Φ' функцию $\varphi^0(x)$ следующим образом:

$$\varphi^0(x) = C_x.$$

---

* Так определенное расстояние не удовлетворяет общепринятым аксиомам.

Тогда легко видеть, что

$$\rho\,[f(x,\ y),\quad \varphi^0(x)+\psi^0(y)]=E_f-\varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$d_0^1[f]\geqslant 2E_f.$$

Сопоставляя это соотношение с ранее выведенным соотношением

$$d_0^1[f]\leqslant 2E_f,$$

получаем:

$$d_0^1[f]=2E_f.$$

Аналогично доказывается второе равенство

$$d_0^2[f]=2E_f,$$

чем теорема 2 доказана.

Чтобы сформулировать теорему 2 для случая функций от n переменных, нам понадобится обобщение наших определений.

Пусть функция $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ задана на подмножестве Φ n-мерного пространства $ox_1,\ldots,x_n$. Аналогично предыдущему можно ввести понятие семейства функции f. Очевидно, функция f имеет n семейств: 1-е, 2-е, ..., n-е, расположенные соответственно в плоскостях $zox_1,\ldots,zox_n$. По аналогии вводим понятие диаметра k-го семейства f и понятие семейства, эквивалентного k-му семейству.

Пусть $\varphi(x_1),\ldots,\varphi_{k-1}(x_{k-1}),\ \varphi_{k+1}(x_{k+1}),\ldots,\ \varphi_n(x_n)$ — произвольные функции, определенные соответственно на проекциях Φ на оси $ox_1,\ldots,ox_{k-1},\ ox_{k+1},\ldots,ox_k$. Тогда k-е семейство функции

$$f(x_1,\ldots,x_n)-\varphi_1(x_1)-\ldots-\varphi_{k-1}(x_{k-1})-\varphi_{k+1}(x_{k+1})-\ldots-\varphi_n(x_n)$$

эквивалентно k-му семейству функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Нижняя грань диаметров всех семейств, эквивалентных k-му и таких, что они могут быть получены с помощью некоторых функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1},\ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_n$ вышеописанным способом, называется *истинным диаметром k-го семейства*.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА 2. *Имеют место равенства*:

$$2E_f=d_0^1[f]=\ldots=d_0^n[f].$$

Доказательство. Пусть

$$\rho\,[f(x_1,\ldots,x_n),\ \varphi_1(x_1),\ldots,\varphi_n(x_n)]=E_1\geqslant E_f.$$

Рассмотрим функцию $\chi(x_1,\ldots,x_n)=f-\varphi_2-\ldots-\varphi_n$, 1-е семейство которой эквивалентно 1-му семейству функции f. Очевидно, что диаметр 1-го семейства функции χ не превышет $2E_1$, следовательно,

$$d_0^1[f]\leqslant 2E_1,$$

а так как функция $\varphi_1(x_1)+\ldots+\varphi_n(x_n)$ есть произвольная функция класса $\{\varphi_1(x_1)+\ldots+\varphi_n(x_n)\}$, то

$$d_0^1[f]\leqslant 2E_f.$$

Пусть $d_0^1[f]<2E_f$. Тогда (по определению) найдутся функции $\varphi_2(x_2),\ldots$ $\ldots,\varphi_n(x_n)$ такие, что диаметр 1-го семейства функции

$$\chi(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)-\varphi_2(x_2)-\ldots-\varphi_n(x_n)$$

равен

$$d'=2(E_f-\varepsilon)\qquad(\varepsilon>0).$$

Обозначим через $\varphi_1(x_1)$ среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 1-го семейства функции χ. Тогда очевидно, что

$$\rho[f, \varphi_1 + \ldots + \varphi_n] \leqslant E_f - \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 5. 1-й планкой (2-й планкой) креста назовем множество $A_{x_0}(B_{y_0})$ (см. обозначения в определениях 1 и 2) такое, что его проекция на ось ox (ось oy) совпадает с проекцией Φ на ось ox (oy).

Множество $A_{x_0} \bigcup B_{y_0} \subseteq \Phi$ называется *крестом* Φ (см. рис. 2, где изображено множество, содержащее крест).

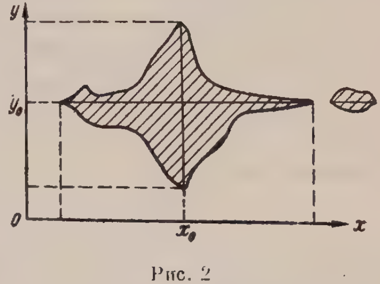


Рис. 2

2. ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица и определена на множестве Φ, содержащем крест *. Тогда в классе $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$ существует функция $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$ такая, что*

1) $\rho[f(x, y), \quad \varphi^*(x) + \psi^*(y)] = E_f$,

2) *$\varphi^*(x)$ и $\psi^*(y)$ удовлетворяют условию Липшица с той же константой L, что и $f(x, y)$.*

Предпошлем доказательству две леммы.

ЛЕММА 1. *Если множество Φ содержит крест, то найдется счетное, плотное в Φ множество $M \subseteq \Phi$, которое также имеет крест, и для подфункции f_M в классе $\{\varphi(x) + \varphi(y)\}$ существует наилучшая аппроксимирующая.*

Доказательство. Пусть Φ_1 — счетное, плотное в Φ множество. Тогда очевидно, что $\Phi_1 \bigcup A_{x_0} \bigcup B_{y_0}$ есть множество, содержащее крест ($A_{x_0} \bigcup B_{y_0}$ — крест Φ). Удалим из A_{x_0} и B_{y_0} те точки, которые при проектировании соответственно на оси oy и ox не попадают на точки проекции множества Φ_1. То, что останется после этого в множестве $\Phi_1 \bigcup \bigcup A_{x_0} \bigcup B_{y_0}$, и есть множество M, существование которого и утверждается в лемме.

Составим последовательность функций $\{\varphi_n(x) + \psi_n(y)\}$ такую, что

$$\rho[f_M(x, y), \quad \varphi_n(x) + \psi_n(y)] \to E_{f_M}.$$

Тогда функции $\{\varphi_n(x) + \psi_n(y)\}$ образуют равномерно-ограниченное семейство функций. Каждая из них, $\varphi_n(x) + \psi_n(y)$, разлагается на функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(y)$ однозначно с точностью до констант, так как $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(y)$, с точностью до констант, являются подфункциями $\varphi_n(x) + \psi_n(x)$, соответствующими планкам креста множества M. Очевидно, эти константы можно подобрать так, что два семейства $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(y)\}$ будут равномерно ограничены. Известно, что из равномерно ограничен-

* На самом деле, как нетрудно будет заметить из последующих рассуждений, достаточно потребовать от Φ, чтобы нашлось его подмножество, плотное в нем и содержащее крест (имеется в виду крест относительно этого подмножества).

ной последовательности функций, определенных на счетном множестве можно выделить сходящуюся последовательность *. Выделим из последовательности $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ подпоследовательность $\varphi_{k_1}(x), \ldots, \varphi_{k_n}(x), \ldots$, сходящуюся к некоторой функции $\varphi^0(x)$. Затем из последовательности $\psi_{k_1}(y), \ldots, \psi_{k_n}(y)$ выделим подпоследовательность $\psi_{l_1}(y), \ldots, \psi_{l_n}(y)$, сходящуюся к некоторой функции $\psi^0(y)$, и рассмотрим последовательность

$$\varphi_{l_1}(x) + \psi_{l_1}(y), \ldots, \varphi_{l_n}(x) + \psi_{l_n}(y), \ldots \underset{n\to\infty}{\to} \varphi^0(x) + \psi^0(y).$$

Для всякой фиксированной точки $P_0(x_0, y_0) \in M$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при любом $n > N$ выполняются неравенства:

$$\rho[\varphi^0(x_0) + \psi^0(y_0), \ \varphi_n(x_0) + \psi_n(y_0)] < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\rho[f_M(x_0, y_0), \ \varphi_n(x_0) + \psi_n(y_0)] < \frac{\varepsilon}{2} + E_{f_M}.$$

Следовательно,

$$\rho[f_M(x, y), \ \varphi^0(x) + \psi^0(y)] < E_{f_M} + \varepsilon$$

при всяком $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\rho[f_M(x, y), \ \varphi^0(x) + \psi^0(y)] = E_{f_M},$$

чем лемма 1 доказана.

Перенумеруем точки проекции множества M на оси ox и oy: $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots$.

Через $A_{x_k}(B_{y_k})$ обозначим пересечение M с прямой $x = x_k$ $(y = y_k)$.

Мы можем предположить, что A_{x_1} и B_{y_1} — планки креста множества M.

Пусть $\varphi^0(x) + \psi^0(y)$ — функция, построенная в лемме 1. Рассмотрим функцию

$$\chi(x, y) = f_M(x, y) - \psi^0(y).$$

2-е семейство $\chi(x, y)$ эквивалентно 2-му семейству $f_M(x, y)$ и имеет диаметр $d_0 = 2E_{f_M}$ (последнее следует из теоремы 1).

Имеет место

ЛЕММА 2. *Существует функция $\varphi^*(x)$, которая определена на проекции M на ось ox, приближает каждую функцию $\chi_{B'_{y_k}}$ (эти функции, согласно определению 2, называются функциями 2-го семейства $\chi(x, y)$) с точностью, не меньшей чем E_{f_M}, и удовлетворяют условию Липшица с константой L.*

Прежде всего заметим, что поскольку f_M удовлетворяет условию Липшица с константой L, то и всякая ее подфункция удовлетворяет условию Липшица с константой L. Но функции семейства $\{\chi_{B'_{y_k}}\}$ лишь на константы отличаются от подфункций f_M и, следовательно, все удовлетворяют условию Липшица с константой L.

Пусть

$$B_n^k = \bigcap_{r=n}^{k} B'_{y_r}.$$

Очевидно, что $B_l^k \subseteq B_s^k$ при $l < s$. Множество

$$B_1^k = \bigcap_{r=1}^{k} B'_{y_r}$$

* Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, изд. 2, Москва 1947, стр. 240.

не пусто, так как точка x_1 принадлежит всем множествам B_{y_k} $(k=1, 2, \ldots)$ (в основном для получения этого результата и было нужно требование креста). На множестве B_1^k определим $\overset{*}{\varphi}_k(x)$ как среднее арифметическое точной верхней и нижней граней первых k функций семейства $\chi_{B'_{y_1}}, \ldots, \chi_{B'_{y_k}}$ (все эти функции на B_1^k определены). Нетрудно видеть, что точная верхняя и нижняя грани равномерно ограниченного семейства функций, имеющих общую область определения и удовлетворяющих условию Липшица с константой L, также удовлетворяют условию Липшица с константой L и что среднее арифметическое этих граней — $\varphi_k^*(x)$ тоже удовлетворяет условию Липшица с константой L.

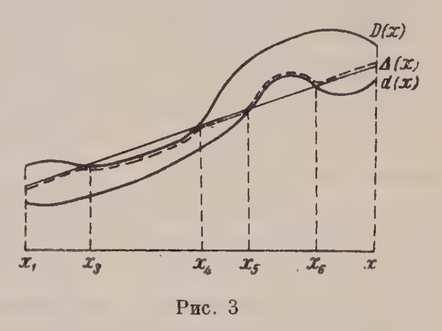


Рис. 3

Займемся доопределением $\overset{*}{\varphi}_k(x)$ на B_2^k (как указывалось выше, $B_1^k \subseteq B_2^k$).

Назовем хорошими те точки B_2^k, которые принадлежат B_1^k, остальные точки назовем плохими. Плохие точки разобьем на плохие множества, относя две плохие точки к одному плохому множеству тогда и только тогда, когда между ними нет ни одной хорошей точки. Пусть П — одно из плохих множеств, а x_1 и x_2 — хорошие точки, ближайшие к П слева и справа (возможен еще случай, когда П слева или справа не имеет хороших точек. Этот случай будет рассмотрен ниже). На П определены функции $\chi_{B'_{y_1}}, \ldots, \chi_{B'_{y_k}}$. Доопределим $G(x)$ и $g(x)$ — верхнюю и нижнюю грани этих функций — сначала по непрерывности на замыкание П, [П], а затем на отрезок $[x_1, x_2]$ линейно на каждом интервале, смежном к [П]. Из способа доопределения ясно, что при этом расстояние между $G(x)$ и $g(x)$ не изменится. Пусть

$$D(x) = g(x) + E_{f_M}, \quad d(x) = G(x) - E_{f_M}.$$

Очевидно, что на $[x_1, x_2]$ $D(x) \geqslant d(x)$ и что

$$d(x_1) \leqslant \varphi_k^*(x_1) \leqslant D(x_1), \quad d(x_2) \leqslant \varphi_k^*(x_2) \leqslant D(x_2)$$

(напомним, что в точках x_1 и x_2 функция $\varphi_k^*(x)$ уже определена).

Пусть значения функций рассматриваемого семейства отмечаются на оси oz и, следовательно, их графики находятся в плоскости xoz. Назовем «коридором» замкнутое множество плоскости xoz, ограниченное кривыми $z = D(x)$, $z = d(x)$ и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$.

Соединим отрезком Δ * точки $(x_1, \overset{*}{\varphi}_k(x_1))$ и $(x_2, \overset{*}{\varphi}_k(x_2))$. Через x_3 обозначим первую слева точку отрезка $[x_1, x_2]$ такую, что в некоторой ее правой полуокрестности график $\varphi_k^*(x)$ находится вне коридора (если такой точки не найдется, то $\varphi_k^*(x)$ полагаем на П равной $\Delta(x)$). Очевидно, что либо $\Delta(x_3) = D(x_3)$, либо $\Delta(x_3) = d(x_3)$. Пусть, для опре-

* Отрезок Δ в дальнейшем будет рассматриваться как график функции $\Delta(x)$, определенной на $[x_1, x_2]$.

деленности, $\Delta(x_3) = D(x_3)$ (см. рис. 3, где пунктир проведен вдоль графика $\varphi^*(x)$).

Через x_4 обозначим самую правую из точек отрезка $[x_1, x_2]$, в которых $\Delta(x)$ пересекает $D(x)$. Если правее график $\Delta(x)$ лежит в коридоре, то полагаем $\varphi_k^*(x) = \Delta(x)$ на $[x_4, x_2]$. Рассмотрим более сложный случай, когда это не так. Пусть x_5 — самая левая точка на $[x_4, x_2]$, в которой $\Delta(x)$ пересекает $d(x)$, а x_6 — самая правая. Функцию $\varphi_k^*(x)$ доопределяем следующим образом: на $[x_1, x_3]$

$$\varphi_k^*(x) = \Delta(x);$$

на $[x_3, x_4]$

$$\varphi_k^*(x) = D(x);$$

на $[x_4, x_5]$

$$\varphi_k^*(x) = \Delta x;$$

на $[x_5, x_6]$

$$\varphi_k^*(x) = d(x);$$

на $[x_6, x_2]$

$$\varphi_k^*(x) = \Delta(x).$$

При таком доопределении очевидно, что $\varphi_k^*(x)$ удовлетворяет на $[x_1, x_2]$ и, значит, на П условию Липшица с константой L. Кроме того, так как

$$G(x) - E_{f_M} \leqslant \varphi_k^*(x) \leqslant g(x) + E_{f_M}$$

(что следует из способа доопределения), то $\varphi_k^*(x)$ приближает на П функции $\chi_{B'_{\nu_2}}, \ldots, \chi_{B'_{\nu_k}}$ с точностью, не меньшей, чем E_{f_M}. Пусть теперь П не имеет, например, справа хороших точек, а x_1 — хорошая точка, ближайшая к П слева, x_2 — верхняя грань точек множества M_2^k. $G(x)$ и $g(x)$ — верхнюю и нижнюю грани $\chi_{B'_{\nu_2}}, \ldots, \chi_{B'_{\nu_k}}$ на П — доопределяем, как и прежде, до $[x_1, x_2]$. Пусть на $[x_1, x_2]$

$$\rho[G(x), g(x)] = d' \leqslant 2E_{f_M},$$

и пусть

$$|\varphi_k^*(x_1) - G(x_1)| \geqslant \frac{d'}{2}.$$

Тогда на $[x_1, x_2]$ полагаем

$$\varphi_k^*(x) = G(x) + \varphi_k^*(x_1) - G(x_1).$$

Если

$$|\varphi_k^*(x_1) - g(x_1)| \geqslant \frac{d'}{2},$$

то на $[x_1, x_2]$ полагаем

$$\varphi_k^*(x) = g(x) + \varphi_k^*(x_1) - g(x_1).$$

Если же

$$|\varphi_k^*(x_1) - G(x_1)| < \frac{d'}{2}$$

и

$$|\varphi_k^*(x_1) - g(x_1)| < \frac{d'}{2},$$

то $\varphi_k^*(x)$ полагаем равной $\varphi_k^*(x_1)$ на отрезке $[x_1, x_3]$, где точка x_3 есть самая левая точка $[x_1, x_2]$, в которой величина $|G(x_3) - \varphi_k^*(x_1)|$ или $|g(x_3) - \varphi_k^*(x_1)|$ станет равной $\frac{d'}{2}$. На $[x_3, x_2]$ функция $\varphi_k^*(x)$ доопределяется вышеописанным способом. В этом случае, как и прежде, нетрудно видеть, что $\varphi_k^*(x)$ на П удовлетворяет условию Липшица с констан-

той L и приближает каждую из функций $\chi_{B'_{y_2}}, \ldots, \chi_{B'_{y_k}}$ на П с точностью, не меньшей чем E_{f_M}.

Аналогично доопределяется φ_k^* на остальных плохих множествах. Из построения следует *, что таким образом определенная на B_2^k функция удовлетворяет условию Липшица с константой L. Затем аналогичными построениями $\varphi_k^*(x)$ доопределяется последовательно на множествах $B_3^k, \ldots, B_k^k$. Но $B_k^k = B'_{x_1}$ — проекции Ф на ox. Таким образом, нами построена функция $\varphi_k^*(x)$, определенная на проекции Ф на ось ox, удовлетворяющая условию Липшица с константой L и приближающая каждую из первых k функций семейства $\{\chi_{B'_{y_n}}\}$ с точностью, не меньшей чем E_{f_M}. Построив для каждого k функцию $\varphi_k^*(x)$, мы получим систему функций, равномерно ограниченную и равностепенно непрерывную (все функции удовлетворяют условию Липшица с одной и той же константой L). В силу теоремы Арцела—Асколи, из такой системы функций можно выделить равномерно сходящуюся последовательность. Пусть ее предел есть функция $\varphi^*(x)$. Нетрудно видеть, что $\varphi^*(x)$ есть функция, существование которой и утверждается в лемме 2. Лемма 2 доказана.

Очевидно, что

$$\rho\,[f_M(x, y),\ \varphi^*(x) + \psi^*(y)] = E_{f_M}.$$

Рассмотрим 1-е семейство функции

$$\Omega(x, y) = f_M(x, y) - \varphi^*(x).$$

Оно имеет диаметр $2E_{f_M}$ и эквивалентно 1-му семейству $f_M(x, y)$. По лемме 2, существует функция $\psi^*(y)$, определенная на проекции M на oy, приближающая каждую функцию 1-го семейства $\Omega(x, y)$ с точностью, не меньшей чем E_{f_M}, и удовлетворяющая условию Липшица с константой L. Очевидно, что

$$\rho\,[f_M(x, y),\ \varphi^*(x) + \psi^*(y)] = E_{f_M}.$$

---

* Здесь мы используем такое утверждение. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $h(x)$. Разобьем полуинтервал $[a, b]$ на счетное число отрезков $[a = x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots$ последовательностью точек $x_1, x_2, \ldots$, монотонно сходящейся к b. Тогда если на каждом из отрезков $[a = x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots$ функция $h(x)$ удовлетворяет условию Липшица с одной и той же константой L, то на всем отрезке $[a, b]$ функция $h(x)$ также будет удовлетворять условию Липшица с константой L.

В самом деле, возьмем две точки отрезка, отличные от $b: x'$ и x''. Между ними имеется конечное число членов нашей последовательности: $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m$. II условию имеем:

$$\frac{|h(x') - h(x_k)|}{|x' - x_k|} \leqslant L, \quad \frac{|h(x_k) - h(x_{k+1})|}{|x_k - x_{k+1}|} \leqslant L, \ldots, \frac{|h(x_m) - h(x'')|}{|x_m - x''|} \leqslant L.$$

Следовательно,

$$\frac{h(x') - h(x'')}{|x' - x''|} \leqslant L.$$

Из полученного неравенства и из условия непрерывности $h(x)$ на $[a, b]$ получаем:

$$\frac{|h(x) - b|}{|x - b|} \leqslant L.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Теперь, чтобы получить доказательство теоремы 3, достаточно вспомнить, что проекции M на оси ox и oy плотны в проекциях Φ соответственно на эти оси. Доопределим $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(y)$ по непрерывности до проекций Φ на оси ox и oy. Тогда получим:

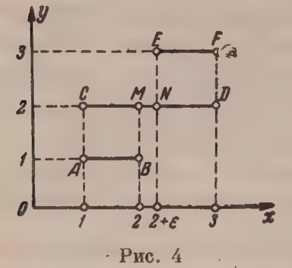


Рис. 4

$$\rho\,[f(x,\ y),\ \varphi^*(x)+\psi^*(y)] = E_{f_M} = E_f$$

(здесь использовано то очевидное утверждение, что если функцию, удовлетворяющую условию Липшица, доопределить по непрерывности, то она на замыкании множества будет удовлетворять условию Липшица с той же константой).

З а м е ч а н и е 1. Требование креста не было излишне, как показывает следующий пример. Областью определения $f(x, y)$ является множество, состоящее из трех отрезков (см. рис. 4). На $[C, D]$ $f(x, y)=0$, на AB и EF график $f(x, y)$ имеет вид, изображенный на рис. 5. На рис. 6 изображен график $f(x, y)$.

Рис. 5

Хотя $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L (см. рис. 4, 5), для любого сколь угодно большого $L>0$, уменьшая отрезок MN (см. рис. 4), можно получить, что всякая функция $\varphi^0(x)+\psi^0(y)$, приближающая $f(x, y)$ с точностью E_f, не удовлетворяет условию Липшица с константой L.

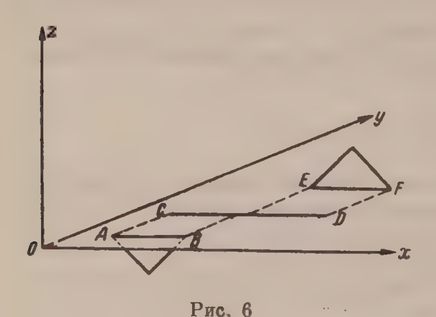


Рис. 6

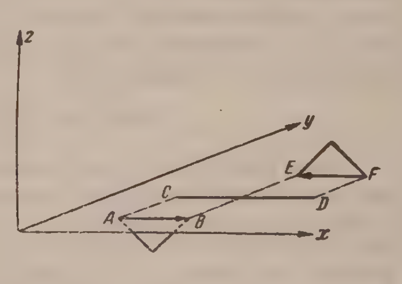


Рис. 7

Для аналогичной функции на множестве незамкнутом (рис. 7) не существует непрерывной наилучшей аппроксимирующей. 2-е семейство рассматриваемой функции, состоящее из трех функций, изображено на рис. 8 *а*). Эквивалентное ему семейство с диаметром $2E_f$ дано на рис. 8*б*) $\left(2E_f=\frac{1}{4}\right)$, где график $\varphi^0(x)$ изображен пунктиром. При этом, как нетрудно заметить, это единственное семейство (с точностью до сдвига всех функций на одну и ту же константу), которое эквивалентно 2-му семейству и имеет диаметр $2E_f$ (заметим, что в общем случае единственность нарушается). Из рассуждений, проведенных в теореме 2, нетрудно заключить, что всякая функция $\varphi^0(x)$ такая, что существует функция

$\psi^0(y)$, удовлетворяющая условию

$$\rho[f, \varphi^0 + \psi^0] = E_f,$$

должна приближать все функции некоторого семейства, эквивалентного 2-му семейству $f(x, y)$, с точностью, не меньшей чем E_f. Но такое семейство необходимо должно иметь диаметр $2E_f$. Так как в нашем случае такое семейство единственно, то функция $\varphi^0(x)$ должна приближать все его функции с точностью

$$E_f = \frac{MK}{2} = \frac{NP}{2}$$

Рис. 8

(см. рис. 8б)). Тогда необходимо

$$\varphi^0(M) = \frac{MK}{2}, \quad \varphi^0(N) = -\frac{PN}{2}, \quad MK = PN = \frac{1}{4}.$$

Так как для любого $L > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = [M, N]$) такое, что $\frac{1}{4\varepsilon} > L$, то наше утверждение доказано (доказательство утверждения относительно незамкнутого множества аналогично).

Замечание 2. Естественно предположить, что теорему 3 можно обобщить так: *пусть $f(x, y)$ равномерно непрерывна и определена на множестве, содержащем крест. Тогда существует наилучшая приближающая $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$ такая, что $\varphi^*(x)$ и $\psi^*(y)$ имеют модуль непрерывности не худший, чем $f(x, y)$.*

Единственное утверждение, которое не обобщается, это утверждение, доказанное в сноске на стр. 249.

После ряда попыток доказать эту обобщенную теорему я пришел к мысли, что для произвольного множества с крестом она не верна, хотя примера, подтверждающего это, нет. Тем не менее такая теорема верна в случае, если Φ есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям (или если Φ есть декартово произведение подмножеств координатных осей). Эта теорема (теорема 4 для $n = 2$) была доказана А. Н. Колмогоровым в 1956 г. (ниже мы кратко изложим ее доказательство для случая функций от n переменных).

Теорема 3 легко обобщается на случай n-мерного пространства.

Пусть в n-мерном пространстве $ox_1, \ldots, x_n$ задано ограниченное множество Φ. Через $A^k_{x_k}$ обозначим подмножество Φ, состоящее из тех и только тех точек, у которых k-я координата есть x_k.

Определение 6. k-й планкой креста назовем такое множество $A^k_{x_k^0} \subseteq \Phi$, проекция которого на подпространство $ox_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ совпадает с проекций Φ на это подпространство.

Если для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$ существует планка креста, то Φ есть множество, содержащее крест (крестом, как и прежде, называется сумма планок).

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L и определена на множестве Φ, содержащем крест, то в классе $\{\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_n(x_n)\}$ для нее существует наилучшая аппроксимирующая $\varphi_1^*(x_1) + \ldots + \varphi_n^*(x_n)$ такая, что $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ удовлетворяют условию Липшица с константой L.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим, так как в нем используются такие же рассуждения, как в доказательствах теорем 3 и 4.

3. ТЕОРЕМА 4. *Пусть Φ есть n-мерный куб в пространстве $ox_1, \ldots, x_n$ с ребрами, параллельными координатным осям, и пусть на Φ задана непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда для нее в классе $\{\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_n(x_n)\}$ существует наилучшая приближающая $\varphi_1^*(x_1) + \ldots + \varphi_n^*(x_n)$ такая, что $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*$ имеют модуль непрерывности не хуже, чем модуль непрерывности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Из леммы 1 (обобщенной на случай n-мерного пространства) следует существование функции $\varphi_1^0(x_1) + \ldots + \varphi_n^0(x_n)$, определенной на плотном подмножестве куба и такой, что

$$\rho[f, \varphi_1^0 + \ldots + \varphi_n^0] = E_f.$$

Пусть значения $f(x_1 \ldots x_n)$ отмечаются на оси oz. Тогда, аналогично предыдущему, мы можем в плоскостях $x_1oz, \ldots, x_noz$ построить n семейств функции f. Рассмотрим 1-е семейство функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_2^0(x_2) - \ldots - \varphi_n^0(x_n)$. Нетрудно видеть, что они эквивалентны и что диаметр 2-го из них равен $2E_f$ (последнее вытекает из обобщенной теоремы 2). Теперь мы используем свойство, присущее лишь множествам, являющимся декартовыми произведениями подмножеств осей: все функции 1-го семейства имеют одну и ту же область определения — проекцию куба на ось ox_1.

Пусть $\varphi_1^*(x_1)$ есть среднее арифметическое верхней и нижней граней 1-го семейства функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_2^0(x_2) - \ldots - \varphi_n^0(x_n).$$

В силу отмеченного выше свойства, а также того обстоятельства, что все функции семейства имеют модуль непрерывности не хуже, чем $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi_1^*(x_1)$ имеет модуль непрерывности не хуже, чем f. Очевидно, что

$$\rho[f(x_1, \ldots, x_n), \varphi_1^*(x_1) + \varphi_2^0(x_2) + \ldots + \varphi_n^0(x_n)] = E_f.$$

Пусть $\varphi_2^*(x_2)$ есть среднее арифметическое точной верхней и нижней граней 2-го семейства функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) - \varphi_1^*(x_1) - \varphi_3^0(x_3) - \ldots - \varphi_n^0(x_n).$$

Аналогично предыдущему, $\varphi_2^*(x_2)$ имеет модуль непрерывности не хуже f и, кроме того,

$$\rho[f(x_1, \ldots, x_n), \varphi_1^*(x_1) + \varphi_2^*(x_2) + \varphi_3^0(x_3) + \ldots + \varphi_n^0(x_n)] = E_f.$$

Далее, последовательно заменяя вышеописанными способами функции $\varphi_3^0(x_3), \ldots, \varphi_n^0(x_n)$ функциями $\varphi_3^*(x_3), \ldots, \varphi_n^*(x_n)$, имеющими модуль непрерывности не хуже, чем $f(x_1, \ldots, x_n)$, мы получаем доказательство теоремы.

Поступило
16. VII. 1959

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 253—276

ЧЭНЬ СЕ-ЧАН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ $\{z^{\nu_n}\}$ НА КРИВЫХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе устанавливается условие полноты системы функций $\{z^{\nu_n}\}$, где $\nu_{n+1}-\nu_n \geqslant h_0 > 0$ ($\nu_0 = 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots$), на кривых в комплексной плоскости при взвешенно-средней аппроксимации.

Введение

Вопросу о полноте системы функций $\{z^n\}$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ в комплексной плоскости посвящен целый ряд исследований. М. М. Джрбашян ([1]), ([2]), используя интегральное преобразование Коши, доказал следующую теорему.

Пусть $\mathscr{L}$ — неограниченная кривая, состоящая из конечного числа ветвей, удаляющихся в бесконечность, и обладающая следующими тремя свойствами:

1) она не содержит петель и спрямляема в любой конечной части плоскости;

2) она разбивает плоскость z на конечное число односвязных бесконечных областей G_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, каждая из которых содержит некоторый угол Δ_i с раствором $\frac{\pi}{\alpha_i}$, $\frac{1}{2} \leqslant \alpha_i < \infty$;

3) если $\sigma(z)$ — длина дуги связного куска кривой $\mathscr{L}$, отсчитываемая от какой-нибудь точки до его точки z, то вдали от начала координат $\sigma(z)$ есть однозначная функция от $|z|$ и $d\sigma(z) \leqslant M d|z|$, где M — некоторая константа.

Допустим, что на $\mathscr{L}$ задана вещественная функция $P(z)$ такая, что при достаточно больших $|z|$

$$P(z) \geqslant P_0(|z|) = P_0(a) + \int_a^{|z|} \frac{\omega(t)}{t}\,dt, \tag{0.1}$$

где a — постоянная, $\omega(t) \geqslant 0$, $\omega(t) \uparrow +\infty$. Утверждается, что если

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+w}}\,dr = +\infty, \quad w = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \tag{0.2}$$

то на $\mathscr{L}$ в классе $L_2[P(z)]$ функций $f(z)$, определенных на $\mathscr{L}$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathscr{L}} e^{-P(z)}|f(z)|^2\,d\sigma < +\infty,$$

система функций $\{z^n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ полна на кривой $\mathscr{L}$ в классе $L_2[P(z)]$, т. е.

$$\inf_{\{Q\}} \int_{\mathscr{L}} e^{-P(z)} |f(z) - Q(z)|^2 d\sigma = 0, \tag{0.3}$$

где $Q(z)$ — всевозможные линейные комбинации функций z^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

А. Ф. Леонтьев ([3]) на основе одновременного применения метода интегрального преобразования Коши, использованного М. М. Джрбашяном в статье ([2]), и метода дифференциальных уравнений бесконечного порядка рассмотрел вопрос о полноте системы функций $\{z^{\nu_n}\}$, где показатели ν_n уже не пробегают всех неотрицательных целых чисел, а только являются их частью. Накладывая на кривую $\mathscr{L}$, на которой осуществляется аппроксимация, и на весовую функцию $e^{-P(z)}$ некоторые дополнительные ограничения, он доказал следующую теорему.

Пусть последовательность $\{\nu_n\}$ является частью последовательности $\{n\}$ всех неотрицательных целых чисел, и пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ является ее дополнением относительно $\{n\}$ $(\{\lambda_n\} = \{n\} - \{\nu_n\})$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma < 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n} = 1 - \sigma > 0 \right).$$

Предположим, что кривая $\mathscr{L}$ обладает перечисленными выше тремя свойствами и, кроме того, пусть каждый угол Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеет раствор $\frac{\pi}{\alpha_i} > 2\pi\sigma$, а одна из областей G_i, скажем G_1, содержит криволинейный угол P (вдали от начала координат P и Δ_1 совпадают) с вершиной в начале (начало, вообще, не принадлежит области G_1), который пересекается с каждой окружностью $|z| = r$, $0 < r < +\infty$, по дуге длиной $> 2\pi\sigma r$ (это означает, что раствор угла P больше $2\pi\sigma$). Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+w+\varepsilon_0}} dr = +\infty, \qquad w = \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m), \qquad \frac{\pi}{\beta_i} = \frac{\pi}{\alpha_i} - 2\pi\sigma, \tag{0.4}$$

то на $\mathscr{L}$ в классе $L_2[P(z)]$ система функций $\{z^{\nu_n}\}$ полна в смысле (0.3) ($Q(z)$ — всевозможные линейные комбинации функций z^{ν_n} $(n = 1, 2, \ldots)$).

В книге С. Мандельбройта ([4]) и совместной работе М. М. Джрбашяна и И. О. Хачатряна ([5]) рассматривается случай, когда последовательность $\{\nu_n\}$ не обязательно состоит из целых чисел, но в этих работах кривая, на которой происходит аппроксимация, предполагается соответственно положительной частью действительной оси, всей осью или границей некоторого угла с вершиной в начале координат. Приведем результат М. М. Джрбашяна и И. О. Хачатряна.

Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\nu_{n+1} - \nu_n \geqslant h_0 > 0,$$

и пусть $\lambda(r) = 2 \sum\limits_{\nu_n < r} \frac{1}{\nu_n}$ — характеристическая функция последова-

тельности $\{\nu_n\}$, для которой при $n\to\infty$ имеет место неравенство

$$\lambda(r)<\frac{2}{h_0}\log r+C_1,$$

где C_1 — константа, не зависящая от r.

Пусть, далее, $L(\alpha)$ — совокупность лучей $\arg z=\pm\frac{\pi}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty\right)$ и

$$K(r,\alpha)=\lambda(r)-\frac{1}{\alpha}\log r,\quad K_*(r,\alpha)=\inf_{r'>r}K(r',\alpha)\leqslant K(r,\alpha).$$

Очевидно, имеем:

$$K(r,\alpha)<\frac{2}{h_0}\log r-\frac{1}{\alpha}\log r+C_1. \tag{0.5}$$

Утверждается, что если при любом b $(0<b\leqslant 1)$ расходятся интегралы

$$\int^{\infty}\frac{P_0(be^{K_*(r,\alpha)})}{r^2}dr=+\infty \tag{0.6}$$

и

$$\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\alpha}}dr=+\infty, \tag{0.7}$$

где вес $P_0(z)$ определен на $L(\alpha)$ и удовлетворяет условию (0.1), то система функций $\{z^{\nu_n}\}$ полна в смысле (0.3) в классе $L_2[P_0(z)]$ на кривой $L(\alpha)$.

Вопрос о полноте системы $\{z^{\nu_n}\}$ на кривых $\mathscr{L}$, удовлетворяющих указанным ранее трем свойствам, но лишь для специального веса вида $e^{-\mu|z|^p}$ $(p>0,\ \mu>0)$, был изучен в диссертации ([6]) и статье ([7]) М. М. Джрбашяна; в этих работах дополнительно предполагалось, что один из углов Δ_i $(i=1,2,\ldots,m)$, например Δ_1, имеет вершину в начале координат.

Вводя характеристическую функцию $\psi(r)$ последовательности $\{\nu_n\}$ по формуле

$$\psi(r)=e^{\lambda(r)}=\begin{cases}\exp[2\nu_1^{-1}] & \text{при } r\leqslant\nu_1,\\ \exp\left[2\sum\limits_{\nu_n<r}\nu_n^{-1}\right] & \text{при } r>\nu_1,\end{cases}$$

М. М. Джрбашян доказал, что если вес имеет вид $e^{-\mu|z|^p}$, где $p\geqslant\max(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m)$, и расходится интеграл

$$\int^{\infty}\frac{\psi^p(r)}{r^{2+p\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)}}dr=+\infty, \tag{0.8}$$

то система функций $\{z^{\nu_n}\}$ полна в классе $L_2[e^{\mu|z|^p}]$ на кривой $\mathscr{L}$ в смысле (0.3), причем если $p<\max(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m)$, то, вообще говоря, свойство полноты нарушается.

В настоящей работе тем же методом, что и в статье А. Ф. Леонтьева ([3]), с заменой ядра Коши на другое ядро, рассматривается вопрос о полноте системы функций $\{z^{\nu_n}\}$, где ν_n — не обязательно целые числа на кривой $\mathscr{L}$, принадлежащей к некоторому широкому классу кривых, при весе, удовлетворяющем условию (0.1).

Именно, пусть $\{\nu_n\}$ — возрастающая последовательность действительных чисел такая, что

$$\nu_{n+1}-\nu_n \geqslant h_0 > 0 \quad (\nu_0=0;\ n=0,1,2,\ldots), \tag{0.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}=D_\nu>0. \tag{0.10}$$

Пусть $\mathcal{L}$ — неограниченная кривая, состоящая из конечного числа ветвей, удаляющихся в бесконечность, и обладающая следующими свойствами:

1) она не содержит петель и спрямляема в любой конечной части плоскости;

2) она разбивает плоскость z на конечное число односвязных бесконечных областей G_i $(i=1,2,\ldots,m)$, каждая из которых содержит некоторый угол Δ_i с раствором $\frac{\pi}{\alpha_i}$, $\frac{1}{2}\leqslant\alpha_i<\infty$;

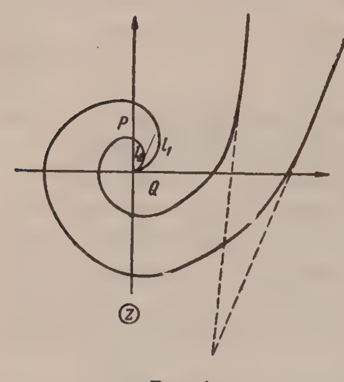


Рис. 1

3) если $\sigma(z)$ — длина дуги связного куска кривой L, отсчитываемая от какой-нибудь точки до его точки z, то вдали от начала координат $\sigma(z)$ есть однозначная функция от $|z|$ и $d\sigma(z)\leqslant\leqslant Md|z|$, где M — некоторая константа;

4) одна из областей G_i $(i=1,2,\ldots,m)$, скажем G_1, содержит некоторый криволинейный угол P с вершиной в начале (см. рис. 1). Вдали от начала угол P совпадает с углом Δ_1. Каждая из сторон l_1 и l_2 угла P пересекается с любой окружностью с центром в начале только в одной точке. К сторонам l_1, l_2 угла можно провести в начале касательные. Угол P имеет раствор, больший или равный $\frac{\pi}{\alpha_1}$, причем

$$\frac{1}{\alpha_1}>2(1-D_\nu).$$

Допустим, что на $\mathcal{L}$ задана вещественная функция $P(z)$, удовлетворяющая условию (0.1).

В этих предположениях мы утверждаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если при некотором* $\varepsilon_0>0$

$$\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+w}}\,dr=+\infty,\qquad w=\max\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}-2(1-D_\nu)}+\varepsilon_0\right)^{*}, \tag{0.11}$$

то система $\{z^{\nu_n}\}$ *полна на* $\mathcal{L}$ *в классе* $L_2[P(z)]$.

* Если $D_\nu\leqslant 1$, то $w=\max\left(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_m,\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}-2(1-D_\nu)}+\varepsilon_0\right)$

Если предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}$ не существует, то в условии 4), налагаемом на кривую $\mathcal{L}$, угол P будем считать прямолинейным с вершиной в начале, имеющим раствор, больший чем $2(1-D_{*\nu})$, где

$$D_{*\nu}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}.$$

В этом случае будет иметь место

ТЕОРЕМА 1′. *Если при некотором* $\varepsilon_0>0$

$$\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+w}}\,dr=+\infty,\qquad w=\max\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}-2(1-D_{*\nu})}+\varepsilon_0\right),$$

то система $\{z^{\nu_n}\}$ *полна на* $\mathcal{L}$ *в классе* $L_2[P(z)]$.

Прежде чем доказывать эти теоремы, установим некоторые вспомогательные предложения.

§ 1. Вспомогательные предложения

Пусть Q — область, дополнительная к углу P относительно плоскости z. В качестве разреза в плоскости z возьмем нижнюю сторону l_1 угла P. При отображении $z=e^{\xi}$ область Q перейдет в некоторую область Q', кривая $\mathcal{L}$ — в кривую $\mathcal{L}'$, лежащую в замкнутой области $\overline{Q'}$, стороны l_1, l_2 угла — в кривые l_1', l_2' (см. рис. 2).

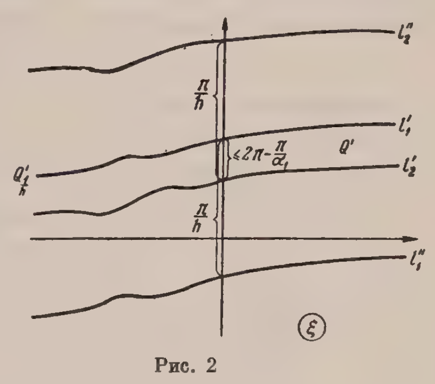


Рис. 2

Так как к кривым l_1, l_2 в начале можно провести касательные и так как вдали от начала координат l_1 и l_2 расположены на прямых (сторонах угла Δ_1), то кривые l_1' и l_2' при $\operatorname{Re}\xi\to-\infty$ неограниченно приближаются к горизонтальным прямым, а при $\operatorname{Re}\xi\to+\infty$ — также к горизонтальным прямым (вообще другим). Отсюда, в частности, следует, что существует горизонтальная полоса $|\operatorname{Im}\xi|\leqslant N$, целиком содержащая внутри себя область Q'.

Пусть h — некоторое достаточно малое положительное число. Обозначим через l_1'' кривую, которая получится, если мы сместим кривую l_1' вниз на расстояние $\frac{\pi}{h}$; через l_2'' обозначим кривую, которая получится, если мы сместим l_2' вверх на расстояние $\frac{\pi}{h}$.

Каждая из кривых l_1'' и l_2'' пересекается с любой прямой, параллельной мнимой оси, очевидно, только в одной точке. Область, ограниченную кривыми l_1'' и l_2'', обозначим через $Q'_{\frac{1}{h}}$ (см. рис. 2); она имеет раствор, больший или равный

$$2\,\frac{\pi}{h}-\left(2\pi-\frac{\pi}{\alpha_1}\right)=\pi\left[\frac{2}{h}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\right].$$

Наконец, через K обозначим область, которая получится, если мы удалим из плоскости луч, идущий из точки мнимой оси $i\,\frac{\pi}{h}$ верти-

кально вверх, и луч, идущий из точки мнимой оси $-i\frac{\pi}{h}$ вертикально вниз.

ЛЕММА 1. *Если переменная s изменяется в области $Q'_{\frac{1}{h}}$, а переменная ξ — в замкнутой области $\overline{Q}'$, то переменная $s-\xi=u$ остается в области K.*

Если переменная s изменяется в области $Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$ (которая получается, если в определении области $Q'_{\frac{1}{h}}$ величину $\frac{\pi}{h}$ заменить величиной $\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon_1\right)$), а ξ — в замкнутой области $\overline{Q}'$, то существует некоторое положительное число $\delta(\varepsilon_1)$, зависящее от ε_1 и свойств кривых $\mathcal{L}$, такое, что переменная $s-\xi=u=u_1+iu_2$ остается в области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$, ограниченной (см. рис. 3) *горизонтальными отрезками*

$$u_2=\pm\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right),\quad |u_1|\leqslant\delta(\varepsilon_1),$$

вертикальными отрезками

$$u_1=\pm\delta(\varepsilon_1),\qquad N+\frac{\pi}{h}\geqslant|u_2|\geqslant\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right),$$

и горизонтальными отрезками

$$u_2=\pm\left(N+\frac{\pi}{h}\right),\quad |u_1|\geqslant\delta(\varepsilon_1).$$

Доказательство. Первое утверждение почти очевидно. В самом деле, если

$$\operatorname{Re}u=\operatorname{Re}(s-\xi)=0,$$

то

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|<\frac{\pi}{h}$$

и потому $u\in K$, а если

$$\operatorname{Re}u=\operatorname{Re}(s-\xi)\neq 0,$$

то u, конечно, лежит в области K.

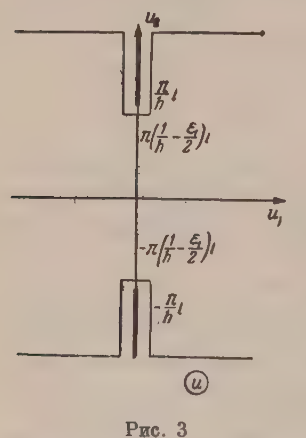


Рис. 3

Докажем второе утверждение. Ясно, что если

$$\operatorname{Re}u=\operatorname{Re}(s-\xi)=0,$$

то

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|<\frac{\pi}{h}-\frac{\pi\varepsilon_1}{2}$$

и, значит, $u\in K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда

$$\operatorname{Re}u=\operatorname{Re}(s-\xi)\neq 0.$$

Пусть ξ изменяется на нижней кривой l'_2 полосы Q'. Величина $\operatorname{Im}\xi$ при этом есть однозначная равномерно непрерывная функция от $\operatorname{Re}\xi$, так как при $\operatorname{Re}\xi\to\pm\infty$ $\operatorname{Im}\xi$ стремится к некоторым определенным пределам. Следовательно, для любого $\varepsilon_1>0$ найдется число

$\delta_1(\varepsilon_1)$ такое, что при любых ξ_1 и ξ из неравенства

$$|\operatorname{Re}(\xi-\xi_1)|\leqslant\delta_1(\varepsilon_1)$$

вытекает неравенство

$$|\operatorname{Im}(\xi-\xi_1)|<\frac{\varepsilon_1}{2}\pi.$$

Пусть s изменяется на l_2''' — верхней границе области $Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$; тогда

$$s=\xi_1+i\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon_1\right),$$

где $\xi_1\in l_2'$ — нижней границе области Q', и при

$$|\operatorname{Re}(s-\xi)|=|\operatorname{Re}(\xi_1-\xi)|\leqslant\delta_1(\varepsilon_1)$$

имеем:

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|=\left|\operatorname{Im}\left(\xi_1-\xi+i\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon_1\right)\right)\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon_1}{2}\pi+\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon_1\right)=\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

При $s\in l_2'''$, $\xi\in\overline{Q}'$ и $|\operatorname{Re}(s-\xi)|\leqslant\delta_1(\varepsilon_1)$ тем более имеем:

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|<\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

Совершенно аналогично можно доказать, что при $s\in l_1'''$ — нижней границе области $Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$, $\xi\in\overline{Q}'$ и $|\operatorname{Re}(s-\xi)|\leqslant\delta_2(\varepsilon_1)$, где $\delta_2(\varepsilon_1)$ — некоторая константа, имеет место неравенство

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|<\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right).$$

Отсюда вытекает, что если мы выберем $\delta(\varepsilon_1)=\min(\delta_1(\varepsilon_1),\delta_2(\varepsilon_1))$, то при $s\in\overline{Q}'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$, $\xi\in\overline{Q}'$ и $|\operatorname{Re}(s-\xi)|\leqslant\delta(\varepsilon_1)$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|<\pi\left(\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon_1}{2}\right)$$

и, следовательно, $u=s-\xi\in K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$.

Пусть теперь $|\operatorname{Re}(s-\xi)|>\delta(\varepsilon_1)$. В силу того, что $\overline{Q}'$ лежит в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\xi|\leqslant N$, имеем:

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|\leqslant N+\frac{\pi}{h},$$

и поэтому $u\in K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$.

Лемма полностью доказана.

Вторая лемма касается одного ряда Дирихле, подробно изученного С. Мандельбройтом в книге ([4]). Приведем некоторые факты, изложенные в этой книге.

Пусть $\{\mu_n\}$, $0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n<\ldots$, — последовательность чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\mu_{n+1}-\mu_n\geqslant\frac{h}{2}>0,\quad|\mu_{n+1}-nh|\leqslant h. \tag{1.1}$$

Очевидно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu^n} = \frac{1}{h}. \tag{1.2}$$

Введем функцию

$$M(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right); \tag{1.3}$$

она принадлежит классу $\left[1, \frac{\pi}{h}\right]$ и обладает следующими свойствами:

а) в силу (1.2), на мнимой оси

$$M(iy) > e^{\pi\left(\frac{1}{h} - \varepsilon\right) y}, \quad |y| \geqslant N(\varepsilon); \tag{1.4}$$

б) в силу (1.1),

$$\left|\frac{1}{M'(\mu_n)}\right| \leqslant C_2 \mu_n^5 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.5}$$

где C_2 — константа (в дальнейшем мы всегда будем обозначать константы через $C_i (i = 1, 2, \ldots)$).

Ряд Дирихле, о котором шла речь, имеет вид

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n s}, \quad s = \sigma + it. \tag{1.6}$$

В силу (1.1) и (1.5), ряд (1.6) сходится абсолютно и равномерно в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha > 0$, причем в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant \alpha > 0$ его сумма, очевидно, ограничена.

Функцию $g(s)$ можно представить в интегральном виде:

$$g(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-irs}}{M(ir)} dr + \int_0^{\infty} \frac{e^{irs}}{M(-ir)} dr. \tag{1.7}$$

Это представление, в силу (1.4), имеет место при $|\operatorname{Im} s| < \frac{\pi}{h}$, и из него видно, что функция $g(s)$ есть четная функция; следовательно, $g(s)$ регулярна в области K и ограничена во всякой области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$.

Из (1.6), согласно (1.1) и (1.5), получаем при $\sigma > 0 \, (s = \sigma + it)$:

$$|g(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n \sigma}}{|M'(\mu_n)|} \leqslant C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^5 e^{-\frac{nh\sigma}{2}} = O\left(\frac{1}{\sigma^6}\right). \tag{1.8}$$

В силу четности функции $g(s)$, такая же оценка имеет место и при $\sigma < 0$. Из оценки (1.8) и условий (1.1), (1.5) при $|\operatorname{Im} s| < \frac{\pi}{h}$ и для любого $\delta > \frac{h}{2}$ в книге выведена оценка:

$$\left| g(s) - \sum_{\mu_n \leqslant \delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n s} \right| \leqslant C_4 \left(1 + \frac{1}{\left|s^2 + \frac{\pi^2}{h^2}\right|^6}\right) \delta^5 e^{-\delta\sigma}. \tag{1.9}$$

Для дальнейшего нам нужно будет показать, что оценка (1.9) имеет место в области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$ (см. рис. 3). Для этого нам придется по

вторить рассуждения С. Мандельбройта, приспособляя их к нашему случаю. При $\sigma > 0$ [см. ([4]), стр. 163]

$$\left| g(s) - \sum_{\mu_n \leqslant \delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n s} \right| \leqslant C_5 \delta^5 e^{-\delta\sigma} \left(1 + \frac{1}{\sigma^6}\right)$$

Следовательно, неравенство (1.9) имеет место при $\sigma \geqslant \delta(\varepsilon_1)$, причем C_4 зависит, вообще, от ε_1.

При $\sigma < 0$ [см. ([4]), стр. 164] имеем:

$$\left| g(s) - \sum_{\mu_n \leqslant \delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n s} \right| < |g(s)| + \frac{C_6 \delta^5 e^{-\delta\sigma}}{1 - e^{\frac{h}{2}\sigma}}.$$

Так как при $\sigma < -\delta(\varepsilon_1)$ функция $g(s)$ ограничена, $|g(s)| \leqslant M$, то отсюда получим, что при $\sigma < -\delta(\varepsilon_1)$ правая часть неравенства не превосходит $C_7 \delta^5 e^{-\delta\sigma}$, где C_7 зависит от ε_1. Значит, при $\sigma < -\delta(\varepsilon_1)$ оценка (1.9) имеет место. Эта оценка [см. ([4]), стр.164] выполняется и при $|\sigma| \leqslant 1$, $|t| < \frac{\pi}{h}$. Следовательно, оценка (1.9) выполняется во всей области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$. Таким образом, нами доказана

ЛЕММА 2. *В области* $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$ *справедливо соотношение* (1.9).

ЛЕММА 3 (о перемене порядка интегрирования). *Пусть функция* $V(\xi)$ *определена и абсолютно интегрируема на кривой* $\mathcal{L}'$, *а функция* $G(y)$ *непрерывна на всей действительной оси. Если*

1) *интеграл* $\int_{-\infty}^{\infty} G(y) e^{-iys} e^{iy\xi} dy$ *абсолютно и равномерно сходится относительно* $\xi \in \mathcal{L}'$ *для любого фиксированного* $s \in (-\infty, +\infty)$,

2) *для любого* $s \in (-\infty, +\infty)$ *существует интеграл*

$$F(s) = \int_{\mathcal{L}'} V(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{-iys} e^{iy\xi} dy \right\} d\sigma',$$

где $d\sigma'$ — *дифференциал дуги кривой* $\mathcal{L}'$,

3) *для любого* s *существует интеграл*

$$F_1(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{-iys} \left\{ \int_{\mathcal{L}'} V(\xi) e^{iy\xi} d\sigma' \right\} dy,$$

то

$$F(s) = F_1(s).$$

Доказательство. Очевидно, лемму достаточно доказать для случая, когда $\mathcal{L}'$ состоит из одной ветви и $V(\xi)$ не почти всюду равняется нулю.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $R_1(s, \varepsilon)$ такое, что при $R \geqslant R_1(s, \varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left| F(s) - \int_{R\mathcal{L}'} V(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{-iys} e^{iy\xi} dy \right\} d\sigma' \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.10}$$

где $R\mathcal{L}'$ — пересечение круга $|z| \leqslant R$ с кривой $\mathcal{L}'$.

В силу условия 1), для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $N_1(s, \varepsilon)$ такое, что при $n \geqslant N_1(s, \varepsilon)$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi} dy - \int_{-n}^{+n} G(y)\, e^{-iys} e^{iys}\, dy \right| \leqslant \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)|\, d\sigma'}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \int_{R\mathscr{L}'} V(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi} dy \right\} d\sigma' - \int_{R\mathscr{L}'} V(\xi) \left\{ \int_{-n}^{+n} G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi} dy \right\} d\sigma' \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R\mathscr{L}'} |V(\xi)| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{-iys} e^{iys} dy - \int_{-n}^{+n} G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi} dy \right| d\sigma' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{R\mathscr{L}'} |V(\xi)|\, d\sigma' \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{\int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)|\, d\sigma'} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.11)$$

Объединяя (1.10) и (1.11), получим:

$$\left| F(s) - \int_{0}^{l} V[\xi(\sigma')] \left\{ \int_{-n}^{+n} G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi(\sigma')} dy \right\} d\sigma' \right| < \varepsilon, \qquad (1.12)$$

где l — длина кривой $R\mathscr{L}'$, $\xi(\sigma')$ — непрерывная функция от дуги σ' кривой $R\mathscr{L}'$ (в силу спрямляемости кривой $R\mathscr{L}'$).

Функция

$$G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi(\sigma')}$$

непрерывна в квадрате I: $-n \leqslant y \leqslant n$, $0 \leqslant \sigma' \leqslant l$, следовательно, она измерима в нем как функция от двух переменных y и σ' и ограничена. Отсюда следует, что функция

$$V[\xi(\sigma')]\, G(y)\, e^{-iys} e^{iy\xi(\sigma')}$$

измерима и интегрируема в квадрате I. Но тогда, по теореме Фубини, в соотношении (1.12) можно поменять местами порядки интегрирования, и мы получим:

$$\left| F(s) - \int_{-n}^{+n} G(y)\, e^{-iys} \left\{ \int_{R\mathscr{L}'} V(\xi)\, e^{iy\xi} d\sigma' \right\} dy \right| < \varepsilon.$$

В силу условия 3), при $R \to +\infty$, $n \to +\infty$ найдем:

$$|F(s) - F_1(s)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε, отсюда получаем:

$$F(s) = F_1(s).$$

§ 2. Доказательство теорем 1 и 1′

Для того чтобы доказать теорему 1, согласно теореме Рисса — Фишера достаточно установить, что из равенства нулю моментов

$$\int_{\mathscr{L}} e^{-P(z)}\, \overline{f(z)}\, z^{\nu_n} d\sigma = 0, \quad f(z) \in L_2[P(z)], \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2.1)$$

следует равенство $f(z) = 0$ почти всюду на $\mathscr{L}$. Итак, пусть имеют место равенства (2.1).

Для любого h, $0<h<h_0$, найдется последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что последовательности $\{\nu_n\}$ и $\{\lambda_n\}$ будут дополнительными по индексу (h, h) [см. (4)]; это значит, что возрастающая последовательность чисел $\{\mu_n\}$, состоящая из $\{\nu_n\}$ и $\{\lambda_n\}$, удовлетворяет условию:

$$\mu_{n+1}-\mu_n \geqslant \frac{h}{2}, \quad |\mu_{n+1}-nh| \leqslant h \quad (\mu_0=0,\ n=0,1,2,\ldots).$$

Положим

$$D_\nu^* = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n}{\nu_n}, \qquad D_{*\nu} = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n}{\nu_n},$$

$$D_\lambda^* = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n}{\lambda_n}, \qquad D_{*\lambda} = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Очевидно, имеем:

$$D_\lambda^* + D_{*\nu} = D_{*\lambda} + D_\nu^* = \frac{1}{h}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)}\,|e^\xi|\,\overline{f(e^\xi)}\,g(s-\xi)\,d\sigma', \qquad s \in Q'_{\frac{1}{h}}, \tag{2.3}$$

где $\mathscr{L}'$ — образ $\mathscr{L}$ в плоскости ξ при отображении $z=e^\xi$ (он целиком лежит в области $\overline{Q}'$), $d\sigma'$ — элемент длины кривой $\mathscr{L}'$, $f(z) \in L_2[P(z)]$ и $g(s)$ — регулярная в K функция, определенная рядом Дирихле (1.6).

Согласно лемме 1, приходим к выводу, что функция $g(s-\xi)$ аналитична при $s \in Q'_{\frac{1}{h}}$ и $\xi \in \mathscr{L}'$, так как переменная $u=s-\xi$ при этих условиях принадлежит области K, и равномерно ограничена при $s \in Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon}$ и $\xi \in \mathscr{L}'$, так как переменная $u=s-\xi$ при этих условиях принадлежит области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$. Тем самым доказано, что $F(s)$ является аналитической функцией в области $Q'_{\frac{1}{h}}$ и ограниченной в области $Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$. Учитывая (2.3), можно представить $F(s)$ в виде:

$$F(s) = \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)}\,|e^\xi|\,\overline{f(e^\xi)} \sum_{\mu_n\leqslant\delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n(s-\xi)}\,d\sigma' +$$

$$+ \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)}\,|e^\xi|\,\overline{f(e^\xi)}\,[g(s-\xi) - \sum_{\mu_n\leqslant\delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n(s-\xi)}]\,d\sigma' =$$

$$= J_\delta(s) + R_\delta(s). \tag{2.4}$$

В силу (2.1),

$$\int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)}\,|e^\xi|\,\overline{f(e^\xi)}\,e^{\mu_n\xi}\,d\sigma' = 0$$

при всех μ_n, которые не входят в $\{\lambda_n\}$, поэтому

$$J_\delta(s) = \sum_{\lambda_n\leqslant\delta} \left[\frac{1}{M'(\lambda_n)} \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)}\,|e^\xi|\,\overline{f(e^\xi)}\,e^{\lambda_n\xi}\,d\sigma'\right] e^{-\lambda_n s}.$$

Оценим теперь $R_\delta(s)$. В силу леммы 1, при $s \in Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$, $\xi \in \mathscr{L}'$ переменная $s-\xi=u$ принадлежит области $K_{\frac{\varepsilon_1}{2}}$. Поэтому, согласно лемме 2,

при $s \in Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$, $\xi \in \mathcal{L}'$, $\delta > \frac{h}{2}$ справедливо неравенство:

$$|g(s-\xi) - \sum_{M_n < \delta} \frac{1}{M'(\mu_n)} e^{-\mu_n(s-\xi)}| \leqslant C_4 \left(1 + \frac{1}{\left|(s-\xi)^2 + \frac{\pi^2}{h^2}\right|^6}\right) \delta^5 e^{-\delta\sigma} |e^\xi|^\delta \leqslant$$
$$\leqslant C_8 \delta^5 e^{-\delta\sigma} |e^\xi|^\delta, \quad s = \sigma + it. \tag{2.5}$$

Следовательно,

$$|R_\delta(s)| \leqslant C_8 \delta^5 e^{-\delta\sigma} \int_{\mathcal{L}'} e^{-P(e^\xi)} \, |e^\xi| \, |f(e^\xi)| \, |e^\xi|^\delta \, d\sigma'.$$

Применяя неравенство Буняковского и учитывая принадлежность $f(z)$ к классу $L_2[P(z)]$, а также свойства кривой $\mathcal{L}$ и условие (0.1), получим нужную нам оценку:

$$|R_\delta(s)| \leqslant C_8 \delta^5 \frac{\sqrt{\int_{\mathcal{L}'} e^{-P(e^\xi)} \, |e^\xi| \, |f(e^\xi)|^2 d\sigma'} \sqrt{\int_{\mathcal{L}'} e^{-P(e^\xi)} \, |e^\xi| \, |e^\xi|^{2\delta} d\sigma'}}{|e^s|^\delta} \leqslant$$
$$\leqslant C_8 \delta^5 \frac{\sqrt{\int_{\mathcal{L}} e^{-P(z)} |f(z)|^2 d\sigma}}{|e^s|^\delta} \left(\sqrt{\int_{\substack{\mathcal{L} \\ |z| \leqslant r_0}} e^{-P(z)} |z|^{2\delta} d\sigma + \int_{\substack{\mathcal{L} \\ |z| \geqslant r_0}} e^{-P(z)} |z|^{2\delta} d\sigma} \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_9 \delta^5 \frac{\sqrt{r_0^{2\delta} + \int_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(z)} r^{2\delta} dr}}{|e^s|^\delta} \leqslant$$
$$\leqslant C_{10} \delta^5 \frac{\sqrt{\int_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r)} r^{2\delta} dr}}{|e^s|^\delta}, \quad s = \sigma + it \in Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}, \tag{2.6}$$

где r_0 — некоторая константа. Этой оценкой мы воспользуемся позднее, а сейчас введем один оператор.

Положим

$$l(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{n!} z^n, \qquad \gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{z^{n+1}}$$

и

$$L[y(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \gamma(\xi - s) \, y(\xi) \, d\xi. \tag{2.7}$$

По условию теоремы 1, существует предел

$$D_\nu = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\nu_n},$$

следовательно, существует предел

$$D_\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{1}{h} - D_\nu < +\infty.$$

В силу этого, функция $\gamma(z)$ регулярна вне вертикального отрезка длиной $2\pi D_\lambda$ с центром в начале координат.

В интервале (2.7) под C_s мы понимаем замкнутый контур, охватывающий вертикальный отрезок длиной $2\pi D_\lambda$ с центром в точке s; внутри этого контура функция $y(\xi)$ — аналитическая.

Оператор $L[y(s)]$ обладает следующими свойствами [см. ([8])]:

1) он определен в каждой точке s_0, являющейся центром некоторого вертикального отрезка длиной, большей $2\pi D_\lambda$, в котором функция $y(s)$ регулярна, причем если функция $y(s)$ регулярна в прямоугольнике R: $|\operatorname{Re}(s-s_0)|\leqslant\varepsilon_1, |\operatorname{Im}(s-s_0)|\leqslant\pi(D_\lambda+\varepsilon_1)$, то существует не зависящая от $y(s)$ и s_0 константа $N(\varepsilon_1)$ такая, что в точке s_0

$$|L[y]|\leqslant N(\varepsilon_1)\max_{x\in R}|y(s)|; \tag{2.8}$$

2) $L[e^{\pm\lambda_n s}]=0$, в силу чего

$$L[J_\delta(s)]=0; \tag{2.9}$$

3) если $y(s)$ аналитична в прямоугольнике R, $L[y]=0$ в некоторой окрестности R_0 точки s_0 и $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant q>0$ $\left(\text{в нашем случае } q=\frac{h}{2}\right)$, то в области R_0 функция $g(s)$ представляется абсолютно сходящимся рядом:

$$g(s)=\sum C_{\pm n}e^{\pm\lambda_n s}.$$

Если дополнительно предположить, что функция $y(s)$ аналитична в некоторой криволинейной полосе G, простирающейся неограниченно слева направо, ширина которой в вертикальном направлении больше чем $2\pi(D_\lambda+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$, причем в некоторой окрестности средней линии этой полосы $L[y(s)]=0$, то представление $g(s)$ в виде ряда Дирихле будет иметь место во всей плоскости, и, значит, $g(s)$ является целой функцией.

Рис. 4

Возьмем в качестве G область $Q'_{\frac{1}{h}}$; она имеет раствор, больший или равный $\pi\left[\frac{2}{h}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\right]$. По условию теоремы 1,

$$\pi\left[\frac{2}{h}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\right]-2\pi D_\lambda=\pi\left[\frac{1}{\alpha_1}-2(1-D_\nu)\right]>0.$$

Имея это в виду, обозначим через $g\subset G$ криволинейную полосу с шириной в вертикальном направлении

$$\pi\left[\frac{1}{\alpha_1}-2(1-D_\nu)-4\varepsilon_1\right]>0,\quad \varepsilon_1>0,$$

граница которой отстоит от границы $G=Q'_{\frac{1}{h}}$ в вертикальном направлении на расстояние, большее или равное $\pi(D_\lambda+2\varepsilon_1)$ (см. рис. 4).

На основании свойств оператора L и в силу (2.4) и (2.9), получим:

$$\Phi(s)=L[F(s)]=L[R_\delta(s)],\quad s\in g.$$

Учитывая (2.8), находим:

$$|\Phi(s)|=|L[R_\delta(s)]|\leqslant N(\varepsilon_1)\max_{\substack{\operatorname{Re}s-\varepsilon_1\pi\leqslant\operatorname{Re}\eta\leqslant\operatorname{Re}s+\varepsilon_1\pi\\ \eta\in\overline{Q}'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}}}|R_\delta(\eta)|,\quad s\in g.$$

Принимая во внимание (2.6), получим:

$$|\Phi(s)| = |L\,[R_\delta(s)]| \leqslant C_{11} \max_{\substack{\operatorname{Re} s - \varepsilon_1\pi \leqslant \operatorname{Re}\eta \leqslant \operatorname{Re} s + \varepsilon_1\pi \\ \eta \in \overline{Q}'_{\frac{1}{h} - \varepsilon_1}}} \delta^5 \frac{\sqrt{\int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r)} r^{2\delta}\,dr}}{|e^{\eta}|^{\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\delta^5 \frac{\sqrt{\int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r)} r^{2\delta}\,dr}}{\left|\dfrac{e^{s}}{e^{\varepsilon_1\pi}}\right|^{\delta}}, \qquad s \in g. \tag{2.10}$$

Переходя от s к w с помощью отображения $w = e^s$, в силу (2.10) и произвольности δ, $\delta > \frac{h}{2}$, будем иметь:

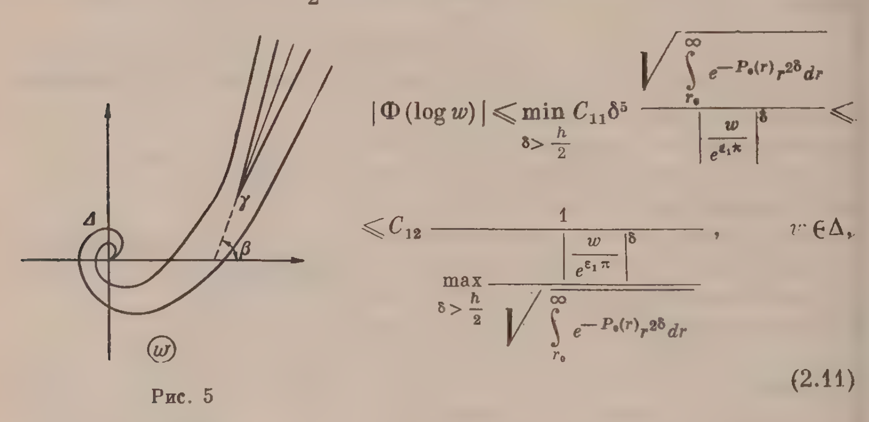


Рис. 5

$$|\Phi(\log w)| \leqslant \min_{\delta > \frac{h}{2}} C_{11}\delta^5 \frac{\sqrt{\int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r)} r^{2\delta}\,dr}}{\left|\dfrac{w}{e^{\varepsilon_1\pi}}\right|^{\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \frac{1}{\max\limits_{\delta > \frac{h}{2}} \dfrac{\left|\dfrac{w}{e^{\varepsilon_1\pi}}\right|^{\delta}}{\sqrt{\int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r)} r^{2\delta}\,dr}}}, \qquad w \in \Delta, \tag{2.11}$$

где Δ — криволинейный угол в плоскости w с раствором $\pi\left[\frac{1}{\alpha} - 2(1 - D_\nu) - 4\varepsilon_1\right]$, полученный из области g при отображении $w = e^s$ (см. рис. 5).

Применим теперь следующую лемму, доказанную в статье М. М. Джрбашяна (²).

Если

$$m_n = \int\limits_{r_0}^{\infty} e^{-P_0(r) r^n}\,dr, \quad T(r) = \max_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{\sqrt{m_{2n}}},$$

то существует число $q_0 > 0$ такое, что при больших r имеет место неравенство

$$\log T(r) \geqslant q_0 P_0(r).$$

Согласно этой лемме, в силу (2.11), при достаточно больших $|w|$, $w \in \Delta$, имеем:

$$|\Phi(\log w)| \leqslant C_{12}\, e^{-q_0 P_0\left(\frac{|w|}{e^{\varepsilon_1\pi}}\right)}.$$

Так как вдали от начала стороны угла Δ прямолинейны, то внутри Δ возьмем прямолинейный угол Δ_1 (см. рис. 5) с вершиной в точке γ, у которого биссектриса наклоняется к действительной оси под углом β. При отображении $\zeta = e^{-i\beta}(w-\gamma)$ угол Δ_1 перейдет в угол с вершиной в начале, у которого биссектриса будет положительной частью действительной оси.

Отображение

$$t = \zeta^{\frac{1}{A}} = [e^{-i\beta}(w-\gamma)]^{\frac{1}{A}},$$

где

$$A = \frac{1}{\alpha_1} - 2(1-D_\nu) - 4\varepsilon_1,$$

очевидно, преобразует угол Δ_1 в правую полуплоскость. При достаточно больших $|t|$ в правой полуплоскости будем иметь:

$$|\Phi[\log(e^{i\beta}t^A+\gamma)]| \leqslant C_{12}e^{-q_0P_0\left[\frac{1}{e^{\varepsilon_1\pi}}|e^{i\beta}t^A+\gamma|\right]} \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}e^{-q_0P_0\left[\frac{1}{e^{\varepsilon_1\pi}}(|t|^A-\gamma)\right]}.$$

Отсюда следует:

$$A_1 = \int^{\infty} \frac{\log|\Phi[\log(e^{i\beta}(iv)^A+\gamma)]|}{v^2}dv \leqslant C_{14} - \int^{\infty} \frac{q_0P_0[C_{13}(v^A-|\gamma|)]}{v^2}dv.$$

Сделав замену $r = C_{13}(v^A-|\gamma|)$, получим:

$$A_1 \leqslant C_{14} - \frac{q_0}{AC_{13}}\int^{\infty}\frac{P_0 r}{\left(\frac{r}{C_{13}}+|\gamma|\right)^{1+\frac{1}{A}}}dr \leqslant$$

$$\leqslant C_{14} - \frac{q_0}{AC_{13}}\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{\left(\frac{2r}{C_{13}}\right)^{1+\frac{1}{A}}}dr = C_{14} - \frac{q_0C_{13}^{\frac{1}{A}}}{A2^{1+\frac{1}{A}}}\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{A}}}dr. \qquad (2.12)$$

По условию теоремы, имеем:

$$\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-2(1-D_\nu)}+\varepsilon_0}}dr = +\infty,$$

поэтому при малом $\varepsilon_1 > 0$

$$\int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{A}}}dr = \int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-2(1-D_\nu)-4\varepsilon_1}}}dr = \int^{\infty}\frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-2(1-D_\nu)}+\varepsilon_0}}dr = +\infty.$$

Следовательно, согласно (2.12), $A_1 = -\infty$.

Аналогично можно показать, что

$$A_2 = \int_{\infty}\frac{\log|\Phi[\log(e^{i\beta}(iv)^A+\gamma)]|}{v^2}dv = -\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|\Phi[\log(e^{i\beta}(iv)^A+\gamma)]|}{v^2}dv = -\infty.$$

Это соотношение, в силу известной теоремы Карлемана, возможно только в случае, когда

$$\Phi[\log(e^{i\beta}(t^A+\gamma))]\equiv 0.$$

Так как

$$L[F(s)]=\Phi[\log(e^{i\beta}(t^A+\gamma))],$$

то, следовательно,

$$L[F(s)]=0, \quad s\in g.$$

Отсюда, по свойству 3) оператора $L[y(s)]$, заключаем, что функция $F(s)$ представляется рядом по функциям $e^{\pm\lambda_n s}$ во всей плоскости

$$F(s)=\sum C_{\pm n}e^{\pm\lambda_n s}.$$

Ранее было отмечено, что функция $F(s)$ ограничена в области $Q'_{\frac{1}{h}-\varepsilon_1}$, которая имеет ширину в вертикальном направлении, равную

$$\pi\left[\frac{2}{h}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)-2\varepsilon_1\right]>2\pi D_\lambda;$$

в силу этого, по обобщенной теореме Лиувилля [см. ([4]), стр. 247, а также ([9]), стр. 225], имеем:

$$F(s)\equiv 0. \tag{2.13}$$

Исследуем это равенство. Обращаясь к формуле (2.3), заметим, что из (1.7) следует, что в полосе $|t|<\frac{\pi}{h}$, $s=\sigma+it$

$$g(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-isy}}{M(iy)}\,dy,$$

причем интеграл справа сходится абсолютно и равномерно при $|\operatorname{Im}s|\leqslant \frac{\pi}{h}-\varepsilon$, каково бы ни было ε, $0<\varepsilon<\frac{\pi}{h}$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что интеграл

$$g(s-\xi)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i(s-\xi)\cdot y}}{M(iy)}\,dy \tag{2.14}$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $\xi\in\mathscr{L}'$ и $s\in(-\infty,+\infty)$, так как кривая $\mathscr{L}'$ лежит целиком в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im}\xi|\leqslant N$, а при малом h

$$|\operatorname{Im}(s-\xi)|=|\operatorname{Im}\xi|\leqslant N<\frac{\pi}{h}-\varepsilon.$$

В силу этих рассуждений и формул (2.3), (2.14), имеем:

$$F(s)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathscr{L}'}e^{-P(e^{\xi})}\,|e^{\xi}|\,\overline{f(e^{\xi})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-isy}e^{is\xi}}{M(iy)}\,dy\equiv 0, \quad s\in(-\infty,+\infty).$$

Нам понадобится поменять здесь порядки интегрирования. Для этого воспользуемся леммой 3. Возьмем в этой лемме в качестве $V(\xi)$ функцию

$$-\frac{1}{2\pi}e^{-P(e^{\xi})}\,|e^{\xi}|\,\overline{f(e^{\xi})}.$$

а в качестве $G(y)$ — функцию $\frac{1}{M(iy)}$. Покажем, что для этих функций все условия леммы 3 выполняются.

Действительно, функция

$$V(\xi) = -\frac{1}{2\pi} e^{-P(e^\xi)} |e^\xi| \overline{f(e^\xi)},$$

очевидно, абсолютно интегрируема на $\mathscr{L}'$, потому что, по предположению, $f(z)$ принадлежит классу $L_2[P(z)]$. Кроме того, из (1.3) следует непрерывность функции $G(y) = \frac{1}{M(iy)}$.

В силу (1.4), при $s \in (-\infty, +\infty)$, $\xi \in \mathscr{L}'$ и достаточно больших $|y|$ имеем:

$$|G(y) e^{-iys} e^{iy\xi}| \leqslant e^{-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)|y|} e^{N|y|} = e^{\left[-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)+N\right]|y|},$$

причем при малом h величина $\left[-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)+N\right] < 0$. Следовательно, условие 1) леммы 3 выполняется.

Далее, имеем:

$$\int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)| \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(y) e^{-iys} e^{iy\xi}| \, dy\right\} d\sigma' \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)| \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left[-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)+N\right]|y|} dy\right\} d\sigma' \leqslant C_{15} \int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)| \, d\sigma' < +\infty,$$

а потому выполняется условие 2) леммы 3.

Условие 3) также выполняется, так как для $s \in (-\infty, +\infty)$, в силу принадлежности $f(z)$ к классу $L_2[P(z)]$ и условия (1.4),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(y) e^{-iys}| \left\{\int_{\mathscr{L}'} |V(\xi)| |e^{is\xi}| \, d\sigma'\right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |G(y)| \left\{\int_{\mathscr{L}'} e^{N|y|} |V(\xi)| \, d\sigma'\right\} dy \leqslant C_{16} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N|y|} |G(y)| \, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{N|y|} e^{-\pi\left[\frac{1}{h}-\varepsilon\right]|y|} dy < +\infty.$$

Таким образом, лемма 3 применима к нашему случаю, и, воспользовавшись ею, мы получаем:

$$F_1(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iys} \frac{1}{M(iy)} \left\{\int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)} |e^\xi| \overline{f(e^\xi)} e^{iy\xi} \, d\sigma'\right\} dy \equiv 0.$$

Пусть функция $\Phi(y)$ определяется формулой

$$\Phi(y) = \frac{1}{M(iy)} \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)} |e^\xi| \overline{f(e^\xi)} e^{iy\xi} \, d\sigma'.$$

Легко доказать, что $\Phi(y) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $\Phi(y) \in L_1(-\infty, +\infty)$. В самом деле,

$$|\Phi(y)| \leqslant \frac{1}{M(iy)} \left| \int_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^\xi)} |e^\xi| |f(e^\xi)| |e^{iy\xi}| \, d\sigma' \leqslant \right.$$

$$\leqslant C_{17} e^{-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)|y|} e^{N|y|} \int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| |f(e^{\xi})| d\sigma' \leqslant$$

$$\leqslant C_{18} e^{\left[-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)+N\right]|y|}, \quad \left[-\pi\left(\frac{1}{h}-\varepsilon\right)+N\right]<0.$$

Имея это в виду, на основании теоремы Планшереля ([10]) об обращении преобразования Фурье и непрерывности функции, получим:

$$\Phi(y) \equiv 0, \quad y \in (-\infty, +\infty),$$

или

$$\int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| \overline{f(e^{\xi})} e^{iy\xi} d\sigma' \equiv 0, \quad y \in (-\infty, +\infty). \tag{2.15}$$

Рассмотрим интеграл

$$\psi(w) = \int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| \overline{f(e^{\xi})} e^{w\xi} d\sigma'.$$

Для любых $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ этот интеграл равномерно и абсолютно сходится в прямоугольнике $0 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant R_1$, $|\operatorname{Im} w| \leqslant R_2$.

Действительно, в силу предположения о весе $e^{-P(z)}$, свойств кривой $\mathscr{L}$ и принадлежности $f(z)$ к классу $L_2[P(z)]$, имеем:

$$\int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| |f(e^{\xi})| |e^{w\xi}| d\sigma' = \int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| |f(e^{\xi})| e^{\operatorname{Re} w \operatorname{Re} \xi - \operatorname{Im} w \operatorname{Im} \xi} d\sigma' \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| |f(e^{\xi})| |e^{\xi}|^{\operatorname{Re} w} e^{NR_2} d\sigma' = e^{NR_2} \int\limits_{\mathscr{L}} e^{-P(z)} |f(z)| |z|^{\operatorname{Re} w} d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\substack{\mathscr{L} \\ |z| \leqslant 1}} e^{-P(z)} e^{NR_2} |f(z)| d\sigma + \int\limits_{\substack{\mathscr{L} \\ |z| \geqslant 1}} e^{-P(z)} e^{NR_2} |z|^{R_1} |f(z)| d\sigma < +\infty.$$

Отсюда следует, что функция $\psi(w)$ аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и непрерывна в $\operatorname{Re} w \geqslant 0$. В силу (2.15), $\psi(iy) \equiv 0$, $y \in (+\infty, +\infty)$, откуда, согласно теореме единственности [см. ([11])], заключаем:

$$\psi(w) \equiv 0, \quad \operatorname{Re} w \geqslant 0.$$

В частности, имеем:

$$\psi(n) = \int\limits_{\mathscr{L}'} e^{-P(e^{\xi})} |e^{\xi}| \overline{f(e^{\xi})} e^{n\xi} d\sigma' =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{L}} e^{-P(z)} \overline{f(z)} z^n d\sigma = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Поскольку, в силу условия теоремы,

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+w}} dr = +\infty, \quad w = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

то, по теореме аппроксимации, о которой речь шла во введении, система $\{z^n\}$ полна на $\mathscr{L}$. Поэтому из (2.16) следует, что $f(z) = 0$ почти всюду на $\mathscr{L}$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Что касается теоремы 1′, то ее доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его проводить не будем, а отметим лишь некоторые особенности.

Заметим, что в рассматриваемом случае предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}$ не обязательно существует, но, в силу (2.2), имеет место равенство

$$D_\lambda^* + D_{*\nu} = \frac{1}{h},$$

где

$$D_\lambda^* = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\lambda_n}, \quad D_{*\nu} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{\nu_n}.$$

В отличие от разобранного случая, когда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}$ существует, теперь оператор $L[y(s)]$ обладает только такими свойствами [см. ([8])]:

1) оператор $L[y(s)]$ определен в каждой точке s_0, являющейся центром некоторого круга с радиусом, большим πD_λ^*, в котором функция $y(s)$ регулярна, причем если функция $y(s)$ регулярна в круге R $|s-s_0|\leqslant\pi(D_\lambda^*+\varepsilon_1)$, то существует не зависящая от $y(s)$ и s_0 постоянная $N(\varepsilon_1)$ такая, что в точке s_0

$$|L[y]|\leqslant N(\varepsilon_1)\max_{s\in R}|y(s)|;$$

2) $L[e^{\pm\lambda_n s}]=0$;

3) если функция $y(s)$ аналитична в круге R, $L[y]=0$ в некоторой окрестности R_0 точки s_0 и $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant\frac{h}{2}>0$, то в R_0 функция $y(s)$ представляется абсолютно сходящимся рядом

$$y(s)=\sum C_{\pm n}e^{\pm\lambda_n s}.$$

При дополнительном предположении, что функция $y(s)$ аналитична в криволинейной полосе E, простирающейся неограниченно слева направо, которая может быть описана движением круга радиуса $\pi(D_\lambda^*+\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1>0$, ряд (2.13) сходится по всей плоскости.

Угол P с раствором, равным $\frac{\pi}{\alpha_1}$, теперь является прямым, дополнительная к углу P относительно плоскости z область Q представляет собой угол с раствором, равным $\pi\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)$, область Q', которая получается из Q при отображении $z=e^\xi$, есть горизонтальная полоса шириной $\pi\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)$, поэтому область $Q'_{\frac{1}{h}}$ есть горизонтальная полоса, имеющая ширину, равную

$$\pi\left[\frac{2}{h}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)\right]>2\pi D_\lambda^*.$$

Очевидно, найдется горизонтальная полоса $g\subset Q'_{\frac{1}{h}}$ шириной

$$\pi\left[2D_{*\nu}-\left(2-\frac{1}{\alpha_1}\right)-4\varepsilon_1\right]>0,$$

граница которой отстоит от границы $Q'_{\frac{1}{h}}$ на расстояние $\pi(D_\lambda^*+2\varepsilon_1)$. При оценке функции $\Phi(s)=L[F(s)]$ для $s\in g$, основанной на приложении свойства 1) оператора $L[y]$, надо будет иметь в виду, что, в отличие от предыдущего случая, под R в указанном свойстве надо пони-

мать не прямоугольник, а круг радиуса $\pi(D^*_\lambda + \varepsilon_1)$. Во всем остальном изменения нет.

Таким образом, теорему 1' можно считать доказанной.

Отметим следствие из теоремы 1.

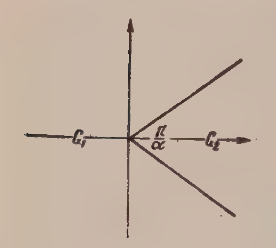


Рис 6.

Следствие. *Пусть последовательность* $\{\nu_n\}$ *удовлетворяет условию*

$$\nu_{n+1} - \nu_n \geqslant h_0 > 0 \quad (\nu_0 = 0;\ n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (0.9)$$

и

$$D_{*\nu} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n}.$$

Если кривая $\mathscr{L}$ *есть граница угла* $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$ (см. рис. 6), *причем*

$$2D_{*\nu} > \frac{1}{\alpha} \qquad (2.17)$$

и при некотором $\varepsilon_0 > 0$ *выполняется условие*

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+w}}\, dr = +\infty, \qquad w = \max\left(\frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_0, \alpha\right), \qquad (2.18)$$

то система $\{z^{\nu_n}\}$ *полна на* $\mathscr{L}$.

Для получения этого результата достаточно заметить, что в нашем случае $\alpha_1 = \frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}}$, $\alpha_2 = \alpha$, условие $\frac{1}{\alpha_1} > 2(1 - D_{*\nu})$ имеет вид $2D_{*\nu} > \frac{1}{\alpha}$ и

$$w = \max\left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 2(1 - D_{*\nu})} + \varepsilon_0\right) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{2 - \frac{1}{\alpha}}, \alpha, \frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_0\right) = \max\left(\frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_0, \alpha\right).$$

§ 3. Примечания

1. Сравним результат, отмеченный в следствии, с результатом М. М. Джрбашяна и И. О. Хачатряна, о котором говорилось во введении.

Пусть выполнены условия (2.17), (2.18). При некотором $\varepsilon_1 > 0$ имеем:

$$\frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha} - 2\varepsilon_1} = \frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha}} + \varepsilon_0,$$

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha} - 2\varepsilon_1}}}\, dr = +\infty.$$

Отсюда следует:

$$\int^{\infty} \frac{P_0\left(e^{\left(2D_{*\nu}-\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon_1\right)\log r}\right)}{r^2}\,dr = +\infty. \tag{2.19}$$

Так как

$$D_{*\nu} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n},$$

то для $\varepsilon_1 > 0$ найдется число $N(\varepsilon_1)$ такое, что при $n \geqslant N(\varepsilon_1)$

$$\frac{n}{\nu_n} \geqslant D_{*\nu} - \varepsilon_1,$$

или

$$\frac{1}{\nu_\nu} \geqslant \frac{D_{*\nu} - \varepsilon_1}{n}.$$

В силу этого,

$$\lambda(r) = 2\sum_{\nu_n < r} \frac{1}{\nu_n} \geqslant 2(D_{*\nu} - \varepsilon_1)\log r + O(1)$$

и

$$K(r, \alpha) = \lambda(r) - \frac{1}{\alpha}\log r \geqslant \left(2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha} - \varepsilon_1\right)\log r + O(1). \tag{2.20}$$

Так как $2D_{*\nu} - \frac{1}{\alpha} - 2\varepsilon_1 > 0$, то правая часть в (2.20) стремится при $r \to +\infty$ к бесконечности. Поэтому

$$K_*(r, \alpha) = \inf_{r' \geqslant r} K(r', \alpha) = K(r^*, \alpha),$$

где $r \leqslant r^* < +\infty$. В силу этого, учитывая (2.20), (2.19), найдем:

$$\int^{\infty} \frac{P_0\left(be^{K_*(r,\alpha)}\right)}{r^2}\,dr = \int^{\infty} \frac{P_0\left(be^{K(r^*,\alpha)}\right)}{r^2}\,dr \geqslant \int^{\infty} \frac{P_0\left[be^{\left(2D_{*\nu}-\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon_1\right)\log r^* + O(1)}\right]}{r^2}\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \int^{\infty} \frac{P_0\left[be^{\left(2D_{*\nu}-\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon_1\right)\log r + O(1)}\right]}{r^2}\,dr = +\infty,$$

следовательно, выполняется условие (0.6) введения.

Что касается условия (0.7), то оно, очевидно, следует из (2.18). Итак, из наших предположений следуют условия (0.6) и (0.7) М. М. Джрбашяна и И. О. Хачатряна.

Обратно, пусть выполняются условия (0.6) и (0.7). Допустим, что $D_{*\nu}$ очень близко к $\frac{1}{h_0}$ $\left(\text{вообще } D_{*\nu} \leqslant \frac{1}{h_0}\right)$, а именно, что

$$2D_{*\nu} + 2\varepsilon_1 \geqslant \frac{2}{h_0}.$$

Тогда из (0.5) следует:

$$\int^{\infty} \frac{P_0\left(e^{\left(2D_{*\nu}-\frac{1}{\alpha}+2\varepsilon_1\right)\log r}\right)}{r^2}\,dr \geqslant \int^{\infty} \frac{P_0\left(e^{\left(\frac{2}{h_0}-\frac{1}{\alpha}\right)\log r}\right)}{r^2}\,dr \geqslant$$

$$\geqslant \int^{\infty} \frac{P_0\left(e^{K(r,\alpha)-\varepsilon_1}\right)}{r^2}\,dr \geqslant \int^{\infty} \frac{P_0\left(be^{K_*(r,\alpha)}\right)}{r^2}\,dr = +\infty. \tag{2.21}$$

Из условий (0.5) и (0.6) следует, что $\frac{2}{h_0} > \frac{1}{\alpha}$, значит, $2D_{*\nu} > \frac{1}{\alpha}$, так как, по предположению, $D_{*\nu}$ очень близко к $\frac{1}{h_0}$. Таким образом, в предположении, что $D_{*\nu}$ близко к $\frac{1}{h_0}$, из условий (0.6) и (0.7) вытекают наши условия.

Проведенные рассуждения и выясняют, в какой связи находится наш главный результат, отмеченный в следствии, с результатом М. М. Джрбашяна и И. О. Хачатряна.

2. Сравним условия теоремы 1 с условиями теоремы А. Ф. Леонтьева, изложенной во введении.

У А. Ф. Леонтьева $\{\nu_n\}$ есть часть последовательности всех неотрицательных целых чисел с плотностью

$$D_\nu = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n} = 1 - \sigma > 0 .$$

Его условие (см. условие (0.4) введения)

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\beta_1+\varepsilon_0}}\, dr = +\infty, \quad \frac{\pi}{\beta_1} = \frac{\pi}{\alpha_1} - 2\sigma\pi ,$$

или

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}-2\sigma}+\varepsilon_0}}\, dr = +\infty$$

эквивалентно нашему условию

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-2(1-D_\nu)}+\varepsilon_0}}\, dr = +\infty .$$

Остальные условия в (0.4):

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\beta_i+\varepsilon_0}}\, dr = +\infty, \quad \frac{\pi}{\beta_i} = \frac{\pi}{\alpha_i} - 2\pi\sigma > 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, m),$$

сильнее наших условий:

$$\int^{\infty} \frac{P_0(r)}{r^{1+\alpha_i}}\, dr = +\infty \quad (i = 2, 3, \ldots, m).$$

Это объясняется тем, что оператор $L[g(s)]$ А. Ф. Леонтьев применяет в каждом угле Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а мы — только в одной области, дополнительной к углу P (вдали от начала P и Δ_1 совпадают). Однако у А. Ф. Леонтьева ограничение на угол P менее сильное, чем у нас. В самом деле, у него требуется только, чтобы угол P пересекался со всякой окружностью $|z| = r$ по дуге, большей $2\pi(1 - D_\nu)r$, а у нас требуется, чтобы угол пересекался с $|z| = r$, по дуге, большей $[2\pi(1 - D_\nu) + 4\varepsilon_1]r$, где $\varepsilon_1 > 0$. Кроме того, мы требуем, чтобы в начале координат к сторонам угла P можно было провести касательные.

3. Тем же методом, как и в статье М. М. Джрбашяна (2), можно доказать в условиях теоремы 1 или 1′ теорему о полноте системы функ-

ций $\{z^{\nu_n}\}$ на кривой $\mathscr{L}$ в смысле взвешенно-равномерной аппроксимации:

$$\inf_{\{Q\}} \max_{z\in\mathscr{L}} e^{-P(z)}|f(z)-Q(z)|=0,$$

где $Q(z)$ — всевозможные линейные комбинации функций z^{ν_n}, а $f(z)$ — любая функция, непрерывная на $\mathscr{L}$ и такая, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\mathscr{L}}} e^{-P(z)}f(z)=0.$$

4. Приведем пример, рассмотренный в работе [3] А. Ф. Леонтьева, который показывает, что требование $\frac{1}{\alpha_1}>2(1-D_\nu)$ для заключения теоремы 1, вообще говоря, является существенным.

Пусть ν_n $(n=1, 2,\ldots)$ пробегает все числа вида $kp+j$ $(j=0, 1, 2,\ldots$ $\ldots, p-2,\ k=0, 1, 2,\ldots)$, где p — целое число $\geqslant 2$. Очевидно,

$$D_\nu=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}=1-\frac{1}{p}.$$

Докажем, что в точках $Re^{i\frac{2\pi}{p}s}$ $(s=0, 1, 2,\ldots, p-1)$, где R — любое фиксированное действительное положительное число, функцию z^{p-1} нельзя одновременно приблизить с любой степенью точности линейными комбинациями функций z^{ν_n} с указанными ν_n.

Допустим противное, предположив, что в точках $z=Re^{i\frac{2\pi}{p}s}$ $(s=$ $=0, 1, 2,\ldots, p-1)$

$$z^{p-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}a_{kp+j}^{(n)}z^{kp+j},$$

или

$$R^{p-1}e^{+i\frac{p-1}{p}2\pi s}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}a_{kp+j}^{(n)}e^{i\frac{2\pi}{p}js}R^{kp+j}\quad (s=0, 1,\ldots, p-1).$$

Тогда имеем:

$$R^{p-1}e^{-i\frac{2\pi}{p}s}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}a_{kp+j}^{(n)}e^{i\frac{2\pi}{p}js}R^{kp+j}\quad (s=0, 1,\ldots, p-1).\qquad (2.22)$$

Умножив первое соотношение (2.22) (при $s=0$) на 1, второе (при $s=1$) — на $e^{i\frac{2\pi}{p}s}$, третье (при $s=2$) — на $e^{i\frac{2\pi}{p}2}$ и т. д., получим:

$$R^{p-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}b_{kp+j}^{(n)},$$

$$R^{p-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}b_{kp+j}^{(n)}e^{i\frac{2\pi}{p}(j+1)},$$

$$R^{p-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}b_{kp+j}^{(n)}e^{i\frac{2\pi}{p}2(j+1)},$$

. . . .

$$R^{p-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p-2}b_{kp+j}^{(n)}e^{i\frac{2\pi}{p}(p-1)(j+1)}.$$

где $b_{kp+j}^{(n)} = a_{kp+j}^{(n)} R^{kp+j}$. Сложив все эти равенства, найдем:

$$PR^{p-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{p-2} b_{kp+j}^{(n)} \left(\sum_{s=0}^{p-1} w_s^{j+1} \right), \quad w_s = e^{i\frac{2\pi}{p}s}.$$

В силу соотношений между корнями и коэффициентами уравнения $\lambda^p - 1 = 0$, имеем:

$$\sum_{s=0}^{p-1} w_s^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p-2.$$

Поэтому $PR^{p-1} = 0$, и мы получили противоречие; значит, наше утверждение было правильно.

Пусть кривая $\mathscr{L}$ состоит из луча $\arg z = 0$ и дуги окружности $|z| = R$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{2\pi}{p}(p-1)$. В силу доказанного, полнота системы $\{z^{\nu_n}\}$ на $\mathscr{L}$ не имеет места. В этом примере раствор $\frac{\pi}{\alpha_1}$ угла P равен $\frac{2\pi}{p}$ и $\frac{1}{\alpha_1} = 2(1 - D_\nu)$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Ф. Леонтьеву за руководство этой работой.

Поступило
8.II. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джрбашян М. М., О метрических признаках полноты системы полиномов в неограниченных областях, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 7, № 1 (1947), 3—10.

[2] Джрбашян М. М., Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сборн., 36 (78): 3 (1955), 354—440.

[3] Леонтьев А. Ф., О полноте системы $\{z^{\nu_n}\}$ на кривых в комплексной плоскости, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 5 (1958), 197—800.

[4] Мандельбройт С., Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения, ИИЛ, М., 1955.

[5] Джрбашян М. М., Хачатрян И. О., О полноте системы функций $\{z^{\nu_n}\}$ в комплексной плоскости при взвешенно-квадратической аппроксимации, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 6 (1956), 914—917.

[6] Джрбашян М. М., Метрические теоремы о полноте и представимости аналитических функций, Диссертация, Моск. гос. ун-т, 1948.

[7] Джрбашян М. М., О полноте некоторых систем аналитических функций в бесконечных областях, Доклады Ак. наук СССР, 67, № 1 (1949), 15—18.

[8] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXIX, 1951.

[9] Леонтьев А. Ф., О последовательностях линейных операторов, образованных из решений дифференциальных уравнений, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 201—241.

[10] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.— Л., Гостехиздат, 1947.

[11] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 277—328

И. В. ОСТРОВСКИЙ

СВЯЗЬ РОСТА МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЕЕ ЗНАЧЕНИЙ ПО АРГУМЕНТАМ

В работе изучается влияние на рост целой функции ограничений, наложенных только на аргументы ее нулей и единиц. Применяемый здесь метод переносится также на функции, мероморфные при $|z|<\infty$ или при $|z|<1$ и принимающие значение ∞ в определенном смысле реже, чем остальные значения.

Введение

В теории целых функций хорошо известно следующее предложение *:

ТЕОРЕМА α. *Целая функция $f(z)$, у которой показатели сходимости корней уравнений*

$$f(z)=0, \quad f(z)=1 \tag{1}$$

не превосходят числа $\rho<\infty$, имеет порядок, не больший ρ.

Таким образом, известные ограничения, наложенные на модули корней уравнений (1), влияют на оценку роста целой функции.

Уже давно было замечено, что оценка роста целой функции зависит и от ограничений, наложенных только на аргументы корней уравнений (1). Так, в 1919 г. Бибербах ([1]) доказал теорему, из которой вытекало следующее утверждение:

Если целая функция конечного порядка может принимать значения 0 и 1 лишь на конечной системе лучей, исходящих из начала координат, минимальный угол между которыми равен $\pi\rho^{-1}$, то ее рост не выше нормального типа порядка ρ.

В 1925 г. Неванлинна ([8]) получил более сильный результат, показав, что такой рост является предельным и для всякой целой функции конечного порядка, могущей принимать значения 0 и 1 лишь в точках, «очень близких» к упомянутой системе лучей. **

---

* Этот результат является простым следствием теоремы Бореля, обобщающей классическую теорему Пикара.

** Точки последовательности $\{z_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ называются «очень близкими» к системе лучей: $\arg z=\alpha_j$ $(j=1,\ 2,\ldots,\ n;\ 0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<2\pi)$, если сходятся ряды

$$\sum_{\substack{1\leqslant r_\nu<\infty\\ \alpha_j\leqslant\varphi_\nu\leqslant\alpha_{j+1}}}\left[\sin\frac{\pi}{\gamma_j}(\varphi_\nu-\alpha_j)\right]r_\nu^{-\frac{\pi}{\gamma_j}}$$

$(j=1,\ 2,\ldots,\ n;\ z_\nu=r_\nu e^{i\varphi_\nu},\ \gamma_j=\alpha_{j+1}-\alpha_j;\ \alpha_{n+1}=\alpha_1+2\pi).$

В той же работе Неванлинна положил начало установлению аналогичных результатов для мероморфных функций.

Заметим, что аналогия между теоремой α, с одной стороны, и сформулированными выше теоремами Бибербаха и Неванлинна для целых функций с другой — вполне прозрачна: как в первой, так и в последних, накладываются ограничения на расположение корней уравнений (1) и даются оценки роста функции; существенное же различие состоит в том, что в теореме α ограничения накладываются на модули корней уравнений (1), а в теоремах Бибербаха и Неванлинна — только на аргументы. (При этом нужно учесть, что требование априорной конечности порядка в этих теоремах является излишним — это будет нами показано в гл. II.)

При переходе к мероморфным функциям аналогия становится менее ясной. С одной стороны, как известно, имеет место

ТЕОРЕМА β. *Мероморфная функция, у которой показатели сходимости корней уравнений*

$$f(z)=0, \quad f(z)=1, \quad f^{-1}(z)=0 \tag{2}$$

не превосходят числа $\rho<\infty$, *имеет порядок, не больший* ρ.

С другой стороны, простой пример показывает, что существуют мероморфные функции сколь угодно большого, в частности бесконечного порядка, у которых корни уравнений (2) расположены на конечной системе лучей.

Пример (А. Эдрей [4]). Пусть $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lim\limits_{k\to\infty} h_k=\infty)$ — последовательность вещественных чисел с произвольным наперед заданным показателем сходимости (в частности, бесконечным). Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k<\infty.$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\psi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-h_k}.$$

Порядок этой функции не меньше показателя сходимости последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ *, но так как при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\operatorname{Im}\psi(z)=-\operatorname{Im} z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{|z-h_k|^2},$$

то вещественные значения функция $\psi(z)$ может принимать лишь на вещественной оси.

Становится понятным, что для мероморфных функций теоремы, аналогичные приведенным выше теоремам Бибербаха и Неванлинна, могут иметь место лишь при некоторых дополнительных ограничениях. В первую очередь представляется целесообразным потребовать, чтобы рас-

* Легко показать, что порядок функции $\psi(z)$ равен показателю сходимости последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$.

сматриваемая мероморфная функция была «похожей» на целую, т. е. чтобы она принимала хоть одно из своих значений гораздо реже, чем почти все остальные.

Первый результат такого рода принадлежит Неванлинна ([8]) и заключается в следующем:

Если мероморфная функция $f(z)$ конечного порядка такова, что корни уравнений (2) *«очень близки» к конечной системе лучей с минимальным углом* $\pi\rho^{-1}$ *и при этом корни по меньшей мере двух из уравнений* (2), *назовем их* $\{z'_k\}$ *и* $\{z''_k\}$, *удовлетворяют дополнительно условию*

$$\sum \frac{1}{|z'_k|^\rho} < \infty, \quad \sum \frac{1}{|z''_k|^\rho} < \infty,$$

то рост функции $f(z)$ *не выше нормального типа порядка* ρ.

Очевидно, уже предположение, что корни одного из уравнений (2) удовлетворяют приведенному выше условию, делало бы функцию «похожей» на целую, если бы ее порядок превосходил ρ (оно означало бы, что какое-либо из значений 0,1 или ∞ принимается функцией гораздо реже, чем почти все остальные).

Самый значительный результат подобного рода был получен в 1955 г. А. Эдреем ([4]). Этот результат гласит (для простоты мы несколько уменьшаем его общность):

Пусть функция $f(z)$ *мероморфна при* $|z| < \infty$, *причем:*

1) *корни уравнений* (2) *расположены все, кроме, быть может, конечного числа, на системе лучей с минимальным углом* $\pi\rho^{-1}$,

2) $\delta(0, f) + \delta(1, f) + \delta(\infty, f) > 0$ *.

Тогда порядок $f(z)$ *не превосходит* ρ **.

Здесь условие 2) как раз и означает, что функция «похожа» на целую.

Самым важным преимуществом теоремы Эдрея, по сравнению с предшествующими, является то, что в ней не предполагается a priori конечность порядка функции ***. Бо́льшая, по сравнению с результатом Неванлинна, общность достигается и тем, что «похожей» на целую считается мероморфная функция, обладающая всего лишь одним**** исключительным значением в смысле Неванлинна. Однако результат Эдрея не перекрывает полностью результатов Бибербаха и Неванлинна, во-первых, в силу

---

* $\delta(a, f)$ обозначает дефект a относительно $f(z)$ в смысле Неванлинна.

** В полной общности результат Эдрея выглядит так:

Пусть мероморфная при $|z| < \infty$ функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1) корни уравнений $f(z) = 0$, $f^{(l)}(z) = 1$, $f^{-1}(z) = 0$ (l — целое неотрицательное) расположены все, кроме, быть может, конечного числа, на системе лучей с минимальным углом $\pi\rho^{-1}$,

2) $\delta(0, f) + \delta(1, f^{(l)}) + \delta(\infty, f) > 0$.

Тогда порядок $f(z)$ не превосходит ρ.

*** Отметим, что еще в 1947 г. М. Г. Крейн ([6]) получил точную оценку роста для одного класса целых функций с нулями и единицами, «очень близкими» к вещественной оси, причем конечность порядка a priori не предполагалась. Об этом результате еще будет идти речь в нашей работе

**** По меньшей мере.

большей (чем в теореме Неванлинна) жесткости ограничений, наложенных на расположение корней уравнений (2), и, во-вторых, в силу меньшей точности оценки роста функции.

В настоящей работе устанавливается справедливость предложения, более общего, чем приведенные выше предложения Бибербаха, Неванлинна и Эдрея, и содержащего последние в качестве частных случаев *.

Сформулируем основную часть нашего результата, введя предварительно следующее определение:

Комплексное число a называется *слабо дефектным* значением мероморфной функции $f(z)$, если положительна величина

$$\Delta^*(a, f) = \sup_{\mathfrak{B}} \varliminf_{\substack{r\to\infty \\ r\in C\mathfrak{B}}} \frac{m\left(r\,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)},$$

где supremum берется по всем множествам $\mathfrak{B} \subset (0, \infty)$, для которых

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{\mathfrak{B} \cap (0, r)\}}{r} < 1.$$

Заметим, что $0 \leqslant \delta(a, f) \leqslant \Delta^*(a, f) \leqslant \Delta(a, f) \leqslant 1$ (где $\Delta(a, f)$ означает дефект в смысле Валирона); таким образом, значение, дефектное по Неванлинна, тем более является слабо дефектным.

ТЕОРЕМА. *Пусть мероморфная при* $|z| < \infty$ *функция* $f(z)$ *такова, что*

1) *корни уравнений* (1) *«очень близки» к системе лучей с минимальным углом* $\pi\rho^{-1}$,

2) ∞ *является слабо дефектным значением.*

Тогда рост функции не выше нормального типа порядка ρ.

Самым существенным, на наш взгляд, является здесь то, что ограничения на аргументы касаются лишь корней двух уравнений (1), а не корней трех уравнений (2).

Очевидно, что сформулированные на стр. 277 результаты Бибербаха и Неванлинна, а также результат Эдрея (в приведенной нами формулировке), являются частными случаями этой теоремы **.

Метод, которым мы пользуемся, существенно опирается на развитый Неванлинна [8] аппарат величин, характеризующих поведение мероморфной функции внутри угла. Этот метод может быть применен и к изучению функций, мероморфных внутри единичного круга. Результаты, которые при этом получаются, могут считаться в известном смысле обобщениями классической теоремы Шоттки.

В работах М. Г. Крейна [6] и М. В. Келдыша [5] изучалось распределение значений функций, представимых абсолютно сходящимися ря-

---

* Частным случаем нашего результата (теорема А, гл. II) является и результат Эдрея, цитированный в подстрочном примечании ** на стр. 279.

** Что же касается теоремы Неванлинна, цитированной на стр. 279, то мы не в состоянии вывести ее непосредственно из формулировки нашей теоремы. Однако метод, которым мы пользуемся для доказательства последней, без труда приводит к более общему, чем теорема Неванлинна, результату (теорема 7′).

дами простейших дробей, т. е. имеющих вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-h_k}\quad\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{A_k}{h_k}\right|<\infty\right).$$

В настоящей работе обобщаются результаты работы ([6]).

Замечу, что к основным результатам работы я пришел, отправляясь от попыток снять излишние ограничения в основной теореме работы ([6]). Эти попытки были предприняты по совету Б. Я. Левина и привели к результату, опубликованному в работе ([11]). Несколько позже А. А. Гольдберг обратил мое внимание на связь этого результата с результатом Эдрея ([4]). Стремясь понять сущность этой связи, я и пришел к основным результатам настоящей работы, для получения которых потребовалось обобщить метод моей заметки ([11]).

Настоящая работа состоит из трех глав. В первой главе развивается аппарат, служащий в дальнейшем для получения основных результатов. Фундаментом этого аппарата является теорема 3, доказанная в § 3.

Во второй главе доказываются основные теоремы работы (по отношению к ним результат, приведенный выше, является весьма частным).

В третьей главе рассматриваются приложения основных результатов к изучению свойств целых функций, функций, голоморфных в единичном круге (обобщение теоремы Шоттки), и функций, представимых абсолютно сходящимися рядами простейших дробей.

Некоторые результаты настоящей работы были опубликованы без доказательств в работе ([12]).

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Б. Я. Левину и А. А. Гольдбергу.

ГЛАВА I

§ 1. Величины, характеризующие поведение мероморфной функции в круге и в секторе

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная в круге $|z|<\Omega$ *. Как известно, рост и распределение значений этой функции во всем круге $|z|<\Omega$ можно характеризовать поведением при $r\to\Omega$ следующих величин, введенных Р. Неванлинна:

$$m(r,\infty)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi,\qquad m(r,a)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right);$$

$$N(r,\infty)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt+n(0,\infty)\ln r,$$

* Для Ω в дальнейшем будем допускать лишь два значения: ∞ (параболический случай) и 1 (гиперболический случай).

где $n(t, \infty)$ — число полюсов (с учетом кратности) функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant t$,

$$N(r, a) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$T(r, f) = m(r, \infty) + N(r, \infty).$$

Величина $m(r, a)$ характеризует скорость среднего приближения $f(z)$ к a на окружности $|z| = r$ при $r \to \Omega$, а величина $N(r, a)$ — плотность распределения a-точек (по модулям).

Рассмотрим некоторый сектор нашего круга: $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \alpha < < \beta \leqslant 2\pi)$. Чтобы характеризовать рост и распределение значений $f(z)$ в этом секторе, Р. Неванлинна (8) ввел следующие величины:

$$A_{\alpha\beta}(r, \infty) = A_{\alpha\beta}(r, f) =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int\limits_{\omega}^{r}\left(\frac{1}{t^{\frac{\pi}{\gamma}}} - \frac{t^{\frac{\pi}{\gamma}}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma}}}\right)(\ln^{+}|f(te^{i\alpha})| + \ln^{+}|f(te^{i\beta})|)\frac{dt}{t} \quad (\gamma = \beta - \alpha)$$

(ω выбирается произвольно, $0 < \omega < \Omega$, а затем фиксируется),

$$A_{\alpha\beta}(r, a) = A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$B_{\alpha\beta}(r, \infty) = B_{\alpha\beta}(r, f) = \frac{2}{\gamma r^{\frac{\pi}{\gamma}}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\ln^{+}|f(re^{i\varphi})|\sin\frac{\pi}{\gamma}(\varphi - \alpha)\,d\varphi,$$

$$B_{\alpha\beta}(r, a) = B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right);$$

$$C_{\alpha\beta}(r, \infty) = C_{\alpha\beta}(r, f) = 2\sum_{\substack{\omega \leqslant r_k \leqslant r \\ \alpha \leqslant \varphi_k \leqslant \beta}}\left(\frac{1}{r_k^{\frac{\pi}{\gamma}}} - \frac{r_k^{\frac{\pi}{\gamma}}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma}}}\right)\sin\frac{\pi}{\gamma}(\varphi_k - \alpha)$$

($r_k e^{i\varphi_k}$ — полюсы функции $f(z)$, взятые с учетом кратности, т. е. полюс кратности m входит в сумму в виде m одинаковых слагаемых),

$$C_{\alpha\beta}(r, a) = C_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

Величины $A_{\alpha\beta}(r, a)$ и $B_{\alpha\beta}(r, a)$ характеризуют скорость приближения $f(z)$ к a при $|z| \to \Omega$: первая — вдоль граничных радиусов (лучей) сектора, вторая — во внутренности сектора.

Величина $C_{\alpha\beta}(r, a)$ характеризует плотность и распределение по аргументам a-точек функции: наибольший вклад в величину $C_{\alpha\beta}(r, a)$ вносят a-точки, близкие к биссектрисе сектора, a-точки, расположенные вблизи граничных радиусов, мало влияют на величину $C_{\alpha\beta}(r, a)$, а a-точки, лежащие на этих радиусах, вообще не оказывают на нее никакого влияния *.

---

* Нетрудно показать, что a-точки $f(z)$ «очень близки» к системе лучей $\arg z = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < 2\pi)$ в смысле подстрочного примечания на стр. 277 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} C_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, a) = O(1).$$

Нам придется использовать следующие результаты работы Р. Неванлинна ([8]):

N_1. Существует непрерывная неубывающая функция $S_{\alpha\beta}(r, f)$, $\omega \leqslant r < \Omega$, такая, что

$$A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) + C_{\alpha\beta}(r, f) = S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1).$$

N_2. Для любого комплексного a справедливо соотношение

$$S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1).$$

N_3. Если функция $f(z)$ мероморфна внутри и на границе полукруга $\operatorname{im} z \geqslant 0$, $|z| \leqslant \mu$, то имеет место представление

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\mu}^{\mu} \ln|f(t)| \left\{\frac{r\sin\varphi}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} - \frac{r\sin\varphi}{\mu^2+\left(\frac{r}{\mu}\right)^2 t^2 - 2rt\cos\varphi}\right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln|f(\mu e^{i\theta})| \left\{\frac{\mu^2-r^2}{\mu^2+r^2-2\mu r\cos(\varphi-\theta)} - \frac{\mu^2-r^2}{\mu^2+r^2-2\mu r\cos(\varphi+\theta)}\right\} d\theta -$$

$$- \sum_{\substack{|a_\nu|<\mu \\ \operatorname{Im} a_\nu>0}} \ln\left|\frac{z-\bar a_\nu}{z-a_\nu}\,\frac{\mu^2-\bar a_\nu z}{\mu^2-a_\nu z}\right| + \sum_{\substack{|b_\nu|<\mu \\ \operatorname{Im} b_\nu>0}} \ln\left|\frac{z-\bar b_\nu}{z-b_\nu}\,\frac{\mu^2-\bar b_\nu z}{\mu^2-b_\nu z}\right|$$

$$(z = re^{i\varphi}, \quad 0 < r < \mu, \quad 0 < \varphi < \pi),$$

где a_ν — нули функции $f(z)$, а b_ν — ее полюсы.

Из этого представления, используя неотрицательность подынтегральных ядер, легко получить весьма существенное для дальнейшего неравенство:

$$\ln^+|f(z)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\mu}^{\mu} \ln^+|f(t)|\, \frac{r\sin\varphi}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln^+|f(\mu e^{i\theta})| \left\{\frac{\mu^2-r^2}{\mu^2+r^2-2\mu r\cos(\varphi-\theta)} - \frac{\mu^2-r^2}{\mu^2+r^2-2\mu r\cos(\varphi+\theta)}\right\} d\theta +$$

$$+ \sum_{\substack{|b_\nu|<\mu \\ \operatorname{Im} b_\nu>0}} \ln\left|\frac{z-\bar b_\nu}{z-b_\nu}\right|. \qquad \text{(N)}$$

Основная задача этой главы состоит в следующем. Пусть круг $|z| < \Omega$ разбит на секторы некоторой системой радиусов. Нужно установить связь между величинами m, N, T, характеризующими поведение функции во всем круге, с величинами A, B, C, S, характеризующими ее поведение в каждом из секторов.

§ 2. Оценка величин $A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ и $B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ сверху при помощи величины $T(r, f)$

Известную трудность представляет лишь получение оценки для величины $A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ (теорема 1). Оценка величины $B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ (теорема 2) является тривиальным следствием леммы о логарифмической производной Р. Неванлинна.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\Omega$, то имеет место неравенство* *

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{\omega}^{\rho} \frac{\ln T(t, f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}} dt + \ln^{+} \frac{r}{\rho-r} + O(1)\right\},$$

где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, $\gamma = \beta - \alpha$, $0 < \omega < r < \rho < \Omega$, K — *постоянная, не зависящая от* r *и* ρ.

Доказательство. Будем исходить из известной формулы Шварца—Неванлинна [см. ([9])]:

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \ln|f(\mu e^{i\theta})| \frac{\mu e^{i\theta}+z}{\mu e^{i\theta}-z} d\theta + \sum_{|a_\nu|<\mu} \delta_\nu \ln \frac{\mu^2-\bar{a}_\nu z}{\mu(z-a_\nu)} + iC.$$

Эта формула справедлива при $|z|<\mu$; через a_ν в ней обозначены точки, в которых $f(z)$ имеет либо нуль, либо полюс; δ_ν равно $+1$ (соответственно -1), если отвечающее ему a_ν является полюсом (соответственно нулем). Продифференцировав равенство Шварца — Неванлинна по z, получаем:

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{2\mu}{(\mu-|z|)^2} \int_{0}^{2\pi} |\ln|f(\mu e^{i\theta})||\, d\theta + \sum_{|a_\nu|\leqslant\mu} \frac{|a_\nu|}{\mu^2-|a_\nu||z|} + \sum_{|a_\nu|\leqslant\mu} \frac{1}{||z|-|a_\nu||}.$$

Пусть r и ρ — произвольная пара чисел таких, что $0<\omega<r<\rho<\Omega$. Положим

$$\lambda = \rho r^{-1}, \quad |z| = t, \quad \mu = \sqrt{\lambda}\, t.$$

Тогда предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$\left|\frac{f'(te^{i\psi})}{f(te^{i\psi})}\right| \leqslant \Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_3(t),$$

где

$$\Phi_1(t) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{t(\sqrt{\lambda}-1)^2}\left[m(\sqrt{\lambda}\, t, 0) + m(\sqrt{\lambda}\, t, \infty)\right],$$

$$\Phi_2(t) = \sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\, t} \frac{|a_\nu|}{\lambda t^2 - |a_\nu|\, t},$$

$$\Phi_3(t) = \sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\, t} \frac{1}{|t-|a_\nu||}.$$

---

* В заметке ([13]) приведены оценки величины $A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ $\left(\text{и } B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right)$ для функций, мероморфных в некотором угле, содержащем внутри $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$. Для функций, мероморфных во всей плоскости ($\Omega=\infty$), из этих оценок вытекает оценка $A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ через $T(r, f)$, однако менее точная, чем наша.

Отсюда следует, что

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 2 \sum_{k=1}^{3} \int_{\omega}^{r} \ln^{+} \Phi_k(t) \left(\frac{1}{t^{\frac{\pi}{\gamma}}} - \frac{t^{\frac{\pi}{\gamma}}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma}}} \right) \frac{dt}{t} + O(1) \equiv 2(I_1 + I_2 + I_3).$$

Оценим последовательно интегралы I_1, I_2, I_3.

а) Оценка интеграла I_1. В силу того, что

$$m(\sqrt{\lambda}\, t, \infty) \leqslant T(\sqrt{\lambda}\, t, f) \leqslant T(\lambda t, f),$$

$$m(\sqrt{\lambda}\, t, 0) \leqslant T(\sqrt{\lambda}\, t, f) + O(1) \leqslant T(\lambda t, f) + O(1),$$

мы имеем:

$$\Phi_1(t) \leqslant \frac{K\lambda^{\frac{3}{2}}}{(\lambda - 1)^2} \left(2T(\lambda t, f) + O(1)\right) \text{*}.$$

Следовательно,

$$I_1 \leqslant \int_{\omega}^{r} \frac{\ln^{+} T(\lambda t, f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\, dt + K\left(\ln^{+} \frac{1}{\lambda - 1} + \ln \lambda + O(1)\right).$$

б) Оценка интеграла I_2. Так как, очевидно,

$$\Phi_2(t) \leqslant \sum_{|a_\nu| \leqslant \sqrt{\lambda}\, t} \frac{\sqrt{\lambda}\, t}{\lambda t^2 - \sqrt{\lambda}\, t^2} = \frac{1}{t(\sqrt{\lambda} - 1)} \left(n(\sqrt{\lambda}\, t, 0) + n(\sqrt{\lambda}\, t, \infty)\right),$$

а при любом комплексном c

$$n(\sqrt{\lambda}\, t, c) \leqslant \frac{\lambda t}{\lambda t - \sqrt{\lambda}\, t} \int_{\sqrt{\lambda}\, t}^{\lambda t} \frac{n(\tau, c)}{\tau}\, d\tau \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - 1} N(\lambda t, c) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - 1} \left(T(\lambda t, f) + O(1)\right), \qquad (1)$$

то имеет место неравенство

$$\Phi_2(t) \leqslant \frac{K\lambda^{\frac{3}{2}}}{(\lambda - 1)^2} \left(T(\lambda t, f) + O(1)\right).$$

Отсюда получаем соотношение:

$$I_2 \leqslant \int_{\omega}^{r} \frac{\ln^{+} T(\lambda t, f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\, dt + K\left(\ln^{+} \frac{1}{\lambda - 1} + \ln \lambda + O(1)\right).$$

в) Оценка интеграла I_3. Интегрируя I_3 по частям, получим:

$$I_3 = \int_{\omega}^{r} \left\{ \int_{\omega}^{t} \ln^{+} \left[\sum_{|a_\nu| \leqslant \sqrt{\lambda}\, \tau} \frac{1}{|\tau - |a_\nu||} \right] d\tau \right\} \left\{ \left(\frac{\pi}{\gamma} + 1\right) \frac{1}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+2}} + \left(\frac{\pi}{\gamma} - 1\right) \frac{t^{\frac{\pi}{\gamma}-2}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma}}} \right\} dt \leqslant$$

---

* На всем протяжении нашей работы K будет обозначать величины, не зависящие от переменных R, r, ρ, t, S, s, σ, τ, λ.

$$\leqslant \frac{2\pi}{\gamma}\int_{\omega}^{r}\left\{\int_{\omega}^{t}\ln^{+}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||}\Big]d\tau\right\}\frac{dt}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+2}}=$$

$$=\frac{4\pi}{\gamma}\int_{\omega}^{r}\left\{\int_{\omega}^{t}\ln^{+}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||}\Big]^{\frac{1}{2}}d\tau\right\}\frac{dt}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\pi}{\gamma}\int_{\omega}^{r}\left\{\int_{\omega}^{t}\ln^{+}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau\right\}\frac{dt}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4\pi}{\gamma}\int_{\omega}^{r}\left\{\frac{1}{t-\omega}\int_{\omega}^{t}\ln^{+}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau\right\}\frac{dt}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}. \tag{2}$$

Для оценки выражения в фигурных скобках воспользуемся хорошо известным неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим, которое дает:

$$\frac{1}{t-\omega}\int_{\omega}^{t}\ln^{+}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\ln^{+}\left\{\frac{1}{t-\omega}\int_{\omega}^{t}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,\tau}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau\right\}+\ln 2\leqslant$$

$$\leqslant\ln^{+}\left\{\frac{1}{t-\omega}\int_{\omega}^{t}\Big[\sum_{|a_\nu|\leqslant\sqrt{\lambda}\,t}\frac{1}{|\tau-|a_\nu||^{\frac{1}{2}}}\Big]d\tau\right\}+\ln 2\leqslant$$

$$\leqslant\ln^{+}\left\{\frac{4\sqrt{t}\,[n(\sqrt{\lambda}\,t,\,0)+n(\sqrt{\lambda}\,t,\,\infty)]}{t-\omega}\right\}+\ln 2. \tag{3}$$

Из неравенств (2), (3) и (1) следует соотношение:

$$I_3\leqslant\frac{4\pi}{\gamma}\int_{\omega}^{r}\frac{\ln^{+}T(\lambda t,\,f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\,dt+K\left(\ln^{+}\frac{1}{\lambda-1}+\ln\lambda+O(1)\right).$$

Собирая полученные оценки интегралов I_1, I_2, I_3, приходим к неравенству:

$$A_{\alpha\beta}\left(r,\,\frac{f'}{f}\right)\leqslant K\left\{\int_{\omega}^{r}\frac{\ln^{+}T(\lambda t,\,f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\,dt+\ln^{+}\frac{1}{\lambda-1}+\ln\lambda+O(1)\right\}.$$

Остается лишь учесть, что $\lambda=\frac{\rho}{r}$, и произвести простую замену переменной в интеграле.

Выведем из теоремы 1 несколько следствий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1_1. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\infty$, то для всех $r>\omega$, исключая, быть может, множество конечной логарифмиче-*

ской длины *, *справедливо соотношение*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K \ln^+ T(r, f) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Из теоремы 1 непосредственно следует, что при $\omega < r < \rho < \infty$ справедливо неравенство

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K\left\{\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{\pi}{\gamma}} \ln^+ T(r, f^{(l)}) + \ln^+ \frac{r}{\rho - r}\right\}.$$

Положим

$$\rho = r\left(1 + \frac{1}{\ln^+ T(r, f^{(l)})}\right);$$

тогда

$$\ln^+ \frac{r}{\rho - r} = \ln^+ \ln^+ T(r, f^{(l)}),$$

$$\frac{\rho}{r} = O(1),$$

$$\ln^+ T(\rho, f^{(l)}) \leqslant 2 \ln^+ T(r, f^{(l)}).$$

Последнее неравенство выполняется для всех $r > 0$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины. Это вытекает из следующего предложения:

ЛЕММА БОРЕЛЯ [см. (2)]. *Если* $u(r) \geqslant 1$ — *непрерывная неубывающая функция при* $0 \leqslant r < \infty$, *то, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *для всех* $r \in (0, \infty)$, *исключая, возможно, множество конечной логарифмической длины, справедливо неравенство*

$$u\left(r\left(1 + \frac{1}{\ln u(r)}\right)\right) \leqslant u^{1+\varepsilon}(r).$$

Мы получаем, таким образом, что для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества конечной логарифмической длины,

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K \ln T(r, f^{(l)}).$$

Чтобы доказать теорему, остается воспользоваться известным неравенством [см. (3)]

$$T(r, f^{(l)}) \leqslant 3^l\, T(r, f) \text{ **},$$

которое справедливо вне некоторого множества конечной логарифмической длины.

---

* При рассмотрении функций, мероморфных при $|z| < \infty$, будем применять термин «множество конечной логарифмической длины» к таким множествам $E \subset (0, \infty)$, для которых $\int\limits_E r^{-1}\, dr < \infty$. При рассмотрении функций, мероморфных при $|z| < 1$, этот же термин будет применяться к множествам $E \subset (0, 1)$ таким, что $\int\limits_E (1 - r)^{-1}\, dr < \infty$.

** Это неравенство легко следует из соотношения:

$$T(r, f') = N(r, f') + m(r, f') \leqslant$$
$$\leqslant 2N(r, f) + \left(m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right) \leqslant 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

и леммы о логарифмической производной Р. Неванлинна [см. (10), стр. 254].

ТЕОРЕМА 1_2. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\infty$, то для всех $r>\omega$*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K\int_{\omega}^{kr} \frac{\ln^+ T(t, f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\,dt + O(1) \quad (k>1).$$

В частности, если

$$\int^{\infty} \frac{\ln^+ T(t, f)}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}}\,dt < \infty,$$

то

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1).$$

Для доказательства первого утверждения нужно в теореме 1 положить $\rho = kr$.

ТЕОРЕМА 1_3 [Р. Неванлинна ([8])]. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\infty$ и имеет конечный порядок, то*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) = O(1) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

При $l=0$ это утверждение представляет собой частный случай теоремы 1_2. При рассмотрении случая $l>0$ нужно учесть, что производная функции конечного порядка есть тоже функция конечного порядка [см. ([3])] *.

ТЕОРЕМА 1_4. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<1$, то оценка*

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K\left(\ln^+ T(r, f) + \ln\frac{1}{1-r}\right) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

справедлива для всех $r \in (\omega, 1)$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K\left(\ln^+ T(\rho, f^{(l)}) + \ln^+\frac{1}{\rho-r} + \ln\frac{1}{\omega}\right).$$

Положим

$$\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-r}\left(1 + \frac{1}{\ln^+ T(r, f^{(l)})}\right);$$

тогда

$$\ln^+\frac{1}{\rho-r} = \ln^+\frac{1+\ln^+ T(r, f^{(l)})}{1-r} \leqslant \ln\frac{1}{1-r} + \ln^+\ln^+ T(r, f^{(l)}) + \ln 2,$$

$$\ln^+ T(\rho, f^{(l)}) \leqslant 2\ln^+ T(r, f^{(l)}).$$

Последнее неравенство выполняется для всех $r \in (0, 1)$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины. Это легко вывести

* Это легко следует из приведенного выше неравенства

$$T(r, f^{(l)}) \leqslant 3^l\, T(r, f).$$

из цитированной выше леммы Бореля, принимая за независимую переменную величину $(1-r)^{-1}$.

Таким образом,

$$A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K\left(\ln^{+} T\left(r, f^{(l)}\right) + \ln\frac{1}{1-r} + O(1)\right)$$

для всех $r \in (0, 1)$, кроме, быть может, множества конечной логарифмической длины. Чтобы доказать теорему, достаточно учесть справедливость вне некоторого множества конечной логарифмической длины соотношения

$$T\left(r, f^{(l)}\right) \leqslant 3^{l} T(r, f) + K \ln\frac{1}{1-r}$$

[см. ([3])].

Перейдем к оценке величины $B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \Omega$, то имеет место оценка*

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K\left\{\frac{\ln^{+} T(\rho, f)}{r^{\frac{\pi}{\gamma}}} + \frac{1}{r^{\frac{\pi}{\gamma}}}\ln^{+}\frac{1}{\rho-r} + O(1)\right\}$$

$$(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi, \quad \gamma = \beta - \alpha, \quad 0 < \omega < r < \rho < \Omega).$$

Доказательство. Из определения величины $B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ следует неравенство

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \frac{2}{\gamma r^{\frac{\pi}{\gamma}}} 2\pi m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Поэтому наша теорема непосредственно вытекает из следующей теоремы Р. Неванлинна, известной под названием «леммы о логарифмической производной» [см. ([9])]:

Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \Omega$, то для любых r и ρ, удовлетворяющих неравенству $0 < r < \rho < \Omega$, справедливо соотношение

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 34 + 5\ln^{+}|\lambda| + 3\ln^{+}\frac{1}{|c_{\lambda}|} + $$
$$+ 7\ln^{+}\frac{1}{r} + 3\ln^{+}\frac{1}{\rho-r} + 4\ln^{+} T(\rho, f),$$

где c_{λ} — первый отличный от нуля коэффициент разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$.

Из теоремы 2 получаются следствия, аналогичные тем, которые были ранее выведены из теоремы 1. Доказательства этих следствий строятся по тому же образцу, что и доказательства следствий теоремы 1, поэтому мы ограничимся здесь только формулировками.

ТЕОРЕМА 2_1. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \infty$, то для всех $r > \omega$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины, справедливо соотношение*

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K \ln^{+} T(r, f) \quad (l = 0, 1, 2, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 2_2. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\infty$, то для всех $r>\omega$*

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K \frac{\ln^+ T(kr, f)}{r^{\frac{\pi}{\gamma}}} + O(1) \quad (k>1).$$

В частности, если

$$\ln^+ T(r, f) = O\left(r^{\frac{\pi}{\gamma}}\right),$$

то

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1).$$

ТЕОРЕМА 2_3 [Р. Неванлинна ([8])]. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\infty$ и имеет конечный порядок, то*

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) = O(1) \quad (l=0, 1, 2, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 2_4. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<1$, то оценка*

$$B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant K\left(\ln^+ T(r, f) + \ln\frac{1}{1-r}\right)$$

справедлива для всех $r \in (\omega, 1)$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины.

§ 3. Оценка сверху величины $m_{\alpha\beta}(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi$ при помощи величины $S_{\alpha\beta}(r, f)$

Фундаментом всей работы является следующая общая теорема, доказательству которой посвящается этот параграф.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant |z| < \Omega$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$. Тогда, каковы бы ни были числа ρ, r и R, удовлетворяющие неравенству $0 < k^{-1}r < \rho < r < R < \min(kr, \Omega)$ $(k>1)$, справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\rho}^{r} m_{\alpha\beta}(t, f)\, dt \leqslant K \frac{r^{2+\frac{\pi}{\gamma}}}{R-r}\{S_{\alpha\beta}(R, f) + 1\} \quad (\gamma = \beta - \alpha). \tag{A}$$

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Если функция $F(z)$ мероморфна при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $|z|<\Omega$, то при любых r и R таких, что $\omega < r < R < \Omega$, имеет место неравенство*

$$\int\limits_{0}^{r} m_{0\pi}(t, F)\, t\, dt \leqslant \left(2 + \frac{2}{\pi}\right)\frac{(R^2+1)^2}{R-r} S_{0\pi}(R, F) + KR^3.$$

Доказательство. Будем исходить из неравенства (N) (§ 1, стр. 283), которое можно записать в виде

$$\ln^+ |F(z)| \leqslant U_1(z, \mu) + U_2(z, \mu) + U_3(z, \mu), \tag{1}$$

если принять обозначения:

$$U_1(z, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\mu}^{\mu} \ln^+ |F(\tau)| \frac{y}{(x-\tau)^2 + y^2} d\tau,$$

$$U_2(z, \mu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln^+ |F(\mu e^{i\theta})| \left\{ \frac{\mu^2 - t^2}{\mu^2 + t^2 - 2\mu t \cos(\theta - \varphi)} - \frac{\mu^2 - t^2}{\mu^2 + t^2 - 2\mu t \cos(\theta + \varphi)} \right\} d\theta,$$

$$U_3(z, \mu) = \sum_{\substack{|b_k| < \mu \\ \operatorname{Im} b_k > 0}} \ln \left| \frac{z - \bar{b}_k}{z - b_k} \right|$$

($z = te^{i\varphi} = x + iy, \quad 0 < t < r < \mu < \Omega, \quad b_k$ — полюсы $F(z)$).

Умножив обе части неравенства (1) на t, проинтегрируем его по φ от 0 до π и по t от 0 до r. Мы получим:

$$2\pi \int_0^r m_{0\pi}(t, F)\, t\, dt \leqslant \int_0^r \int_0^{\pi} U_1(te^{i\varphi}, \mu)\, t\, dt\, d\varphi +$$

$$+ \int_0^r \int_0^{\pi} U_2(te^{i\varphi}, \mu)\, t\, dt\, d\varphi + \int_0^r \int_0^{\pi} U_3(te^{i\varphi}, \mu)\, t\, dt\, d\varphi. \qquad (2)$$

Оценим двойные интегралы правой части этого неравенства.

а) Оценка первого интеграла. Можно записать следующую цепь соотношений:

$$\int_0^r \int_0^{\pi} U_1(te^{i\varphi}, \mu)\, t\, dt\, d\varphi \leqslant (1 + r^2) \int_0^r \int_0^{\pi} \frac{U_1(te^{i\varphi}, \mu)}{1 + t^2}\, t\, dt\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant (1 + r^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r \frac{U_1(x + iy, \mu)}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1 + r^2}{\pi} \int_0^r \int_{-\mu}^{\mu} \ln^+ |F(\tau)| \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, dx}{(1 + x^2 + y^2)[(x - \tau)^2 + y^2]} \right\} dy\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 2r(1 + r^2) \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\ln^+ |F(\tau)|}{1 + \tau^2}\, d\tau\, ^* =$$

$$= 2r(1 + r^2) \left\{ \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\ln^+ |F(\tau)|}{1 + \tau^2}\, d\tau + \int_{\omega}^{\mu} \frac{\ln^+ |F(\tau)| + \ln^+ |F(-\tau)|}{1 + \tau^2}\, d\tau \right\}.$$

В последнем выражении интеграл от ω до μ нетрудно оценить сверху при помощи величины $A_{0\pi}$. Действительно, при $\omega < \mu < R < \Omega$ справедливо соотношение

---

* Мы здесь использовали легко проверяемое соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, dx}{(1 + x^2 + y^2)[(x - \tau)^2 + y^2]} \leqslant \frac{2\pi}{1 + \tau^2}.$$

$$A_{0\pi}(R, F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega}^{R}(\ln^{+}|F(\tau)| + \ln^{+}|F(-\tau)|)\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{R^2}\right)d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega}^{\mu}(\ln^{+}|F(\tau)| + \ln^{+}|F(-\tau)|)\left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{R^2}\right)d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{\mu^2}{R^2}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{\omega}^{\mu}\frac{\ln^{+}|F(\tau)| + \ln^{+}|F(-\tau)|}{\tau^2}\,d\tau.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi U_1(te^{i\varphi}, \mu)\,t\,dt\,d\varphi \leqslant 2r(1 + r^2)\left\{\int\limits_{-\omega}^{\omega}\frac{\ln^{+}|F(\tau)|}{1+\tau^2}\,d\tau + \frac{\pi R^2}{R^2 - \mu^2}A_{0\pi}(R, F)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi R(1 + R^2)\left\{\frac{R}{R-\mu}A_{0\pi}(R, F) + K\right\}.$$

б) Оценка второго интеграла. Мы имеем:

$$\int\limits^r\int\limits_0^\pi U_2(te^{i\varphi}, \mu)\,t\,dt\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi \ln^{+}|F(\mu e^{i\theta})|\left\{\int\limits_0^\pi\left[\frac{\mu^2 - t^2}{\mu^2 + t^2 - 2\mu t\cos(\varphi - \theta)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\mu^2 - t^2}{\mu^2 + t^2 - 2\mu t\cos(\varphi + \theta)}\right]d\varphi\right\}t\,dt\,d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi \ln^{+}|F(\mu e^{i\theta})|\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\mu t}{\mu^2 - t^2}\sin\theta\right)t\,dt\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi \ln^{+}|F(\mu e^{i\theta})|\frac{2\mu t}{\mu^2 - t^2}\sin\theta\,t\,dt\,d\theta \leqslant \frac{2\mu r^3}{\mu - r}B_{0\pi}(\mu, F) \leqslant \frac{2R^4}{\mu - r}B_{0\pi}(\mu, F).$$

в) Оценка третьего интеграла. Очевидно,

$$\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi U_3(te^{i\varphi}, \mu)\,t\,dt\,d\varphi \leqslant (1 + r^2)\int\limits_0^r\int\limits_0^\pi\frac{U_3(te^{i\varphi}, \mu)}{1+t^2}\,t\,dt\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant (1 + r^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^r\frac{U_3(x + iy, \mu)}{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$$

$$= (1 + r^2)\int\limits_0^r\left\{\sum_{|b_k|\leqslant\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{z - \bar b_k}{z - b_k}\right|\frac{dx}{1 + x^2 + y^2}\right\}dy \quad (z = x + iy).$$

С помощью теории вычетов нетрудно подсчитать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{z - \bar b_k}{z - b_k}\right|\frac{dx}{1 + x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}\ln\frac{\alpha_k^2 + (y + \beta_k + \sqrt{1+y^2})^2}{\alpha_k^2 + (|y - \beta_k| + \sqrt{1+y^2})^2}$$

$$(z = x + iy, \quad y > 0, \quad b_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_k > 0).$$

Применяя хорошо известное элементарное неравенство, получаем:

$$\ln \frac{\alpha_k^2+(y+\beta_k+\sqrt{1+y^2})^2}{\alpha_k^2+(|y-\beta_k|+\sqrt{1+y^2})^2}=\ln\left(1+\frac{4y\beta_k+2\sqrt{1+y^2}(y+b_k+|y-\beta_k|)}{\alpha_k^2+(|y-\beta_k|+\sqrt{1+y^2})^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4y\beta_k+2\sqrt{1+y^2}(y+\beta_k+|y-\beta_k|)}{\alpha_k^2+(|y-\beta_k|+\sqrt{1+y^2})^2}\leqslant 4(y+\sqrt{1+y^2})\frac{\beta_k}{\alpha_k^2+\beta_k^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left|\frac{z-\bar b_k}{z-b_k}\right|\frac{dx}{1+x^2+y^2}\leqslant 4\pi\frac{\sin\varphi_k}{r_k}\quad (b_k=r_ke^{i\varphi_k}).$$

Используя это неравенство, мы получаем оценку:

$$\int_0^r\int_0^\pi U_3(te^{i\varphi},\mu)\,t\,dt\,d\varphi\leqslant 4\pi r(1+r^2)\left\{\sum_{|b_k|\leqslant\omega}\frac{\sin\varphi_k}{r_k}+\sum_{\omega<|b_k|\leqslant\mu}\frac{\sin\varphi_k}{r_k}\right\}.$$

Оценим $\sum\limits_{\omega<|b_k|\leqslant\mu}$ сверху при помощи величины $C_{0\pi}$. Для этого заметим, то при $\mu<R<\Omega$ имеет место неравенство

$$C_{0\pi}(R,F)=2\sum_{\omega<|b_k|\leqslant R}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{R^2}\right)\sin\varphi_k\geqslant$$

$$\geqslant 2\sum_{\omega<|b_k|\leqslant\mu}\left(\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{R^2}\right)\sin\varphi_k\geqslant 2\left(1-\frac{\mu^2}{R^2}\right)\sum_{\omega<|b_k|\leqslant\mu}\frac{\sin\varphi_k}{r_k}.$$

Таким образом,

$$\int_0^r\int_0^\pi U_3(te^{i\varphi},\mu)\,t\,dt\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant 4\pi r(1+r^2)\left\{\sum_{|b_k|\leqslant\omega}\frac{\sin\varphi_k}{r_k}+\frac{R^2}{2(R^2-\mu^2)}C_{0\pi}(R,F)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi R(R^2+1)\left\{\frac{R}{R-\mu}C_{0\pi}(R,F)+K\right\}.$$

Подставив все полученные оценки интегралов в неравенство (2), придем к соотношению:

$$\int_0^r m_{0\pi}(t,F)\,t\,dt\leqslant\frac{R^2(R^2+1)}{R-\mu}[A_{0\pi}(R,F)+C_{0\pi}(R,F)]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{R^4}{\mu-r}B_{0\pi}(\mu,F)+KR^3\quad(0<\omega<r<\mu<R<\Omega).$$

Используя то обстоятельство, что

$$A_{0\pi}(R,F)+C_{0\pi}(R,F)\leqslant S_{0\pi}(R,F)+O(1),$$

$$B_{0\pi}(\mu,F)\leqslant S_{0\pi}(\mu,F)+O(1)\leqslant S_{0\pi}(R,F)+O(1)$$

(это следует из утверждения N_1, § 1), получаем:

$$\int_0^r m_{0\pi}(t,F)\,t\,dt\leqslant(R^2+1)^2S_{0\pi}(R,F)\left\{\frac{1}{R-\mu}+\frac{1}{\pi(\mu-r)}\right\}+KR^3$$

$$(0<\omega<r<\mu<R<\Omega).$$

Чтобы вывести отсюда утверждение леммы, нужно положить $\mu = \frac{1}{2}(R+r)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы и, кроме того (что, конечно, не уменьшает общности нашего исследования), условию $f(0) \neq 0, \infty$. Тогда функция

$$F(\zeta) = f(\zeta^{\frac{\gamma}{\pi}} e^{i\alpha}) \quad (\gamma = \beta - \alpha)$$

будет, очевидно, удовлетворять условиям только что доказанной леммы. В силу последней, можно утверждать, что

$$\int_0^r m_{0\pi}(t, F)\, t\, dt \leqslant \frac{3(R^2+1)^2}{R-r} S_{0\pi}(R, F) + KR^3. \tag{3}$$

Заметив, что

$$m_{0\pi}(t, F) = \frac{\pi}{\gamma} m_{\alpha\beta}(t^{\frac{\gamma}{\pi}}, f),$$

$$S_{0\pi}(R, F) = S_{\alpha\beta}(R^{\frac{\gamma}{\pi}}, f) + O(1),$$

из (3) без труда получаем, что при любых r и R таких, что $0 < \omega < r < R < \Omega$, имеет место неравенство

$$\int_0^r m_{\alpha\beta}(t, f)\, t^{\frac{2\pi}{\gamma}-1} dt \leqslant \frac{3\gamma^2}{\pi^2} \frac{(R^{\frac{2\pi}{\gamma}}+1)^2}{R^{\frac{\pi}{\gamma}} - r^{\frac{\pi}{\gamma}}} [S_{\alpha\beta}(R, f) + O(1)] + KR^{\frac{3\pi}{\gamma}}.$$

Подчиняя R ограничению $R < \min[kr, \Omega]$ и замечая, что тогда

$$R^{\frac{\pi}{\gamma}} - r^{\frac{\pi}{\gamma}} = \frac{\pi}{\gamma} \int_r^R \sigma^{\frac{\pi}{\gamma}-1} d\sigma \geqslant \frac{\pi}{\gamma \sqrt{k}} r^{\frac{\pi}{\gamma}-1} (R-r),$$

приходим к неравенству:

$$\int_0^r m_{\alpha\beta}(t, f)\, t^{\frac{2\pi}{\gamma}-1} dt \leqslant \frac{Kr^{1+\frac{3\pi}{\gamma}}}{R-r} [S_{\alpha\beta}(R, f) + 1].$$

Выбрав ρ так, что $k^{-1} r < \rho < r$, получаем соотношение:

$$\int_\rho^r m_{\alpha\beta}(t, f)\, dt \leqslant \rho^{1-\frac{2\pi}{\gamma}} \int_\rho^r m_{\alpha\beta}(t, f)\, t^{\frac{2\pi}{\gamma}-1} dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho^{1-\frac{2\pi}{\gamma}} \int_0^r m_{\alpha\beta}(t, f)\, t^{\frac{2\pi}{\gamma}-1} dt \leqslant \frac{Kr^{2+\frac{\pi}{\gamma}}}{R-r} [S_{\alpha\beta}(R, f) + 1]$$

$$(k^{-1}r < \rho < r < R < \min(kr, \Omega)).$$

Тем самым теорема доказана.

Для наших приложений теорема 3 не совсем удобна, так как она дает оценку интеграла от величины $m_{\alpha\beta}(t, f)$, а не самой этой величины. Оценки же самой величины $m_{\alpha\beta}(t, f)$ мы получим из следствий теоремы 3. Заметим, что эти оценки будут иметь место, вообще говоря, не для всех значений $t \in (0, \Omega)$, и, чтобы характеризовать исключительные множества, введем следующие понятия:

α) Относительной ∞-мерой множества $E \subset (0, \infty)$ называется величина

$$\operatorname{mes}_{\infty}^{*} E = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{E \cap (0, r)\}}{r}.$$

β) Относительной 1-мерой множества $E \subset (0, 1)$ называется величина

$$\operatorname{mes}_{1}^{*} E = \operatorname{mes}_{\infty}^{*} \widetilde{E},$$

где $\widetilde{E}$ есть образ множества E при отображении интервала $0 < t < 1$ на интервал $1 < r < \infty$ посредством $r = \frac{1}{1-t}$.

Понятием относительной ∞-меры мы будем пользоваться при изучении функций, мероморфных во всей плоскости $|z| < \infty$ или в угле с вершиной в начале координат, а понятием относительной 1-меры — при изучении функций, мероморфных в круге $|z| < 1$ или в секторе этого круга.

Очевидны следующие свойства относительной Ω-меры ($\Omega = 1, \infty$):

1) $0 \leqslant \operatorname{mes}_{\Omega}^{*} E \leqslant 1$,

2) $\operatorname{mes}_{\Omega}^{*}(\omega, \Omega) = 1$ при $0 < \omega < \Omega$,

3) $\operatorname{mes}_{\Omega}^{*}(E_1 \cup E_2) \leqslant \operatorname{mes}_{\Omega}^{*} E_1 + \operatorname{mes}_{\Omega}^{*} E_2$.

Сформулируем теперь следствия теорем ..., дающие оценку самой величины $m_{\alpha\beta}(t, f)$.

ТЕОРЕМА 3₁ (параболический случай). *Если функция $f(z)$ мероморфна при* $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$, $0 \leqslant |z| < \infty$, *то, каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и определенная на $[0, \infty)$ непрерывная неубывающая функция $\varphi(t) > 0$, неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant K t^{\frac{\pi}{\gamma}} \varphi^2(t) [S_{\alpha\beta}(R_t, f) + 1],$$

где

$$R_t = t\left(1 + \frac{1}{\varphi(t)}\right),$$

справедливо для всех $t \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры, меньшей чем ε *.

ТЕОРЕМА 3₂ (гиперболический случай). *Если функция $f(z)$ мероморфна при* $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$, $0 \leqslant |z| < 1$, *то, каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и определенная на $(0, 1)$ непрерывная неубывающая функция $\varphi(t) > 0$, неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant \frac{K\varphi^2(t)}{(1-t)^2} [S_{\alpha\beta}(R_t, f) + 1],$$

где R_t определяется равенством

$$\frac{1}{1-R_t} = \frac{1}{1-t}\left(1 + \frac{1}{\varphi(t)}\right),$$

справедливо для всех $t \in (0, 1)$, кроме, быть может, множества относительной 1-меры, меньшей чем ε.

Доказательства теорем 3₁ и 3₂ основаны на следующей лемме.

ЛЕММА. *Если три функции:* $m(t) \geqslant 0$, $S(t) \geqslant 0$, $\varphi(t) > 0$ *определены при* $0 \leqslant t < \infty$ *и при этом:*

а) *функции $S(t)$ и $\varphi(t)$ не убывают,*

б) *функция $\varphi(t)$ непрерывна,*

---

* Заметим, что фигурирующая в этой теореме величина K, вообще говоря, зависит от ε и от функции φ. Это замечание относится и к теореме 3₂.

в) *неравенство*

$$\int_{\rho}^{r} m(t)\,dt \leqslant \frac{Kr^{\lambda+2}}{R-r}\{S(R)+1\} \quad (\lambda \geqslant 0)$$

имеет место при любых ρ, r *и* R, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \omega < \rho < r < R < \infty,$$

то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, *для всех* $t \in (0, \infty)$, *кроме, быть может, множества относительной* ∞*-меры, меньшей чем* ε, *справедливо соотношение*

$$m(t) \leqslant K\varphi^2(t)\, t^{\lambda}\{S(R_t)+1\},$$

где

$$R_t = t\left(1+\frac{1}{\varphi(t)}\right).$$

Доказательство. Положим в неравенстве в)

$$r = r_{\rho} = \rho\left(1+\frac{1}{2\varphi(\rho)}\right), \quad R = R_{\rho} = \rho\left(1+\frac{1}{\varphi(\rho)}\right).$$

Тогда после несложных упрощений получим:

$$\int_{\rho}^{r_{\rho}} m(t)\,dt \leqslant K\varphi(\rho)\,\rho^{\lambda+1}[S(R_{\rho})+1].$$

Если через E_{ρ}^{N} обозначить то подмножество интервала $I_{\rho} = [\rho, r_{\rho}]$, на котором

$$m(t) > NK\varphi^2(\rho)\,\rho^{\lambda}[S(R_{\rho})+1],$$

то из предыдущего соотношения будет следовать такая оценка меры этого подмножества:

$$\operatorname{mes} E_{\rho}^{N} < \frac{1}{N}\,\frac{\rho}{\varphi(\rho)}.$$

Замечая, что $\operatorname{mes} I_{\rho} = \frac{\rho}{2\varphi(\rho)}$, будем иметь:

$$\frac{\operatorname{mes} E_{\rho}^{N}}{\operatorname{mes} I_{\rho}} \leqslant \frac{1}{2N}. \tag{4}$$

Покроем полуось $[1, \infty)$ последовательностью интервалов I_{ρ_k} $(k = 0, 1, \ldots)$, полагая $\rho_0 = 1$, $\rho_{k+1} = r_{\rho_k}$ *. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{B}_0^N = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_{\rho_k}^{N}.$$

Для его относительной ∞-меры получаем оценку:

$$\operatorname{mes}_{\infty}^{*} \mathfrak{B}_0^N = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{\mathfrak{B}_0^N \cap (0, r)\}}{r} \leqslant 2q \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{\mathfrak{B}_0^N \cap (0, r)\}}{r\left(1+\frac{1}{\varphi(r)}\right)} \leqslant$$

---

* Построенные интервалы действительно покроют $[1, \infty)$. Если предположить противное, т. е. что $\alpha = \sup \rho_k < \infty$, то, выбрав δ так, что $0 < \delta < \varphi^{-1}(\alpha)$, и ρ_{k_0} так, что $\rho_{k_0} > \alpha(1+\delta)^{-1}$, мы придем к заключению, что $\rho_{k_0+1} = r_{\rho_{k_0}} > \alpha$, которое противоречит тому, что $\alpha = \sup \rho_k$.

$$\leqslant 2q \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\sum\limits_{\rho_k<r} \operatorname{mes} E^N_{\rho_k}}{\sum\limits_{\rho_k<r} \operatorname{mes} I_\rho} \leqslant \frac{q}{N} \quad (q = \max\{1, \varphi^{-1}(0)\})$$

(последнее неравенство имеет место в силу (4)). Вне множества $\mathfrak{B}_0^N$ справедливо соотношение

$$m(t) \leqslant NK\varphi^2(\rho_k)\rho_k^\lambda [S(R_{\rho_k})+1] \quad (\rho_k \leqslant t \leqslant \rho_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Полагая

$$\hat{R}_\rho = \sup_{0\leqslant t\leqslant\rho} R_t,$$

мы, в силу неубывания $\varphi(\rho)$, $S(R)$ и $\hat{R}_\rho$, при $\rho \overline{\in} \mathfrak{B}_0^N$ получим неравенство

$$m(\rho) < NK\varphi^2(\rho)\rho^\lambda [S(\hat{R}_\rho)+1].$$

Теперь, чтобы убедиться в справедливости доказываемой леммы, достаточно выбрать $N > \frac{q}{\varepsilon}$ и воспользоваться следующим утверждением.

Для всех $\rho \in (0, \infty)$, за исключением, быть может, множества относительной ∞-меры нуль, справедливо равенство

$$\hat{R}_\rho = R_\rho.$$

Докажем это утверждение. Так как функции

$$R_t = t\left(1 + \frac{1}{\varphi(t)}\right) \text{ и } \hat{R}_t = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} R_\tau$$

непрерывны, то множество $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\hat{R}_t > R_t)$ открыто и, следовательно, состоит из конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов. Обозначим эти интервалы через $I_\alpha = (t_\alpha, \tilde{t}_\alpha)$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty} R_t = \infty$, то ни один из интервалов I_α не может простираться до бесконечности. Очевидно, что для всех α справедливо равенство

$$t_\alpha\left(1 + \frac{1}{\varphi(t_\alpha)}\right) = \tilde{t}_\alpha\left(1 + \frac{1}{\varphi(\tilde{t}_\alpha)}\right),$$

поэтому

$$\operatorname{mes} I_\alpha = \tilde{t}_\alpha - t_\alpha = \frac{t_\alpha}{\varphi(t_\alpha)} - \frac{\tilde{t}_\alpha}{\varphi(\tilde{t}_\alpha)} \leqslant t_\alpha\left(\frac{1}{\varphi(t_\alpha)} - \frac{1}{\varphi(\tilde{t}_\alpha)}\right) = t_\alpha \int\limits_{t_\alpha}^{\tilde{t}_\alpha} \left| d\frac{1}{\varphi(t)}\right|.$$

Последнее соотношение дает возможность установить, что относительная ∞-мера множества $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_\alpha I_\alpha$ равна нулю:

$$\operatorname{mes}^{*}_{\infty} \mathfrak{B} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{mes}(\bigcup\limits_{t_\alpha<r} I_\alpha)}{r} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\left(\sum_{t_\alpha<\sqrt{r}} \operatorname{mes} I_\alpha + \sum_{\sqrt{r}\leqslant t_\alpha<r} \operatorname{mes} I_\alpha\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{1}{r}\left(\sqrt{r}\int\limits_0^\infty \left|d\frac{1}{\varphi(t)}\right| + r\int\limits_{\sqrt{r}}^\infty \left|d\frac{1}{\varphi(t)}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{r\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{r}\,\varphi(0)} + \frac{1}{\varphi(\sqrt{r})} - \frac{1}{\varphi(\infty)}\right) = 0.$$

Утверждение доказано, а вместе с ним и лемма.

Доказательство теоремы 3_1. Заметим, что справедливость утверждения леммы не нарушится, если на выбор ρ, r и R наложить дополнительное ограничение:

$$k^{-1}r < \rho < r < R < kr$$

с достаточно большим k. Действительно, при доказательстве леммы мы полагали

$$r = \rho\left(1 + \frac{1}{2\varphi(\rho)}\right), \quad R = \rho\left(1 + \frac{1}{\varphi(\rho)}\right),$$

а эти r и R удовлетворяют указанному выше условию при $k \geqslant 1 + \frac{1}{\varphi(0)}$. Поэтому теорема 3_1 является тривиальным следствием теоремы 3 и только что доказанной леммы, в которой надлежит взять $\lambda = \frac{\pi}{\gamma}$.

Доказательство теоремы 3_2. Так как функции $m_{\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$, φ определены теперь только при $0 < t < 1$, то лемму нельзя применить непосредственно. Целесообразно перейти от переменных R, r, ρ, t, меняющихся в интервале $(0, 1)$, к переменным, меняющимся в интервале $(1, \infty)$, по формулам:

$$S = \frac{1}{1-R}, \quad s = \frac{1}{1-r}, \quad \sigma = \frac{1}{1-\rho}, \quad \tau = \frac{1}{1-t}.$$

Полагая

$$\mathfrak{m}_{\alpha\beta}(\tau, f) = m_{\alpha\beta}\left(1 - \frac{1}{\tau}, f\right), \quad \mathfrak{S}_{\alpha\beta}(S, f) = S_{\alpha\beta}\left(1 - \frac{1}{S}, f\right),$$

$$\Phi(\sigma) = \varphi\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right),$$

мы запишем неравенство (A) в виде:

$$\int_s^S \mathfrak{m}_{\alpha\beta}(\tau, f)\frac{d\tau}{\tau^2} \leqslant K\,\frac{Ss}{S-s}\,[\mathfrak{S}_{\alpha\beta}(S, f) + 1],$$

откуда легко следует, что при $S < ks\,(k > 1)$

$$\int_s^S \mathfrak{m}_{\alpha\beta}(\tau, f)\,d\tau \leqslant \frac{Ks^4}{S-s}\,[\mathfrak{S}_{\alpha\beta}(S, f) + 1].$$

Применяя теперь лемму при $\lambda = 2$, получаем, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для всех $\tau \in (1, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры, меньшей чем ε, имеет место соотношение

$$\mathfrak{m}_{\alpha\beta}(\tau, f) \leqslant K\Phi^2(\tau)\,\tau^2\,[\mathfrak{S}_{\alpha\beta}(S_\tau, f) + 1],$$

где

$$S_\tau = \tau\left(1 + \frac{1}{\Phi(\tau)}\right).$$

Возвращаясь к прежним переменным, получаем утверждение доказываемой теоремы.

В главе II будет удобно пользоваться следствиями теорем 3_1 и 3_2, получающимися при том или ином частном выборе функции $\varphi(t)$. Мы сейчас сформулируем и докажем эти следствия.

ТЕОРЕМА 3_{11}. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant |z| < \infty$, то, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant Kt^{\frac{\pi}{\gamma}}\,[S_{\alpha\beta}(t, f) + 1]^{1+\delta}$$

выполняется для всех $t \in (0, \infty)$, *за исключением, быть может, множества относительной* ∞-*меры, меньшей чем* ε.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$S_{\alpha\beta}(t, f) > 1 \quad (0 \leqslant t < \infty)^{*}.$$

Положим

$$\varphi(t) = \ln S_{\alpha\beta}(t, f).$$

Тогда, в силу цитированной на стр. 287 леммы Бореля, для всех $t \in (0, \infty)$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины, справедливо неравенство

$$S_{\alpha\beta}(R_t, f) \leqslant S_{\alpha\beta}^{1+\frac{\delta}{2}}(t, f).$$

Так как прибавление к некоторому множеству множества конечной логарифмической длины не изменяет относительной ∞-меры первого, то, на основании теоремы 3_1, мы вправе утверждать, что для всех $t \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры, меньшей чем ε, выполняется соотношение

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant K t^{\frac{\pi}{\gamma}} \ln^2 S_{\alpha\beta}(t, f)\,[S_{\alpha\beta}^{1+\frac{\delta}{2}}(t, f) + 1],$$

откуда следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3_{12}. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна при* $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant |z| < \infty$, *то, каковы бы ни были числа* $\varepsilon > 0$ *и* $m > 1$, *неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant K t^{\frac{\pi}{\gamma}} [S_{\alpha\beta}(mt, f) + 1]$$

выполняется для всех $t \in (0, \infty)$, *за исключением, быть может, множества относительной* ∞-*меры, меньшей чем* ε.

Для доказательства нужно в теореме 3_1 взять

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{m-1}.$$

Аналогичным образом из теоремы 3_2 получаются такие следствия.

ТЕОРЕМА 3_{21}. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна при* $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant |z| < 1$, *то, каковы бы ни были числа* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$, *неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant \frac{K}{(1-t)^2} [S_{\alpha\beta}(t, f) + 1]^{1+\delta}$$

выполняется для всех $t \in (0, 1)$, *за исключением, быть может, множества относительной* 1-*меры, меньшей чем* ε.

ТЕОРЕМА 3_{22}. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна при* $\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta$, $0 \leqslant |z| < 1$, *то, каковы бы ни были числа* $\varepsilon > 0$ *и* $m > 1$, *неравенство*

$$m_{\alpha\beta}(t, f) \leqslant \frac{K}{(1-t)^2} \left[S_{\alpha\beta}\left(1 - \frac{1-t}{m}, f\right) + 1\right]$$

выполняется для всех $t \in (0, 1)$, *за исключением, быть может, множества относительной* 1-*меры, меньшей чем* ε.

---

* Чтобы обеспечить выполнение этого условия, достаточно умножить $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ на достаточно большую константу.

ГЛАВА II

§ 1. Формулировка основных результатов

В этой главе мы рассматриваем мероморфные функции, принимающие некоторые из своих значений вблизи конечной системы лучей, и устанавливаем, при некоторых дополнительных ограничениях, оценки их роста.

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов, условимся, в каком смысле мы будем понимать «близость» множества a-точек мероморфной при $|z|<\Omega$ функции к системе лучей, исходящих из начала координат. Пусть дана система лучей

$$\arg z = \alpha_j \quad (j=1, 2, \ldots, n;\ 0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<2\pi). \tag{R}$$

Обозначим

$$\gamma_j=\alpha_{j+1}-\alpha_j \quad (j=1, 2, \ldots, n;\ \alpha_{n+1}=\alpha_1+2\pi), \quad \gamma=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\gamma_j.$$

Пусть $K_1(t)$ и $K_2(t)$ — две положительные неубывающие функции, первую из которых будем считать определенной в интервале $(0, \Omega)$, а вторую — в интервале $(0, \infty)$. Положим

$$k_1=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\dfrac{\ln K_1(t)}{\ln t} & (\Omega=\infty),\\[2mm] \overline{\lim\limits_{t\to 1}}\dfrac{\ln K_1(t)}{\ln\dfrac{1}{1-t}} & (\Omega=1),\end{cases}$$

$$k_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln K_2(t)}{\ln t},$$

$$\sigma_1=\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}K_1(t)\,t^{-k_1} & (\Omega=\infty),\\ \overline{\lim\limits_{t\to 1}}K_1(t)\,(1-t)^{k_1} & (\Omega=1),\end{cases}$$

$$\sigma_2=\overline{\lim_{t\to\infty}}K_2(t)\,t^{-k_2}.$$

Определение 1. Пусть дана мероморфная при $|z|<\Omega$ функция. Будем говорить, что ее a-точки $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к системе лучей (R), если для всех $r\in(0, \Omega)$, кроме, быть может, множества относительной Ω-меры нуль, справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\,\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, a)\leqslant K_1(r)\,K_2(T(r, f)), \tag{1}$$

где величина $\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, a)$ определена соотношением

$$\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, a)=2\sum_{\substack{\omega<r_k\leqslant r\\ \alpha_j\leqslant\varphi_k\leqslant\alpha_{j+1}}}\left(\frac{1}{r_k^{\frac{\pi}{\gamma_j}}}-\frac{r_k^{\frac{\pi}{\gamma_j}}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma_j}}}\right)\sin\frac{\pi}{\gamma_j}(\varphi_k-\alpha_j)$$

($r_k e^{i\varphi_k}$ — a-точки $f(z)$, рассматриваемые без учета кратности, т. е. каждой

a-точке, независимо от кратности, в сумме справа отвечает лишь единственное слагаемое).

Таким образом, «близость» a-точек к лучам мы будем характеризовать четырьмя постоянными: k_1, σ_1, k_2, σ_2. Чем меньше эти постоянные, тем, вообще говоря, ближе к лучам расположены a-точки. Отметим, что в дальнейшем мы будем считать число k_1 конечным, а $k_2 < 1$. Последнее объясняется тем, что условие (1) при $k_2 \geqslant 1$ не является, вообще говоря, существенным ограничением расположения a-точек *.

Определение 2. Комплексное число a называется слабо дефектным значением функции $f(z)$, мероморфной при $|z| < \Omega$, если

$$\Delta^*(a, f) = \sup_{\mathfrak{B}} \varliminf_{\substack{r\to\Omega \\ r \in C\mathfrak{B}}} \frac{m(r, a)}{T(r, f)} > 0,$$

где supremum берется по всем множествам $\mathfrak{B}$, для которых $\mathrm{mes}^*_\Omega\, \mathfrak{B} < 1$.

Основной результат работы составляют две нижеследующие теоремы.

ТЕОРЕМА А (параболический случай). *Пусть $f(z)$ мероморфна при $|z| < \infty$, и пусть при некотором $a \neq 0$, ∞ и некотором целом $l \geqslant 0$ выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий:*

1. а) *Нули и полюсы $f(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$.
2. а) *Полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(0, f) > 0$.
3. а) *Нули и полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{k_1, \sigma_2, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(\infty, f) > 0$.

Тогда порядок функции $f(z)$ конечен и не превосходит величины

$$\chi = \chi(\gamma, k_1, k_2) = \frac{\pi + \gamma k_1}{\gamma(1 - k_2)}.$$

Если дополнительно известно, что $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, $\sigma_1\sigma_2 = 0$), то рост $f(z)$ не более, чем нормального (минимального) типа порядка χ.

Итак, наша оценка роста функции зависит от минимального угла между лучами системы и от степени близости к ним a-точек функции (или производной). Порядок этой оценки тем меньше, чем больше минимальный угол между лучами и чем ближе к ним расположены a-точки.

Из теоремы А легко следует теорема Бибербаха, приведенная во введении, причем требование конечности порядка функции a priori можно опустить. Действительно, у любой целой функции

$$\Delta^*(\infty, f) = \delta(\infty, f) = 1.$$

Если же нули и единицы этой целой функции лежат на системе лучей с минимальным углом $\pi\rho^{-1}$, то они тем более $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки к

---

* Для любой мероморфной при $|z| < \Omega$ функции и любого a, как нетрудно проверить, имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} C_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, a) \leqslant KT(r, f) + O(1) \quad (\omega < r < \Omega).$$

этой системе (причем $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$). Таким образом, удовлетворяется условие 3 теоремы А (при $l = 0$, $a = 1$, $k_1 = k_2 = 0$, $\gamma = \pi\rho^{-1}$) и, в силу этой теоремы, можно утверждать, что рост функции не выше нормального типа порядка ρ. Частным случаем теоремы А является также упомянутая во введении теорема Неванлинна для целых функций. Проверка производится аналогично.

Теорема Эдрея* тоже является частным случаем теоремы А, причем, даже ослабив условия теоремы Эдрея, мы, тем не менее, можем усилить ее утверждение.

В самом деле, если, например, функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Эдрея и $\delta(\infty, f) > 0$, то она тем более удовлетворяет условию 3 нашей теоремы при $\gamma = \pi\rho^{-1}$, $k_1 = k_2 = 0$, $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$. Поэтому мы можем утверждать, что рост функции не выше нормального типа порядка ρ. Вместе с тем мы можем, не нарушая справедливости установленной нами оценки, требовать вместо $\delta(\infty, f) > 0$ выполнения более слабого условия $\Delta^*(\infty, f) > 0$. Условие, заключающееся в том, что нули и полюсы $f(z)$ и единицы $f^{(l)}(z)$ лежат все, кроме, быть может, конечного числа, на системе лучей, мы можем также заменить более слабым, а именно, что эти точки $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$) к лучам системы.

Если функция удовлетворяет условиям теоремы Эдрея и выполняется условие $\delta(1, f^{(l)}) > 0$**, то она тем более удовлетворяет условию 1 нашей теоремы, и, следовательно, упомянутым выше способом мы также можем уточнить оценку роста, принадлежащую Эдрею. Здесь, не нарушая справедливости этой уточненной оценки, возможно не только ослабить условие $\delta(1, f^{(l)}) > 0$ и уменьшить жесткость ограничений на аргументы корней уравнений

$$f(z) = 0, \quad f^{(l)}(z) = 1, \quad f^{-1}(z) = 0,$$

но и вовсе отказаться от каких бы то ни было ограничений на аргументы корней второго из этих уравнений.

ТЕОРЕМА Б (гиперболический случай). *Пусть $f(z)$ мероморфна при $|z| < 1$, и пусть при некотором $a \neq 0, \infty$ и некотором целом $l \geqslant 0$ выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий:*

1. а) *Нули и полюсы $f(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$.
2. а) *Полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(0, f) > 0$.
3. а) *Нули и полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к лучам* (R);
   б) $\Delta^*(\infty, f) > 0$.

Тогда порядок функции конечен и не превосходит величины

$$\lambda = \lambda(k_1, k_2) = \frac{2 + k_1}{1 - k_2}.$$

Характерно, что здесь порядок оценки роста не зависит от числа и расположения радиусов круга, «вблизи» которых расположены a-точки

---

* В полной формулировке, приведенной в подстрочном примечании ** на стр. 279.

** Аналогично можно рассуждать в случае, когда $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы Эдрея и $\delta(0, f) > 0$.

(лишь бы число этих радиусов было конечным), а зависит лишь от «степени близости» a-точек к радиусам. В частности, если $k_1 = k_2 = 0$ (что всегда выполняется, если a-точки лежат в точности на радиусах), то порядок функции не может превосходить 2.

Отметим, что в гиперболическом случае также можно уточнить оценку роста функции, если предполагать дополнительно выполнение условий, аналогичных тем, которые были приведены в конце формулировки теоремы А. Так как это обстоятельство, на наш взгляд, не представляет большого интереса, и так как получение этого уточнения после всего, что будет сделано в дальнейшем для доказательства теорем А и Б, не представляет труда, то мы ограничимся лишь формулировкой результата без доказательства.

Уточнение теоремы Б. *Если в условиях теоремы* Б $k_1 > 0$ *и* $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, $\sigma_1\sigma_2 = 0$), *то рост* $f(z)$ *не более, чем нормального (минимального) типа порядка* λ.

§ 2. Демонстрация метода доказательства на частных примерах

Доказательства теорем А и Б довольно громоздки. Эта громоздкость объясняется в основном тем, что мы, стремясь к возможно большей общности, привлекаем к рассмотрению не только a-точки функции, но и a-точки ее производных. Если a-точек производных не рассматривать, то многие простые, но весьма громоздкие детали отпадают. Поэтому, чтобы яснее выделить основную идею метода, мы приведем вначале полные доказательства следующих двух частных теорем.

ТЕОРЕМА 4. *Если нули и полюсы мероморфной при* $|z| < \infty$ *функции* $f(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$*-близки* ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$) *к системе лучей с минимальным углом* γ *и если при некотором* $a \neq 0, \infty$ *имеет место условие* $\Delta^*(a, f) > 0$, *то рост характеристики функции* $f(z)$ *не выше нормального типа порядка* $\pi\gamma^{-1}$.

ТЕОРЕМА 5. *Если нули и полюсы мероморфной при* $|z| < 1$ *функции* $f(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$*-близки к системе радиусов* (R) *и, более того,*

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \leqslant O\left(\ln\frac{1}{1-r}\right) \quad (0 \leqslant r < 1)$$

и если для некоторого $a \neq 0, \infty$ *имеет место* $\Delta^*(a, f) > 0$, *то для характеристики функции* $f(z)$ *справедлива оценка:*

$$T(r, f) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\ln\frac{e}{1-r} \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Теорема 4, очевидно, является частным случаем теоремы А. Что же касается теоремы 5, то ее нельзя считать частным случаем теоремы Б; хотя ограничения в теореме 5 более жесткие, но зато оценка роста более точная.

Доказательства теорем 4 и 5 существенно опираются на следующее неравенство, справедливое для всякой мероморфной при $|z| < \Omega$ функции и для любого комплексного числа $a \neq 0, \infty$:

$$m(r, a) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + R(r, f), \qquad (\text{Б})$$

где остаточный член $R(r, f)$ удовлетворяет неравенству

$$R(r, f) \leqslant \begin{cases} O(\ln[rT(r, f)]) & (\Omega = \infty), \\ O\left(\ln \frac{T(r, f)}{1 - r}\right) & (\Omega = 1) \end{cases}$$

для всех $r \in (0, \Omega)$, кроме, быть может, множества конечной логарифмической длины.

Неравенство (Б) легко следует из хорошо известного соотношения [см. ([10]), стр. 245]:

$$m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \geqslant m(r, 0) + m(r, a) - R(r, f)$$

($R(r, f)$ удовлетворяет приведенному выше неравенству для всех $r \in (0, \Omega)$, кроме, быть может, множества конечной логарифмической длины), достаточно лишь заметить, что

$$m\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + m(r, 0).$$

Доказательство теоремы 4. Условие $\Delta^*(a, f) > 0$ дает возможность утверждать, что для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, некоторого множества $\mathfrak{B} \subset (0, \infty)$ ($\text{mes}^*_\infty \mathfrak{B} < 1$), справедливо неравенство

$$T(r, f) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f)} m(r, a).$$

С помощью неравенства (Б) отсюда заключаем, что вне множества относительной ∞-меры, равной $\text{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$, имеет место соотношение

$$T(r, f) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f)} m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln[rT(r, f)]). \tag{1}$$

Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\varepsilon < 1 - \text{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. Согласно теореме 3_{11}, каково бы ни было $\delta > 0$, можно указать множество относительной ∞-меры, меньшей чем ε, вне которого

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant K \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} \left[S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) + 1\right]^{1+\delta} \leqslant$$
$$\leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) + 1\right\}^{1+\delta}$$

В силу теоремы N_2 (см. стр. 283),

$$S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) = S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) =$$
$$= A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + C_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1).$$

Для входящих в это соотношение величин A и B теоремы 1_1 и 2_1 дают следующие оценки (справедливые, вообще говоря, вне некоторого множества конечной логарифмической длины):

$$A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K \ln^+ T(r, f),$$
$$B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant K \ln^+ T(r, f).$$

Учитывая очевидное равенство

$$C_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right),$$

мы приходим к соотношению

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \ln^+ T(r, f)\right\}^{1+\delta},$$

имеющему место для всех $r \in (0, \infty)$, исключая, возможно, множество относительной ∞-меры $< \varepsilon$. Из этого соотношения, в силу условия теоремы, состоящего в том, что нули и полюсы $f(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки к лучам (R), получаем, что вне множества относительной ∞-меры $< \varepsilon$

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \ln^2 T(r, f).$$

Подставив эту оценку в правую часть неравенства (1), легко убедимся, что, каково бы ни было $\eta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $< \operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B} + \varepsilon < 1$, справедливо неравенство

$$T(r, f) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\eta)}.$$

Требуемая оценка порядка $T(r, f)$ немедленно получится, если мы докажем, что последнее неравенство при надлежащем увеличении постоянной K будет выполняться уже для всех $r > 1$. Последнее утверждение вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА α. *Если $u(r)$ и $v(r)$ — две неубывающие функции от $r > 0$, и если для всех $r > 0$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $\mu < 1$, имеет место неравенство*

$$u(r) < v(r),$$

то найдется число $A < \infty$ такое, что

$$u(r) < v\left(\frac{2}{1-\mu} r\right)$$

для всех $r > A$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность

$$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty,$$

такая, что

$$u(r_n) \geqslant v\left(\frac{2}{1-\mu} r_n\right).$$

Рассмотрим точечное множество, состоящее из интервалов $\left(r_n, \frac{2}{1-\mu} r_n\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Относительная ∞-мера этого множества, очевидно, не меньше $\frac{1}{2}(\mu + 1) > \mu$, и, следовательно, в нем найдется точка ρ, в которой $u(\rho) < v(\rho)$. Пусть, например, $\rho \in \left(r_k, \frac{2}{1-\mu} r_k\right)$; тогда

$$u(r_k) < u(\rho) < v(\rho) < v\left(\frac{2}{1-\mu} r_k\right),$$

что противоречит сделанному предположению. Лемма доказана.

Итак, порядок $T(r, f)$ не превосходит $\pi\gamma^{-1}$. Покажем, что если порядок в точности равен $\pi\gamma^{-1}$, то тип не может быть максимальным.

Воспользуемся снова неравенством (1). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < 1 - \operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. На основании теоремы 3_{12} можно утверждать, что для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $< \varepsilon$, справедлива следующая оценка величины $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$:

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant K \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} \left[S_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f}{f'}\right) + 1\right] =$$

$$= K \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} \left[S_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f'}{f}\right) + O(1)\right] =$$

$$= K r^{\frac{\pi}{\gamma}} \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \left[A_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f'}{f}\right) + \right.$$

$$\left. + \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(2r, f) + \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{1}{f}\right) + O(1)\right].$$

Так как порядок $f(z)$ конечен, то, в силу теорем 1_3 и 2_3,

$$A_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1),$$

и

$$B_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(1);$$

кроме того, по условию доказываемой теоремы, вне множества относительной ∞-меры нуль

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \left[\overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] = O(1)$$

Отсюда следует, что вне множества относительной ∞-меры $< \varepsilon$

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

В силу этого неравенства и соотношения (1), вне множества относительной ∞-меры < 1 имеет место оценка

$$T(r, f) \leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Остается лишь воспользоваться леммой α. Теорема 4 доказана *.

---

* При доказательстве этой теоремы нами был попутно установлен следующий факт:

Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \infty$ и ее нули и полюсы $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$) к системе лучей (R), то, каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и комплексное число $c \neq 0, \infty$, неравенство

$$m(r, c) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln [rT(r, f)]) \leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \ln^2 T(r, f)$$

выполняется для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительно ∞-меры, меньшей чем ε.

Если дополнительно известно, что порядок конечен, то

$$m(r, c) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln [rT(r, f)]) \leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}}$$

Доказательство теоремы 5. Общая схема доказательства этой теоремы аналогична схеме доказательства предыдущей.

Для всех $r \in (0, 1)$, кроме, быть может, некоторого множества $\mathfrak{B} \subset (0, 1)$ такого, что $\mathrm{mes}_1^* \mathfrak{B} < 1$, мы имеем следующее соотношение:

$$T(r, f) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f)} m(r, a) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f)} m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O\left(\ln \frac{T(r, f)}{1-r}\right). \qquad (2)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < 1 - \mathrm{mes}_1^* \mathfrak{B}$. Тогда, последовательно используя теоремы 3_{21}, N_2, 1_4 и 2_4 и другое условие доказываемой теоремы *, мы получим для величины $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ следующую оценку, справедливую при любом $\delta > 0$ вне множества относительной 1-меры $< \varepsilon$:

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) = \sum_{j=1}^{n} m_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \sum_{j=1}^{n} \left[S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f}{f'}\right) + 1\right]^{1+\delta} =$$

$$= \frac{K}{(1-r)^2} \sum_{j=1}^{n} \left[S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1)\right]^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \left\{\sum_{j=1}^{n} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + 1\right\}^{1+\delta} =$$

$$= \frac{K}{(1-r)^2} \left\{\sum_{j=1}^{n} \left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 1\right]\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \left\{\ln T(r, f) + \ln \frac{1}{1-r}\right\}^{1+\delta}.$$

для всех $r \in (0, \infty)$, исключая, возможно, множество сколь угодно малой относительной ∞-меры.

Отметим, что для справедливости второго утверждения вместо конечности порядка достаточно потребовать сходимости интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\ln^+ T(r, f)}{r^{\frac{\pi}{\gamma}+1}} dr.$$

Как известно, Р. Неванлинна высказал предположение, что для всякой мероморфной функции справедливо неравенство

$$m(r, f) \leqslant m(r, f') + o(T(r, f)).$$

Доказать или опровергнуть это предположение, насколько нам известно, пока никому не удалось. Полученные нами оценки величины $m\left(r, \frac{f}{f'}\right)$ в силу того, что

$$m(r, f) \leqslant m(r, f') + m\left(r, \frac{f}{f'}\right),$$

дают возможность установить его справедливость для всякой функции, у которой нули и полюсы «близки» к некоторой системе лучей, а характеристика растет достаточно быстро.

* $$\sum_{j=1}^{n} \left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \leqslant O\left(\ln \frac{1}{1-r}\right) \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Из этой оценки и неравенства (2) легко заключаем, что, каково бы ни было $\eta > 0$, неравенство

$$T(r, f) \leqslant \frac{K}{(1-r)^{2+\eta}}$$

выполняется для всех $r \in (0, 1)$, за исключением, быть может, множества относительной 1-меры < 1. Применяя * лемму α, приходим к выводу, что это неравенство при надлежащем увеличении постоянной K будет выполняться уже для всех $r \in (0, 1)$.

Используя доказанную таким образом конечность порядка функции $T(r, f)$, получим теперь более точную оценку роста этой функции.

Будем снова исходить из неравенства (2), учитывая, что остаточный член справа теперь есть $O\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)$.

Произведем оценку величины $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, опираясь уже не на теорему 3_{21}, а на теорему 3_{22}. Выбрав $0 < \varepsilon < 1 - \text{mes}_1^* \mathfrak{B}$, получим, что вне множества относительной 1-меры $< \varepsilon$ имеет место оценка:

$$m\left(r, \frac{f}{f'}\right) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \sum_{j=1}^{n} \left[S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{f}{f'}\right) + 1\right] =$$

$$= \frac{K}{(1-r)^2} \sum_{j=1}^{n} \left[S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{f'}{f}\right) + O(1)\right] =$$

$$= \frac{K}{(1-r)^2} \sum_{j=1}^{n} \left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{f'}{f}\right) + \right.$$

$$\left. + \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, f\right) + \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{1+r}{2}, \frac{1}{f}\right) + 1\right] \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \ln \frac{e}{1-r} \;{}^{**}.$$

Из этой оценки и неравенства (2) следует, что вне множества относительной 1-меры < 1

$$T(r, f) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \ln \frac{e}{1-r}.$$

Остается лишь, с помощью леммы α, избавиться от исключительного множества увеличением коэффициента K.

§ 3. Доказательства основных теорем

Доказательства обеих основных теорем опираются на четыре леммы, из которых три первые находятся во взаимно однозначном соответствии с тремя условиями доказываемых теорем.

ЛЕММА 1. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \Omega$ и при некотором $a \neq 0$ и некотором целом $l \geqslant 0$ справедливо неравенство $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$, то для всех $r \in (0, \Omega)$, исключая, быть может, множество относительной*

---

* К функциям $u(s) = T\left(1 - \frac{1}{s}, f\right)$ и $v(s) = Ks^{2+\eta}\left(s = \frac{1}{1-r}\right)$, не убывающим при $1 < s < \infty$.

** Для оценки величин A и B мы пользуемся теоремами 1_4 и 2_4 с учетом того, что $\ln T(r, f) = O\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)$.

Ω-меры <1, выполняется неравенство

$$T(r, f) \leqslant K \sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + R(r, f),$$

где

$$R(r, f) = \begin{cases} O(\ln [rT(r, f)]) & (\Omega = \infty), \\ O\left(\ln \dfrac{T(r, f)}{1-r}\right) & (\Omega = 1). \end{cases} \qquad \text{(Q)}$$

ЛЕММА 2. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \Omega$ и $\Delta^*(0, f) > 0$, то, каковы бы ни были $a \neq 0, \infty$ и целое число $l \geqslant 0$, для всех $r \in (0, \Omega)$, исключая, быть может, множество относительной Ω-меры <1, выполняется неравенство*

$$T(r, f) \leqslant Km\left(r \frac{f^{(l)} - a}{(f^{(l)} - a)'}\right) + R(r, f),$$

где $R(r, f)$ определяется соотношением (Q).

ЛЕММА 3. *Если функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \Omega$ и $\Delta^*(\infty, f) > 0$, то, каковы бы ни были $a \neq 0, \infty$ и целое число $l \geqslant 0$, для всех $r \in (0, \Omega)$, исключая, быть может, множество относительной Ω-меры <1, выполняется неравенство*

$$T(r, f) \leqslant K\left\{\sum_{k=0}^{l-1} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{\frac{1}{f^{(l)}} - \frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{f^{(l)}} - \frac{1}{a}\right)'}\right)\right\} + R(r, f),$$

где $R(r, f)$ определяется соотношением (Q).

Доказательство леммы 1. Условие $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$ и неравенство (Б) дают возможность утверждать, что для всех $r \in (0, \Omega)$, кроме, быть может, множества относительной Ω-меры <1, справедливо соотношение

$$T(r, f^{(l)}) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f^{(l)})} m(r, a, f^{(l)}) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(a, f^{(l)})} m\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + R(r, f),$$

где $R(r, f)$ определяется соотношением (Q). Чтобы доказать лемму, остается лишь учесть неравенство

$$T(r, f) \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + T(r, f^{(l)}),$$

которое вытекает из двух очевидных соотношений:

1) $N(r, f) \leqslant N(r, f^{(l)})$,

2) $m(r, f) = m\left(r, \dfrac{ff'f'' \ldots f^{(l-1)}}{f'f''f''' \ldots f^{(l)}} f^{(l)}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} m\left(r, \dfrac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + m(r, f^{(l)})$.

Доказательство леммы 2. Из условия $\Delta^*(0, f) > 0$ следует, что для всех $r \in (0, \Omega)$, кроме, быть может, множества относительной Ω-меры <1, имеет место неравенство

$$T(r, f) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(0, f)} m\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Для получения доказываемого утверждения достаточно воспользоваться следующими тремя соотношениями, первые два из которых очевидны, а третье является следствием неравенства (Б):

$$1)\ m\left(r,\ \frac{1}{f}\right) = m\left(r,\ \frac{f'f''\dots f^{(l)}}{ff'\dots f^{(l-1)}}\,\frac{1}{f^{(l)}}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + m\left(r,\ \frac{1}{f^{(l)}}\right).$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{l-1} m\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) \leqslant R(r, f),$$

$$3)\ m\left(r,\ \frac{1}{f^{(l)}}\right) = m\left(r,\ \frac{1}{(f^{(l)}-a)+a}\right) \leqslant m\left(r\,\frac{f^{(l)}-a}{(f^{(l)}-a)'}\right) + R(r, f).$$

Неравенства 2) и 3) справедливы, вообще говоря, вне множества конечной логарифмической длины; входящая в эти неравенства величина $R(r, f)$ определяется соотношением (Q).

Доказательство леммы 3. Для получения доказываемого соотношения достаточно воспользоваться тремя нижеследующими неравенствами:

$$1)\ T(r, f) \leqslant \frac{2}{\Delta^*(\infty, f)}\, m(r, f),$$

$$2)\ m(r, f) = m\left(r,\ \frac{ff'f''\dots f^{(l-1)}}{f'f''f'''\dots f^{(l)}}\, f^{(l)}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} m\left(r,\ \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + m(r, f^{(l)}),$$

$$3)\ m(r, f^{(l)}) = m\left(r,\ \frac{1}{\left(\frac{1}{f^{(l)}}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}}\right) \leqslant m\left(r\,\frac{\frac{1}{f^{(l)}}-\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{f^{(l)}}-\frac{1}{a}\right)'}\right) + R(r, f).$$

Первое из них справедливо для всех $r \in (0, \Omega)$, исключая, быть может, множество относительной Ω-меры <1; второе — для всех $r \in (0, \Omega)$; третье — для всех $r \in (0, \Omega)$, исключая, быть может, множество конечной логарифмической длины. Величина $R(r, f)$ в этом неравенстве определяется соотношением (Q).

ЛЕММА 4. *Для всех* $r \in (\omega, \Omega)$ *и любого целого* $l \geqslant 0$ *имеет место соотношение*

$$S_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) \leqslant K\left\{\sum_{k=0}^{l}\left[A_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)\right] + \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f) + \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{1}{f}\right)\right\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Применим метод полной индукции по l. Для $l = 0$ доказываемое неравенство имеет место, ибо

$$S_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f}{f'}\right) = S_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + O(1) = A_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + C_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + O(1) = A_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) + \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f) + \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{1}{f}\right) + O(1).$$

Предположим, что утверждение леммы имеет место для некоторого целого $l \geqslant 0$. Применив только что доказанное соотношение к $f^{(l+1)}(z)$, получим:

$$S_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l+2)}}\right) = A_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(l+2)}}{f^{(l+1)}}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{f^{(l+2)}}{f^{(l+2)}}\right) + \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f^{(l+1)}) + \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r,\ \frac{1}{f^{(l+1)}}\right) + O(1).$$

Очевидна справедливость следующих соотношений:

$$\overline{C}_{\alpha\beta}(r, f^{(l+1)}) = \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f),$$

$$\overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f^{(l+1)}}\right) \leqslant \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f^{(l)}}\right),$$

$$\overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) \leqslant S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + O(1),$$

$$\overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f^{(l)}}\right) \leqslant C_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) + O(1) = S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + O(1).$$

Воспользовавшись этими соотношениями, приходим к неравенству

$$S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l+2)}}\right) \leqslant A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+2)}}{f^{(l+1)}}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+2)}}{f^{(l+1)}}\right) + \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f) + 2S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + O(1).$$

В силу сделанного предположения, величину $S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right)$ в этом неравенстве можно заменить правой частью (1). Отсюда заключаем, что

$$S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l+2)}}\right) \leqslant K\left\{\sum_{k=0}^{l+1}\left[A_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + B_{\alpha\beta}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)\right] + \overline{C}_{\alpha\beta}(r, f) + \overline{C}_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 1\right\}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. 1°. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию 1 нашей теоремы. Тогда, по лемме 1, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, некоторого множества $\mathfrak{B} \subset (0, \infty)$ такого, что $\operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B} < 1$, имеет место неравенство

$$T(r, f) \leqslant K \sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + O(\ln[rT(r, f)]). \tag{2}$$

Выберем положительное число $\varepsilon < 1 - \operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. Каково бы ни было $\delta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $< \varepsilon$, имеет место следующая цепь соотношений (мы последовательно используем теорему 3_{11}, лемму 4, теоремы 1_1 и 2_1 и пункт а условия 1 доказываемой теоремы):

$$\sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) \leqslant K\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} \sum_{k=0}^{l} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \sum_{k=0}^{l}\left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)\right] + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\left\{O(\ln^+ T(r, f)) + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f)+\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right]\Bigg\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\{O(\ln^+ T(r, f))+K_1(r)K_2(T(r, f))\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\{O(\ln^+ T(r, f))+r^{k_1+\delta}T^{k_2+\delta}(r, f)\}^{1+\delta}.$$

Таким образом, каково бы ни было $\eta>0$, вне некоторого множества относительной ∞-меры <1

$$T(r, f)\leqslant Kr^{\frac{1}{1-k_2}\left(\frac{\pi}{\gamma}+k_1\right)+\eta}.$$

Как нам уже известно, увеличением постоянной K можно устранить исключительное множество. Тем самым показано, что порядок функции действительно не превосходит величины

$$\chi(\gamma, k_1, k_2)=\frac{\pi+\gamma k_1}{\gamma\cdot(1-k_2)}.$$

Пусть теперь дополнительно известно, что $\sigma_1<\infty$ и $\sigma_2<\infty$. Покажем, что оценку роста $T(r, f)$ можно в этом случае уточнить.

Вновь будем опираться на неравенство (2), учитывая, что остаточный член теперь есть $O(\ln r)$. Выберем положительное число $\varepsilon<1-\mathrm{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. Используя последовательно теорему 3_{11}, лемму 4, теоремы 1_3 и 2_3 и п. а) условия 1 доказываемой теоремы, получим, что вне множества относительной ∞-меры $<\varepsilon$ имеет место следующая цепь соотношений:

$$\sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right)\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\sum_{k=0}^{l} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right)+1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\sum_{k=0}^{l}\left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)\right]+\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}-\frac{\pi}{\gamma}}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(2r, f)+\right.$$

$$\left.\left.+\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(2r, \frac{1}{f}\right)\right]+1\right\}\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}\{O(1)+K_1(2r)K_2(T(2r, f))\}.$$

Таким образом, для всех $r\in(0, \infty)$, исключая, быть может, множество относительной ∞-меры <1, имеет место неравенство

$$T(r, f)\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}K_1(2r)K_2(T(2r, f)).$$

С помощью леммы α отсюда заключаем, что константы K и m можно выбрать столь большими, что для всех $r>1$ будет справедливо неравенство

$$T(r, f)\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}K_1(mr)K_2(T(mr, f)), \tag{3}$$

и, следовательно,

$$T(r, f)\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}+k_1}T^{k_2}(mr, f).$$

Выведем отсюда, что

$$T(r, f) \leqslant K r^{\frac{1}{1-k_2}\left(\frac{\pi}{\gamma}+k_1\right)} \quad (r \geqslant 1).$$

Для этого положим

$$u(r) = T(r, f)\, r^{-\frac{\pi+\gamma k_1}{\gamma(1-k_2)}}$$

и покажем, что предположение о неограниченности $u(r)$ приводит к противоречию с соотношением

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln u(r)}{\ln r} \leqslant 0,$$

выражающим уже установленный нами факт, что порядок $T(r, f)$ не превосходит $\frac{\pi+\gamma k_1}{\gamma(1-k_2)}$.

Действительно, $u(r)$ удовлетворяет соотношению

$$u(mr) > [\sigma u(r)]^{\frac{1}{k_2}} \quad (m > 1, \quad 0 < \sigma < 1).$$

Если функция $u(r)$ не ограничена сверху, то найдется точка r_0 такая, что

$$u(r_0)\, \sigma^{\frac{1}{1-k_2}} > 1.$$

Но тогда при $p = 1, 2, \ldots$

$$u(m^p r_0) > [u(r_0)]^{\left(\frac{1}{k_2}\right)^p} \sigma^{\left(\frac{1}{k_2}\right)^p \frac{1-k_2^p}{1-k_2}} > \left[u(r_0)\, \sigma^{\frac{1}{1-k_2}}\right]^{\left(\frac{1}{k_2}\right)^p}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln u(r)}{\ln r} \geqslant \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\ln u(m^p r_0)}{\ln (m^p r_0)} \geqslant \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\left(\frac{1}{k_2}\right)^p \ln\left[u(r_0)\, \sigma^{\frac{1}{1-k_2}}\right]}{p \ln m + \ln r_0} = \infty.$$

Мы получили противоречие.

Итак, мы показали, что рост $T(r, f)$ не выше нормального типа порядка $\chi(\gamma, k_1, k_2)$.

Предположим, наконец, что кроме условий $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ выполняется еще условие $\sigma_1\sigma_2 = 0$; тогда рост $T(r, f)$ будет не выше минимального типа порядка χ. Это тривиально следует из соотношения (3), если учесть, что, в силу того, что рост $T(r, f)$ (как было уже доказано) не выше нормального типа порядка

$$\frac{\pi+\gamma k_1}{\gamma(1-k_2)},$$

имеет место соотношение

$$K_1(mr)\, K_2(T(mr, f)) = o\left(r^{k_1+k_2\frac{\pi+\gamma k_1}{\gamma(1-k_2)}}\right).$$

Таким образом, в том случае, когда выполняется условие 1, утверждение теоремы А доказано *.

---

* С помощью нашего метода не представляет труда несколько усилить полученный результат.

Положим

$$\Delta^*(a_1, a_2, \ldots, a_n, f) = \sup_{\mathfrak{B}} \underline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\in C\mathfrak{B}}}} \frac{\sum_{k=1}^{n} m(r, a_k, f)}{T(r, f)},$$

2°. Пусть теперь функция $f(z)$ удовлетворяет условию 2 доказываемой теоремы. Тогда, в силу леммы 2, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, некоторого множества $\mathfrak{B} \subset (0, \infty)$ такого, что $\text{mes}^*_\infty \mathfrak{B} < 1$, имеет место соотношение

$$T(r, f) \leqslant Km\left(r, \frac{f^{(l)} - a}{(f^{(l)} - a)'}\right) + O(\ln [rT(r, f)]). \tag{4}$$

Выберем положительное число $\varepsilon < 1 - \text{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. Каково бы ни было число $\delta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $< \varepsilon$, справедлива следующая цепь неравенств:

$$m\left(r, \frac{f^{(l)} - a}{(f^{(l)} - a)'}\right) \leqslant K\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} S_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(l)} - a}{(f^{(l)} - a)'}\right) + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \left[A_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{(f^{(l)} - a)'}{f^{(l)} - a}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + B_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{(f^{(l)} - a)'}{f^{(l)} - a}\right)\right] + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \left[\overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, f^{(l)} - a) + \right.$$

$$\left.\left. + \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)} - a}\right)\right]\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \left\{O(\ln T(r, f)) + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, f) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)} - a}\right)\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \{O(\ln T(r, f)) + K_1(r) K_2(T(r, f)) + K_1(r) K_2(T(r, f^{(l)}))\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \{O(\ln T(r, f)) + K_1(r) K_2(3^l T(r, f))\}^{1+\delta} *. \tag{5}$$

где supremum берется по всем множествам $\mathfrak{B} \subset (0, \infty)$, для которых $\text{mes}^*_\infty \mathfrak{B} < 1$. (Очевидно, $\Delta^*(a_1, a_2, \ldots, a_n, f) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta^*(a_k, f)$.) Условие 1 теоремы А можно заменить следующим, более слабым условием:

1′. а) Нули и полюсы $f(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к системе лучей (R);

б) $\Delta^*(a_1, a_2, \ldots, a_n, f^{(l)}) > 0$ по крайней мере для одного набора чисел a_1, $a_2, \ldots, a_n \neq 0, \infty$.

Для доказательства достаточно заметить, что утверждение леммы 1 остается справедливым, если вместо $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$ выполняется условие

$$\Delta^*(a_1, a_2, \ldots, a_n, f^{(l)}) > 0 \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0, \infty).$$

Это следует из того, что имеет место неравенство, более сильное, чем (Б), а именно:

$$\sum_{k=1}^{n} m(r, a_k, f) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln [rT(r, f)]).$$

Можно определить Δ^* и для счетной последовательности точек a_k. При некоторых предположениях относительно последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($a_k \neq 0, \infty$; $k = 1, 2, \ldots$) можно вставить это Δ^* в пункт б) условия 1 теоремы А, не нарушив справедливости ее утверждения.

* Для получения последнего неравенства мы использовали соотношение $T(r, f^{(l)}) \leqslant 3^l T(r, f)$, справедливое для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества конечной логарифмической длины.

Из соотношений (4) и (5), так же как и в 1°, мы получаем, что порядок $T(r, f)$ не превосходит величины $\chi(\gamma, k_1, k_2)$.

Доказательство того утверждения, что при выполнении условия $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, $\sigma_1\sigma_2 = 0$) рост $T(r, f)$ не выше нормального (минимального) типа порядка $\chi(\gamma, k_1, k_2)$, мы опускаем, ввиду того, что оно аналогично проведенному в п. 1°.

3°. Пусть, наконец, функция $f(z)$ удовлетворяет условию 3 нашей теоремы. В силу леммы 3, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, некоторого множества $\mathfrak{B}$ такого, что $\operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B} < 1$, имеет место соотношение

$$T(r, f) \leqslant K\left\{\sum_{k=0}^{l-1} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + m\left(r, \frac{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}\right)\right\} + O(\ln[rT(r, f)]).$$

Выберем положительное число $\varepsilon < 1 - \operatorname{mes}^*_\infty \mathfrak{B}$. Как уже было показано в 1°, можно утверждать, что, каково бы ни было $\delta > 0$, вне множества относительной ∞-меры $< \frac{\varepsilon}{2}$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{l-1} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\{O(\ln^+ T(r, f)) + K_1(r) K_2(T(r, f))\}^{1+\delta}.$$

Что касается величины

$$m\left(r, \frac{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}\right),$$

то для ее оценки получается следующая цепь неравенств (имеющих место, каково бы ни было $\delta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры $< \frac{\varepsilon}{2}$):

$$m\left(r, \frac{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}\right) \leqslant K\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j}} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}\right) + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\left\{\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}}\left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{\left(\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}\right)'}{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}\right)\right] + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)}} - \frac{1}{a}\right) +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{\dfrac{1}{f^{(l)}} - \dfrac{1}{a}}\right) + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)}\left\{O(\ln T(r, f)) + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \bar{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)} - a}\right)\right\}^{1+\delta}$$

Из леммы 4 и теорем 1_1 и 2_1 следует, что вне множества конечной логарифмической длины

$$\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)}}\right) \leqslant C_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) \leqslant S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(l+1)}}{f^{(l)}}\right) + O(1) =$$

$$= S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(l)}}{f^{(l+1)}}\right) + O(1) \leqslant K\left\{\sum_{k=0}^{l}\left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)\right] + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 1\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K\left\{O(\ln^+ T(r, f)) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right\}.$$

В силу пункта а) условия 3 доказываемой теоремы, вне множества относительной ∞-меры нуль

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f) + \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \leqslant 2K_1(r) K_2(T(r, f)),$$

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j-1}}\left(r, \frac{1}{f^{(l)} - a}\right) \leqslant K_1(r) K_2(T(r, f^{(l)})) \leqslant K_1(r) K_2(3^l T(r, f))$$

Из приведенных оценок следует, что, каково бы ни было $\delta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры < 1, справедливо неравенство

$$T(r, f) \leqslant K r^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \{O(\ln^+ T(r, f)) + K_1(r) K_2(3^l T(r, f))\}^{1+\delta}.$$

Отсюда, как мы уже знаем, следует, что порядок $T(r, f)$ не превосходи величины $\chi(\gamma, k_1, k_2)$.

Доказательство того, что при выполнении условия $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, $\sigma_1\sigma_2 = 0$) рост $T(r, f)$ не выше нормального (минимального) типа порядка $\chi(\gamma, k_1, k_2)$, мы опускаем.

Доказательство теоремы Б. Так как рассуждения, с помощью которых доказывается эта теорема, построены по тому же образцу, что и рассуждения, с помощью которых только что была доказана теорема А, мы позволим себе ограничиться установлением справедливости теоремы Б лишь в том случае, когда удовлетворяется условие 1.

В силу леммы 1, для всех $r \in (0, 1)$, исключая, быть может, некоторое множество $\mathfrak{B} \subset (0, 1)$ ($\text{mes}_1^* \mathfrak{B} < 1$), имеет место соотношение

$$T(r, f) \leqslant K \sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + O\left(\ln \frac{T(r, f)}{1 - r}\right).$$

Выберем положительное число $\varepsilon < 1 - \text{mes}_1^* \mathfrak{B}$. Каково бы ни было $\delta > 0$, для всех $r \in (0,1)$, исключая, возможно, множество относительной 1-меры $< \varepsilon$, справедлива следующая цепь неравенств (мы последовательно используем теорему 3_{21}, лемму 4, теорему 1_4 и 2_4 и пункт а) условия 1 нашей теоремы):

$$\sum_{k=0}^{l} m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{k+1}}\right) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{l} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k)}}{f^{(k+1)}}\right) + 1\right\}^{1+\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{l}\left[A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f)+\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right]+1\right\}^{1+\delta}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\left\{O\left(\ln\frac{T(r, f)}{1-r}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left[\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, f)+\overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right]\right\}^{1+\delta}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\left\{O\left(\ln\frac{T(r, f)}{1-r}\right)+K_1(r)K_2(T(r, f))\right\}^{1+\delta}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(1-r)^2}\left\{O\left(\ln\frac{T(r, f)}{1-r}\right)+\frac{1}{(1-r)^{k_1+\delta}}T^{k_2+\delta}(r, f)\right\}^{1+\delta}.$$

Таким образом, получается, что, каково бы ни было $\eta > 0$, для всех $r \in (0, 1)$, кроме, быть может, множества относительной 1-меры < 1, выполняется соотношение

$$T(r, f) \leqslant K\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{2+k_1}{1-k_2}+\eta}.$$

Из леммы α легко следует, что увеличением константы K можно добиться того, что это соотношение будет выполняться для всех $r \in (0, 1)$. В силу произвольной малости числа $\eta > 0$, мы заключаем, что порядок $T(r, f)$ не может превосходить величины

$$\lambda(k_1, k_2) = \frac{2+k_1}{1-k_2}.$$

ГЛАВА III

§ 1. Теоремы о целых и мероморфных функциях, принимающих некоторые значения вблизи конечной системы лучей

Этот параграф посвящен краткому обзору следствий основной теоремы А.

Следующая теорема является частным случаем теоремы А.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $|z| < \infty$, и пусть при некотором $a \neq 0, \infty$ и некотором целом $l \geqslant 0$ выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий:*

1. а) *Нули и полюсы $f(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки к системе лучей* (R);
   б) $\Delta^*(a, f^{(l)}) > 0$.
2. а) *Полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки к системе лучей* (R);
   б) $\Delta^*(0, f) > 0$.
3. а) *Нули и полюсы $f(z)$ и a-точки $f^{(l)}(z)$ $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки к системе лучей* (R);
   б) $\Delta^*(\infty, f) > 0$.

Тогда порядок $f(z)$ не превосходит $\pi\gamma^{-1}$.

Если дополнительно известно, что $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, то при порядке $\pi\gamma^{-1}$ тип функции не может быть максимальным.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться таким определением: a-точки мероморфной при $|z| < \infty$ функции называются «близкими» к системе

лучей (R), если они $\{0, \sigma_1, 0, \sigma_2\}$-близки $(\sigma_1 < \infty,\ \sigma_2 < \infty)$ к ней в смысле определения 1 (стр. 300).

ТЕОРЕМА 7. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна при* $|z| < \infty$ *и для нее найдутся три различных числа* a, b *и* c *(одно из них может быть равно* ∞*) таких, что:*

а) *a-точки и b-точки «близки» к системе лучей* (R),

б) $\Delta^*(c, f) > 0$,

то рост функции $f(z)$ *не более, чем нормального типа порядка* $\pi\gamma^{-1}$.

Доказательство. Если, например, a и $b \neq \infty$, то, взяв функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{f(z) - b},$$

легко убеждаемся в том, что она удовлетворяет условию 1 теоремы 6. Остается лишь отметить, что в силу хорошо известной теоремы * имеет место соотношение

$$T(r, \varphi) = T(r, f) + O(1).$$

Если $a = \infty$ $(b = \infty)$, то следует положить $\varphi(z) = f(z) - b$ $(\varphi(z) = f(z) - a)$.

Отметим, что теорема 7 является более общей, чем теоремы Бибербаха и Неванлинна для целых функций, сформулированные нами во введении. Однако мы не в состоянии прямо вывести из нее результат Неванлинна для мероморфных функций, приведенный на стр. 279. Между тем наш метод легко дает возможность установить справедливость более сильного результата:

ТЕОРЕМА 7′. *Если функция* $f(z)$ *мероморфна при* $|z| < \infty$, *и если для нее найдутся три различных числа* a, b *и* c *(одно из которых может быть равно* ∞*) таких, что:*

а) *a-точки и b-точки «близки» к системе лучей* (R),

б) *величина* $N(r, c)$ *имеет, по сравнению с* $T(r, f)$, *более низкие порядок, тип или класс,*

то рост $T(r, f)$ *не выше нормального типа порядка* $\pi\gamma^{-1}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать $a = 0$, $b = \infty$. При доказательстве теоремы 4 нами было установлено, что из условия а) вытекает такое утверждение: каково бы ни было $\delta > 0$, для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры < 1, справедливо соотношение

$$m(r, c) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln[rT(r, f)]) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \ln^2[rT(r, f)]. \quad (1)$$

Так как, в силу условия б), порядок $N(r, c)$ конечен, то для всех $r \in (0, \infty)$, кроме, быть может, множества относительной ∞-меры < 1,

$$T(r, f) = N(r, c) + m(r, c) + O(1) \leqslant Kr^{\rho+1} + Kr^{\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)} \ln^2[rT(r, f)]$$

(ρ — порядок $N(r, c)$). Отсюда с помощью леммы α заключаем, что

* Эта теорема [см. (10), стр. 173] состоит в том, что

$$T(r, f) = T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) + O(1) \quad (\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0).$$

порядок $T(r, f)$ конечен. Используя это обстоятельство, уточняем оценку (1):

$$m(r, c) \leqslant m\left(r, \frac{f}{f'}\right) + O(\ln r) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad (r \bar{\in} \mathfrak{B}, \ \mathrm{mes}^{*}_{\infty} \mathfrak{B} < 1).$$

Следовательно, для всех $r \in (0, \infty)$, исключая, быть может, множество относительной ∞-меры < 1,

$$T(r, f) \leqslant N(r, c) + Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Применяя лемму α, выводим отсюда, что при K и m достаточно больших

$$T(r, f) \leqslant N(mr, c) + Kr^{\frac{\pi}{\gamma}} \quad (1 \leqslant r < \infty). \tag{2}$$

Из этого соотношения легко следует доказываемое утверждение. Действительно, если порядок (тип) $N(r, c)$ меньше, чем порядок (тип) $T(r, f)$, то при некотором $\rho > 0$ можно найти последовательность $r_k \to \infty$ такую, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \frac{T(r_k, f)}{r_k^{\rho}} \geqslant c > 0,$$

в то время как

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r, c)}{r^{\rho}} = 0.$$

Деля обе части (2) на r^{ρ} и устремляя $r \to \infty$ по последовательности r_k, приходим к заключению, что $\rho \leqslant \pi\gamma^{-1}$. Заменяя после этого в правой части (2) $N(mr, c)$ бо́льшим количеством $Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}$, получаем, что

$$T(r, f) \leqslant Kr^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Если же класс $N(r, c)$ меньше класса $T(r, f)$, то можно найти $\rho > 0$ так, чтобы

$$\int^{\infty} \frac{T(r, f)}{r^{\rho+1}}\, dr = \infty \quad \text{и} \quad \int^{\infty} \frac{N(r, c)}{r^{\rho+1}} < \infty.$$

Заметив это, разделим обе части (2) на $r^{\rho+1}$ и проинтегрируем по r до ∞. Без труда усматриваем, что интеграл $\int^{\infty} r^{\frac{\pi}{\gamma}-\rho-1}\, dr$ расходится, а это и означает, что $\rho \leqslant \pi\gamma^{-1}$.

Тем самым теорема 7′ доказана полностью.

Покажем, что оценка роста, даваемая в теореме 7, является в известной мере точной. Именно, имеет место такое утверждение:

Какова бы ни была система (R), *существует целая функция в точности порядка* $\pi\gamma^{-1}$ *и нормального типа, у которой а-точки* (*а — любое комплексное число*) *«близки» к этой системе лучей.*

Доказательство. Пусть $\alpha_{j_0} \leqslant \arg z \leqslant \alpha_{j_0+1}$ — минимальный угол системы (R) (один из минимальных углов, если их несколько). Искомой функцией является

$$\Phi(z) = E_{\frac{\gamma}{\pi}}\left(ze^{-i\frac{\alpha_{j_0}+\alpha_{j_0+1}}{2}}\right),$$

где $E_\alpha(z)$ — функция Миттаг-Леффлера:

$$E_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}.$$

Чтобы доказать это, воспользуемся * тем, что при значениях параметра $\alpha \in (0,2]$

1) $E_\alpha(z)$ есть функция порядка α^{-1} и нормального типа,

2) модуль $E_\alpha(z)$ ограничен при $\frac{\alpha\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi - \frac{\alpha\pi}{2}$.

В силу свойства 1), функция $\Phi(z)$ в точности порядка $\pi\gamma^{-1}$ и нормального типа. Покажем, что ее a-точки при любом a «близки» к системе лучей (R).

В силу свойства 2), имеют место соотношения:

$$A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, \Phi) = O(1) \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, \Phi) = O(1) \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \ j \neq j_0);$$

кроме того, в силу свойства 1),

$$B_{\alpha_{j_0}\alpha_{j_0+1}}(r, \Phi) = O(1).$$

Но тогда при любом a

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \overline{C}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{\Phi - a}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} C_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{\Phi - a}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{\Phi - a}\right) + O(1) = \sum_{j=1}^{n} S_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, \Phi) + O(1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} A_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, \Phi) + \sum_{j=1}^{n} B_{\alpha_j\alpha_{j+1}}(r, \Phi) + O(1) = O(1).$$

Тем самым наше утверждение доказано **.

Для дальнейшего полезно отметить, что если наша система (R) состоит всего лишь из двух лучей: $\arg z = 0$ и $\arg z = \pi$, то a-точки функции $f(z)$ будут «близки» к ней тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k(a)} \right|,$$

где $z_k(a)$ — a-точки функции $f(z)$, рассматриваемые без учета кратности.

Из теоремы 7 легко выводятся следующие теоремы о целых функциях.

ТЕОРЕМА 8. *Если целая функция $f(z)$, нули которой удовлетворяют условию*

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right| < \infty$$

---

* См. (7). Отметим, что в этой работе получены значительно более тонкие оценки роста функции $E_\alpha(z)$ по различным направлениям, чем те, которые мы приводим.

** Из предыдущей выкладки, очевидно, следует, что a-точки $\Phi(z)$ не только «близки» к системе лучей (R), но и «очень близки» к ней в смысле определения, приведенного в подстрочном примечании на стр. 277.

(a_k — нули $f(z)$, рассматриваемые без учета кратности), обладает по крайней мере одним ненулевым слабо дефектным значением, то ее рост не более, чем первого порядка и нормального типа. Оценку роста улучшить нельзя.

Второе утверждение теоремы доказывает пример функции $e^{iz}-1$, для которой -1 является пикаровским исключительным значением.

ТЕОРЕМА 9. *Рост целой функции класса А*, обладающей по крайней мере одним ненулевым слабо дефектным значением, не более, чем первого порядка и нормального типа. Оценку роста улучшить нельзя.*

Эта теорема является тривиальным следствием предыдущей и того обстоятельства, что нули функции $e^{iz}-1$ чисто вещественны.

ТЕОРЕМА 10. *Если целая функция с чисто вещественными нулями обладает по крайней мере одним ненулевым слабо дефектным значением, то она невещественна** и ее рост точно первого порядка и нормального типа.*

Доказательство. То обстоятельство, что рост функции не более, чем первого порядка и нормального типа, следует из предыдущей теоремы.

Так как целая функция с вещественными нулями, растущая не быстрее первого порядка минимального типа, обязательно вещественна, то нам достаточно доказать лишь невещественность функции, удовлетворяющей условиям теоремы. Последнее же вытекает из того факта, что вещественная целая функция рода 1 с вещественными нулями не может иметь ненулевых слабо дефектных значений, ибо при любом $a \neq 0, \infty$

$$m(r,\ a) \leqslant m\left(r,\ \frac{1}{f'}\right) - m\left(r,\ \frac{1}{f}\right) + O(\ln r)^{***} =$$
$$= m(r,\ f') - N\left(r,\ \frac{1}{f'}\right) - m(r,\ f) + N\left(r,\ \frac{1}{f}\right) + O(\ln r) \leqslant$$
$$\leqslant m\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) - N\left(r,\ \frac{1}{f'}\right) + N\left(r,\ \frac{1}{f}\right) + O(\ln r) = O(\ln r)$$

$\Bigg($так как $m\left(r,\ \frac{f'}{f}\right) = O(\ln r)$, $N\left(r,\ \frac{1}{f}\right) - N\left(r,\ \frac{1}{f'}\right) = O(\ln r)$; последнее равенство имеет место в силу известной теоремы Лагерра$\Bigg)$.

Эдрей ([4]) доказал, что целая функция, у которой все нули и единицы, кроме, быть может, конечного числа, вещественны, имеет порядок не выше первого. Из теоремы 7 вытекает результат несколько более сильный.

---

* Напомним, что целая функция называется функцией класса А, если ее нули $\{a_k\}$, рассматриваемые с учетом кратности, удовлетворяют условию

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{a_k} \right| < \infty.$$

** Целая функция называется вещественной, если вещественны все ее коэффициенты разложения в ряд Маклорена.

*** Это неравенство следует из известного соотношения Неванлинна:

$$\sum_{k=1}^{p} m(r,\ a_k) \leqslant m\left(r,\ \frac{1}{f'}\right) + O(\ln r) \quad (a_k \neq \infty,\ p < \infty).$$

ТЕОРЕМА 11. *Целая функция, у которой нули и единицы «близки» к вещественной оси, есть функция не выше первого порядка и нормального типа.*

В частности,

Целая функция, у которой все нули и единицы вещественны, есть функция не выше первого порядка и нормального типа. Оценку роста улучшить нельзя — это доказывает пример $f(z) = \sin z$.

§ 2. Обобщение теоремы Шоттки

В этом параграфе мы выведем из теоремы 5 один результат, который можно рассматривать как некоторое обобщение классической теоремы Шоттки.

Определение. a-точки мероморфной при $|z| < 1$ функции $f(z)$ называются «близкими» к системе лучей (R), если имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r,\ \frac{1}{f-a}\right) \leqslant O\left(\ln \frac{1}{1-r}\right) \quad (\omega < r < 1).$$

ТЕОРЕМА 12 (обобщение теоремы Шоттки). *Если функция* $f(z)$ *голоморфна внутри единичного круга и ее нули и единицы «близки» к системе радиусов* (R), *то имеет место оценка*

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{K}{(1-|z|)^3} \ln \frac{e}{1-|z|} \quad (0 \leqslant |z| < 1).$$

Отметим, что здесь не играет роли ни число (лишь бы оно было конечным), ни расположение радиусов круга, «вблизи» которых функция может принимать значения 0 и 1.

Доказательство. Рассматривая функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z)},$$

без труда замечаем, что она удовлетворяет условиям теоремы 5. В силу этой теоремы,

$$T(r,\ \varphi) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \ln \frac{e}{1-r} \quad (0 \leqslant r < 1),$$

следовательно,

$$T(r,\ f) = T(r,\ \varphi) + O(1) \leqslant \frac{K}{(1-r)^2} \ln \frac{e}{1-r}.$$

Доказываемое утверждение следует теперь из того обстоятельства, что

$$\ln M(r,\ f) \leqslant \frac{4}{1-r} T\left(\frac{1+r}{2},\ f\right)^*,$$

где

$$M(r,\ f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

В настоящее время мне неизвестно, является ли оценка, даваемая теоремой 12, точкой. Однако для функций, нули и единицы которой ле-

---

* Это неравенство вытекает из хорошо известного соотношения [см. ([10])]:

$$\ln M(r, f) \leqslant \frac{r+\rho}{r-\rho} T(\rho,\ f) \quad (0 < r < \rho < 1),$$

в котором достаточно положить $\rho = \frac{1}{2}(1+r)$.

жат на системе лучей (а не только близки этим лучам) имеет место лучшая и притом точная оценка. Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 13. *Если функция $f(z)$ голоморфна при $|z|<1$ и принимает значения 0 и 1 лишь на конечной системе радиусов* (R), *то имеет место оценка*

$$\ln|f(z)|<K(1-r)^{-2} \qquad (0\leqslant r<1),$$

которую уточнить нельзя.

Справедливость последнего утверждения вытекает из рассмотрения примера

$$\Phi(z)=\exp\left(i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right).$$

Эта функция вовсе не принимает значения 0, а значение 1 принимает лишь на положительном радиусе, и для нее

$$\ln M(r,\Phi)>K(1-r)^{-2}.$$

Доказательство первого утверждения получается с помощью построений, восходящих к Сьобергу. Хотя эти построения по духу отличны от применяемых в настоящей статье, приведем здесь это доказательство.

В каждом из секторов $\{\alpha_j<\arg z<\alpha_{j+1},\ |z|<1\}$, $j=1, 2,\ldots, n$, функция $f(z)$ вовсе не обращается в 0 и 1. Поэтому при помощи классической теоремы Шоттки для нее получается оценка

$$\ln|f(re^{i\theta})|\leqslant K(1-r)^{-1}\prod_{j=1}^{n}|\theta-\alpha_j|^{-1}, \quad 0\leqslant\theta<2\pi. \tag{3}$$

Обозначим через M_r следующую область:

$$\left[\bigcup_{j=1}^{n}\left\{\left|\arg\frac{1+r}{2}-ze^{-i\alpha_j}\right|<\frac{\pi}{5}\ ,\left|\frac{1+r}{2}-ze^{-i\alpha_j}\right|<\frac{1}{2}\right\}\cup\{|z|<r\}\right]$$

и построим функцию

$$\psi(z)=\exp\left[-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1+r}{2}-ze^{-i\alpha_j}\right)^{-2}\right].$$

Из (3) получаем, что при $z\in M_r$

$$\ln|f(z)\psi(z)|<K(1-r)^{-2},$$

откуда легко следует доказываемое утверждение.

§ 3. Мероморфные функции, представимые рядами простейших дробей

В работах М. Г. Крейна ([6]) и М. В. Келдыша ([5]) был получен ряд результатов относительно распределения значений мероморфных при $|z|<\infty$ функций, представимых в виде

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-h_k}, \tag{K}$$

где ряд справа предполагается сходящимся абсолютно (последнее эквивалентно тому, что $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k h_k^{-1}|<\infty$ *).

* Мы предполагаем (не нарушая общности), что $h_k\neq 0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

В работе ([6]) рассматривается случай, когда функция (K) является обратной величиной к целой функции (т. е. не имеет нулей). Устанавливается, что если эта целая функция принадлежит классу A, то она может быть, самое большее, функцией первого порядка и нормального типа *. Основная задача этого параграфа состоит в том, чтобы, используя теорему A, получить обобщение этого результата.

ТЕОРЕМА 14. *Если функция $f(z)$, представимая в виде* (K), *удовлетворяет условиям:*

а) *полюсы $f(z)$ $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к системе лучей* (R);

б) $\Delta^*(a, f) > 0$ *при некотором*** a,

то порядок $f(z)$ конечен и не превосходит величины

$$\chi = \chi(\gamma, k_1, k_2) = \frac{\pi + \gamma k_1}{\gamma(1 - k_2)}.$$

Если дополнительно известно, что $\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$ ($\sigma_1 < \infty$, $\sigma_2 < \infty$, $\sigma_1\sigma_2 = 0$), то рост $f(z)$ не более, чем нормального (минимального) типа порядка χ.

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

ЛЕММА. *Если функция $f(z)$ представима в виде* (K), *то для любых α и β, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, и любого a справедливо неравенство*

$$C_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant C_{\alpha\beta}(r, f) + K.$$

Доказательство леммы. В силу теоремы N_2 (стр. 283), для любого a имеем:

$$C_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant S_{\alpha\beta}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + O(1) = S_{\alpha\beta}(r, f) + O(1) = \\ = A_{\alpha\beta}(r, f) + B_{\alpha\beta}(r, f) + C_{\alpha\beta}(r, f) + O(1).$$

Покажем, что

$$A_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant K,$$
$$B_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant K.$$

Второе соотношение является тривиальным следствием такого утверждения М. В. Келдыша ([5]): если функция $f(z)$ представима в виде (K), то

$$m(r, f) = O(1),$$

---

* М. Г. Крейн доказывает также, что эта целая функция удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|\varphi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

откуда следует (см. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956) большая регулярность ее роста. Эта часть результата М. Г. Крейна лежит в стороне от основного направления нашего исследования.

** Заметим, что ∞ не может быть слабо дефектным значением функции вида (K), так как для функций этого вида $m(r, f) = O(1)$ [см. ([5])].

ибо, очевидно,

$$B_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant \frac{4\pi}{\gamma r^{\frac{\pi}{\gamma}}} m(r, f).$$

Докажем первое соотношение. Пусть δ — число из интервала $(0, \frac{1}{2})$. Мы имеем:

$$A_{\alpha\beta}(r, f) = \frac{1}{\gamma}\int_{\omega}^{r} (\ln^+|f(te^{i\alpha})| + \ln^+|f(te^{i\beta})|)\left(\frac{1}{t^{\frac{\pi}{\gamma}}} - \frac{t^{\frac{\pi}{\gamma}}}{r^{\frac{2\pi}{\gamma}}}\right)\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma}\int_{\omega}^{r} \frac{\ln^+|f(te^{i\alpha})| + \ln^+|f(te^{i\beta})|}{t^{\frac{\pi}{\gamma}+1}} dt \leqslant$$

$$\leqslant (\gamma\delta)^{-1}\int_{\omega}^{r} (\ln^+|t^{-\frac{1}{\delta}} f(te^{i\alpha})|^{\delta} + \ln^+|t^{-\frac{1}{\delta}} f(te^{i\beta})|^{\delta})\, t^{-\frac{\pi}{\gamma}-1} dt + K \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma\delta}\int_{\omega}^{r} \frac{|f(te^{i\alpha})|^{\delta} + |f(te^{i\beta})|^{\delta}}{1+t^2} dt.$$

Следовательно, нам достаточно убедиться в том, что если функция $f(z)$ представима в виде (K), то сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|^{\delta}}{1+t^2} dt$$

Введем функцию

$$\tilde{f}(z) = f(z) z^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z(z-h_k)}.$$

Разлагая каждую дробь $\frac{A_k}{z(z-h_k)}$ на простейшие, получим представление

$$\tilde{f}(z) = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k/h_k}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k/h_k}{z-h_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{z-h_k} \quad (h_0 = 0).$$

Отметим, что в силу абсолютной сходимости ряда (K)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |B_k| < \infty.$$

Представим функцию $\tilde{f}(z)$ в виде суммы восьми функций:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\nu=1}^{8} i^{\nu} f_{\nu}(z),$$

где $f_{\nu}(z)$ $(\nu = 1, \ldots, 8)$ определяются следующим образом:

$$f_{\nu}(z) = \sum_{\operatorname{Im} h_k \geqslant 0} \frac{B_{k\nu}}{z-h_k} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4),$$

$$f_{\nu}(z) = \sum_{\operatorname{Im} h_k < 0} \frac{B_{k\nu}}{z-h_k} \quad (\nu = 5, 6, 7, 8),$$

$$B_{k\nu} \geqslant 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, 8;\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что

$$\operatorname{Im} f_{\nu}(z) \geqslant 0 \text{ при } \operatorname{Im} z \leqslant 0 \quad (\nu = 1, 2; 3, 4),$$
$$\operatorname{Im} f_{\nu}(z) \leqslant 0 \text{ при } \operatorname{Im} z \geqslant 0 \quad (\nu = 5, 6, 7, 8).$$

Далее, возьмем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(t)|^\eta}{1+t^2} dt \leqslant \frac{\pi}{\cos \frac{\pi\eta}{2}} |G(i)|^\eta, \quad 0<\eta<1,$$

которое принадлежит В. И. Смирнову [см. ([14]), стр. 93] и в котором $G(z)$ — произвольная функция, голоморфная в верхней полуплоскости и имеющая в ней мнимую часть постоянного знака. Применяя это неравенство к нашим функциям $f_\nu(z)$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widetilde{f}(t)|^{2\delta}}{1+t^2} dt \leqslant \sum_{\nu=1}^{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\nu(t)|^{2\delta}}{1+t^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\cos \pi\delta} \left(\sum_{\nu=1}^{4} |f_\nu(-i)|^{2\delta} + \sum_{\nu=5}^{8} |f_\nu(i)|^{2\delta} \right) \leqslant \frac{4\pi}{\cos \pi\delta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |B_k| \right)^{2\delta} < \infty.$$

Наконец, с помощью неравенства Буняковского, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|^{\delta}}{1+t^2} dt \leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^{2\delta}}{1+t^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widetilde{f}(t)|^{2\delta}}{1+t^2} dt \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Тем самым обоснована оценка

$$A_{\alpha\beta}(r, f) \leqslant K.$$

Лемма доказана.

Справедливость теоремы 14 теперь устанавливается довольно просто. Действительно, в силу леммы, для любого a имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} \overline{C}_{\alpha_j \alpha_{j+1}}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} r^{\frac{\pi}{\gamma_j} - \frac{\pi}{\gamma}} C_{\alpha_j \alpha_{j+1}}(r, f) + O(1).$$

Поэтому из условия а) нашей теоремы следует, что a-точки функции (где a — любое комплексное число) $\{k_1, \sigma_1, k_2, \sigma_2\}$-близки к системе лучей (R). Это обстоятельство и условие б) теоремы показывают, что рассматриваемая функция $f(z)$ удовлетворяет условию 1 теоремы А. Применение последней и дает доказываемое утверждение.

Укажем некоторые следствия теоремы 14.

ТЕОРЕМА 15. *Если полюсы функции $f(z)$, представимой в виде* (K), *«близки» к системе лучей* (R) *и для некоторого a $\Delta^*(a, f)>0$, то рост $f(z)$ может быть, самое большее, порядка $\pi\gamma^{-1}$ и нормального типа.*

Эта теорема есть частный случай теоремы 14 при $k_1=k_2=0$, $\sigma_1<\infty$, $\sigma_2<\infty$.

Теорема 15 имеет связь со следующим результатом М. В. Келдыша ([5]): Функция вида (K) не может иметь ненулевых дефектных значений. Если дополнительно известно, что $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \neq 0$, то и нуль не является дефектным значением.

Наша теорема показывает, что условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \neq 0$$

не являются необходимыми для полного отсутствия дефектов, так как, независимо от выполнения этих условий, функция вида (K), у которой полюсы «близки» к системе лучей (R) и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-\frac{\pi}{\gamma}} T(r, f) = \infty,$$

не может иметь ни одного даже слабо дефектного значения.

Из теоремы 15 при $\gamma = \pi$ получается результат, установленный нами ранее в несколько менее общем виде в работе ([11]):

ТЕОРЕМА 16. *Если полюсы функции $f(z)$, представимой в виде* (K), *удовлетворяют условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{h_k} \right| < \infty$$

и для некоторого a $\Delta^*(a, f) > 0$, то рост $f(z)$ может быть, самое большее, первого порядка и нормального типа.

Частным случаем теоремы 16 является результат М. Г. Крейна ([6]):

Если целая функция $\varphi(z)$ класса A такова, что $\varphi^{-1}(z)$ представляется в виде (K), то рост $\varphi(z)$ не более, чем первого порядка и нормального типа *.

Оценка роста в теореме М. Г. Крейна точная, так как функция первого порядка и нормального типа $\varphi(z) = (z^2-1)\sin z$ удовлетворяет ее условиям. Можно показать, что оценка роста в теореме 15 также является точной.

Поступило
14. X. 1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Bieberbach L., Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung, Math. Zeitschr., 3 (1919), 175—190.

2 Blumenthal O., Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini, Paris, Gauthier-Villars, 1910.

3 Valiron G., Sur la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, Acta math., 47 (1926), 117—142.

4 Edrei A., Meromorphic functions with three radially distributed values, Trans. Am. Math. Soc., 78, №2 (1955), 276—293.

---

* Чтобы полностью покрыть результат М. Г. Крейна (см. первое подстрочное примечание на стр. 324), нужно еще показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |\varphi(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty. \qquad (*)$$

Последнее можно доказать так. Мы имеем:

$$A_{0\pi}(r, \varphi) \leqslant S_{0\pi}(r, \varphi) + O(1) = S_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + O(1) =$$
$$= A_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + B_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + C_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right) + O(1).$$

Ограниченность $C_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right)$ следует из того, что $\varphi(z) \in A$, ограниченность $A_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right)$ и $B_{0\pi}\left(r, \frac{1}{\varphi}\right)$ была нами установлена при доказательстве леммы на стр. 324. Остается лишь заметить, что ограниченность $A_{0\pi}(r, \varphi)$ эквивалентна выполнению условия (*).

[5] Келдыш М. В., О рядах по рациональным дробям, Доклады Ак. наук СССР, 94, № 3 (1954), 377—380.
[6] Крейн М. Г., К теории целых функций экспоненциального типа, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 11 (1947), 309—326.
[7] Mittag-Leffler G., Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Acta math., 29 (1905), 101—181.
[8] Nevanlinna R., Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einem Winkelraum, Acta Soc. Sci. Fenn., 50, № 12 (1925), 1—45.
[9] Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1929.
[10] Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.
[11] Островский И. В., Обобщение теоремы М. Г. Крейна, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 742—745.
[12] Островский И. В., О мероморфных функциях, принимающих некоторые значения в точках, лежащих вблизи конечной системы лучей, Доклады Ак. наук СССР, 120, № 5 (1958), 970—972.
[13] Dufresnoy J., Sur les fonctions méromorphes dans une angle, C. r. Acad. Sci., 208 (1939), 718—720.
[14] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 329—346

С. П. ДЕМУШКИН

ГРУППА МАКСИМАЛЬНОГО p-РАСШИРЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

В работе определяется группа максимального p-расширения локального поля, содержащего корень степени p из единицы, а также делается попытка классификации топологических p-групп с единственным соотношением.

Введение

Пусть Ω — расширение конечной степени n поля рациональных p-адических чисел, K — объединение всех нормальных конечных p-расширений поля Ω. Нас будет интересовать группа $\mathfrak{G}$ поля K над Ω.

В работе И. Р. Шафаревича (1) было показано, что в случае, когда Ω не содержит корня степени p из единицы, группа $\mathfrak{G}$ есть свободная топологическая p-группа с $n+1$ образующей.

Случай, когда корень степени q из единицы $\zeta_q \in \Omega$ $(q = p^m,\ m \geqslant 1)$ рассматривался А. И. Скопиным (2), (3), Д. К. Фаддеевым (3) и японским математиком Iukiyosi Kawada (4).

А. И. Скопин в работе (2) определил группу $\mathfrak{G}$ по модулю m-го члена p-центрального ряда для $\mathfrak{G}$.

Iukiyosi Kawada показал, что группа $\mathfrak{G}$ в случае $\zeta_p \in \Omega$ хотя и несвободна, но имеет единственное определяющее соотношение.

Д. К. Фаддеев и А. И. Скопин (3) дали более простое доказательство единственности соотношения.

В настоящей работе группа $\mathfrak{G}$ определяется в случае, когда $\zeta_q \in \Omega$ и $p \neq 2$, а также делается попытка классификации топологических p-групп при $p \neq 2$. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Группа максимального p-расширения локального поля, содержащего корень степени $q = p^m\,(m \geqslant 1)$ из единицы, при $p \neq 2$ изоморфна топологической p-группе с $\nu = n + 2$ образующими $\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu$, на которые наложено единственное соотношение*

$$\sigma_2^q\,[\sigma_1, \sigma_2]\,[\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1. \tag{1}$$

Следствие. *Подгруппа $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ конечного индекса* $(\mathfrak{G} : \mathfrak{G}')$ *изоморфна группе с $\nu' = n \cdot (\mathfrak{G} : \mathfrak{G}') + 2$ образующими, на которые наложено единственное соотношение вида* (1) (*быть может, с бо́льшим q*).

Сообщение об этой теореме и ее доказательство были опубликованы в заметке (6).

Работа делится на три параграфа. В § 1 доказываются вспомогательные леммы и приводятся результаты работы (5), относящиеся к задаче погружения над локальными полями.

В § 2 дается доказательство основной теоремы с использованием результатов о задаче погружения.

В § 3 рассматриваются топологические p-группы ($p \neq 2$) с четным числом образующих, связанных единственным определяющим соотношением. Как следствие результатов этого параграфа получается доказательство основной теоремы.

За помощь в работе автор приносит искреннюю благодарность И. Р. Шафаревичу.

§ 1. Вспомогательные леммы

Пусть S — произвольная группа, r — некоторое целое число.

Определение 1. r-центральным рядом группы S называется ряд нормальных делителей $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_i \supset \ldots$, который строится по рекуррентным формулам:

$$S_0 = S, \quad S_i = S_{i-1}^r [S, S_{i-1}] \quad \text{для } i \geqslant 1.$$

В трех нижеследующих леммах ряд $S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_i \supset \ldots$ есть r-центральный ряд для некоторой группы S.

ЛЕММА 1. *Для $k \geqslant 1$ фактор-группа S_k / S_{k+2} — абелева периода r^2.*

Если $a \in S_k$, то $a^r \in S_{k+1}$ и $a^{r^2} \in S_{k+2}$. Поэтому период группы S_k / S_{k+2} не более чем r^2.

Пусть теперь a и $b \in S_k$. Нам нужно показать, что $[a, b] \in S_{k+2}$.

Для $k \geqslant 1$

$$S_k = S_{k-1}^r [S, S_{k-1}];$$

следовательно, элементы a и b являются произведениями r-х степеней элементов S_{k-1} и коммутаторов элементов S_{k-1} с элементами S. Кроме того, по модулю S_{k+2} коммутатор обладает свойством мультипликативности, т. е.

$$[ab, c] \equiv [a, c] \cdot [b, c] \pmod{S_{k+2}},$$

если $c \in S_k$ или a и $b \in S_k$. Это легко проверить непосредственно. Поэтому лемму достаточно доказать для двух случаев: 1) элемент b — r-ая степень, 2) элемент b — коммутатор.

Утверждение $[a, b] \in S_{k+2}$ в обоих случаях получается простой проверкой (знак $\equiv$ означает далее сравнимость по модулю S_{k+2}).

Случай 1). Пусть $b = s_{k-1}^r$, где $s_{k-1} \in S_{k-1}$. Тогда

$$[a, s_{k-1}^r] = a s_{k-1}^r a^{-1} s_{k-1}^{-r} = ([a, s_{k-1}]\, s_{k-1})^r s_{k-1}^{-r} \equiv [a, s_{k-1}]^r \equiv 1.$$

Случай 2). Пусть $b = [x, s_{k-1}]$, где $x \in S$, $s_{k-1} \in S_{k-1}$. Тогда

$$[a, b] = [a, [x, s_{k-1}]] = a\,[x, s_{k-1}]\, a^{-1}\, [s^k_{-\ell}, x] =$$

$$= a x s_{k-1} x^{-1} s_{k-1}^{-1} a^{-1}\, [s_{k-1}, x] = [a, x]\, x\, [a, s_{k-1}]\, s_{k-1}\, [a, x^{-1}]\, x^{-1}.$$

$$[a, s_{k-1}^{-1}]\, s_{k-1}^{-1}\, [s_{k-1}, x] \equiv [a, x]\, [a, x^{-1}]\, [a, s_{k-1}]\, [a, s_{k-1}^{-1}]$$

(так как коммутатор $[a, \ldots] \in S_{k+1}$ и потому лежит в центре).

Остается показать, что $[a, x]\,[a, x^{-1}] \in S_{k+2}$. Но это сразу же следует из мультипликативности коммутатора по модулю S_{k+2}:

$$[a, x]\,[a, x^{-1}] \equiv [a, xx^{-1}] = 1.$$

ЛЕММА 2. *Если r нечетно, $b \in S_k$ $(k \geqslant 0)$ и $\sigma \in S$, то*

$$[\sigma, b^{r^i}] \equiv [\sigma, b]^{r^i} \pmod{S_{k+i+2}}$$

для любого i.

Будем доказывать лемму по индукции относительно i. Для $i = 0$ утверждение очевидно. Докажем лемму для случая $i = 1$, так как это утверждение понадобится нам для общего случая. Мы имеем:

$$[\sigma, b^r] = \sigma b^r \sigma^{-1} b^{-r} = ([\sigma, b]\,b)^r b^{-r} \equiv [b, [\sigma, b]]^{r-1+\ldots+1} [\sigma, b]^r b^r b^{-r} =$$

$$= [b, [\sigma, b]]^{\frac{r(r-1)}{2}} [\sigma, b]^r \equiv [\sigma, b]^r \pmod{S_{k+3}},$$

так как $[b, [\sigma, b]] \in S_{k+2}$ и $\dfrac{r(r-1)}{2}$ делится на r вследствие нечетности r.

Допустим, что лемма справедлива для $i = j$, и докажем, что в этом случае лемма будет справедлива для $i = j + 1$.

При $i = j + 1$ имеем:

$$[\sigma, b^{r^{j+1}}] \equiv [\sigma, b^{r^j}]^r \pmod{S_{k+j+3}},$$

так как $b^{r^j} \in S_{k+j}$. Но, по предположению индукции,

$$[\sigma, b^{r^j}] = [\sigma, b]^{r^j} s_{k+j+2},$$

где $s_{k+j+2} \in S_{k+j+2}$. Поэтому

$$[\sigma, b^{r^i}]^r = ([\sigma, b]^{r^j} s_{k+j+2})^r \equiv ([\sigma, b]^{r^j})^r s_{k+j+2}^r \equiv [\sigma, b]^{r^{j+1}} \pmod{S_{k+j+3}}.$$

ЛЕММА 3. *Если r нечетно и один из элементов a или $b \in S_k$ $(k \geqslant 0)$ то*

$$(ab)^{r^i} \equiv a^{r^i} b^{r^i} \pmod{S_{k+i+1}}.$$

Эта леммма тоже доказывается по индукции относительно i. Для $i = 0$ утверждение очевидно. Докажем лемму для $i = 1$. Имеем:

$$(ab)^r = (ab)\,(ab) \ldots (ab) \equiv a\,([b, a]\,a)\,([b, a]^2 a) \ldots ([b, a]^{r-1} a)\, b^r \equiv$$

$$\equiv [b, a]^{1+\ldots+r-1} a^r b^r = [b, a]^{\frac{r(r-1)}{2}} a^r b^r \equiv a^r b^r \pmod{S_{k+2}}.$$

Последнее сравнение выполняется вследствие того, что $[b, a] \in S_{k+1}$ и $\dfrac{r(r-1)}{2}$ делится на r.

Пусть лемма справедлива при $i = j$, т. е.

$$(a, b)^{r^j} = a^{r^j} b^{r^j} s_{k+j+1},$$

где $s_{k+j+1} \in S_{k+j+1}$. Положим $i = j+1$. Тогда

$$(ab)^{r^{j+1}} = ((ab)^{r^j})^r = (a^{r^j} b^{r^j} s_{k+j+1})^r \equiv (a^{r^j} b^{r^j})^r s_{k+j+1}^r \equiv (a^{r^j} b^{r^j})^r \equiv$$

$$\equiv a^{r^{j+1}} b^{r^{j+1}} \pmod{S_{k+j+2}},$$

так как a^{r^j}, $b^{r^j} \in S_{k+j}$ и для $i = 1$ лемма доказана.

Пусть группа S является полупрямым расширением нормального делителя U, порожденного некоторым элементом σ, и подгруппы T:

$$S = TU, \quad T \cap U = 1.$$

Пусть $S_0 \supset S_1 \supset \ldots S_i \supset \ldots$ — r-центральный ряд группы S, причем r нечетно. Обозначим при $i \geqslant 1$ через M_i подгруппу, порожденную элементами $[t, a]$, $[\sigma, a]\, a^r$, где $t \in T$, σ — образующая и $a \in S_{i-1}$. Тогда очевидно, что $M_i \subset S_i$ и $M_i^r \subset M_{i+1} S_{i+2}$.

ЛЕММА 4. *При* $i \geqslant 1$ $M_i S_{i+1} = S_i$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что любой элемент из S_i по модулю S_{i+1} может быть представлен как элемент из M_i.

Будем доказывать лемму по индукции. Проверим утверждение леммы при $i = 1$. Элементы из S_1 порождаются коммутаторами и r-ми степенями элементов из S. Далее пишем сравнения по модулю S_2.

Возьмем r-ю степень a^r элемента a из S; элемент a представляется в виде $t s_1 \sigma^\alpha$, где $t \in T$, $s_1 \in S_1$. В силу леммы 3,

$$a^r \equiv t^r (\sigma^\alpha)^r.$$

Положив в выражении $[\sigma, b]\, b^r$ $b = \sigma^\alpha$, получим:

$$(\sigma^\alpha)^r \in M_1.$$

Нужно еще показать, что $t^r \in M_1$. Положив в $[\sigma, b]\, b^r$ $b = t$, найдем:

$$[\sigma, t]\, t^r \in M_1.$$

Но

$$[\sigma, t] = [t, \sigma]^{-1} \in M_1.$$

Значит, $t^r \in M_1$.

Возьмем теперь коммутатор $[a, b]$. Пусть $a = t s_1 \sigma^\alpha$. Тогда

$$[a, b] = [t s_1 \sigma^\alpha, b] \equiv [t, b]\, [\sigma, b]^\alpha.$$

Но $[t, b] \in M_1$ и $[\sigma, b] \in M_1 S_2$, так как $[\sigma, b]\, b^r \in M_1$ и $b^r \in M_1 S_2$. Значит, $[a, b] \in M_1 S_2$. Совершаем теперь переход от $i = j$ к $i = j+1$, при этом пишем сравнения по модулю S_{j+2}.

Подгруппа $S_{j+1} = S_j^r [S, S_j]$. Следовательно, нам нужно показать, что $a^r \in M_{j+1} S_{j+2}$ при $a \in S_j$ и $[s, a] \in M_{j+1} S_{j+2}$ при $a \in S_j$. Так как $a \in S_{j_a}$ и мы предполагаем, что $S_j = M_j S_{j+1}$, то $a = m_j s_{j+1}$, где $m_j \in M_j$, $s_{j+1} \in S_{j+1}$.

Возьмем r-ю степень элемента a:

$$a^r = (m_j s_{j+1})^r \equiv m_j^r s_{j+1}^r \text{ (по лемме 3)} \equiv m_j^r \in M_{j+1} S_{j+2},$$

так как $M_j^r \subset M_{j+1} S_{j+2}$.

Докажем, что $[s, a] \in M_{j+1} S_{j+2}$, где $a \in S_j$.

Мы имеем:

$$a = m_j s_{j+1},$$

поэтому

$$[s, a] \equiv [s, m_j]\,[s, s_{j+1}] \equiv [s, m_j].$$

Элемент s представляется в виде

$$s = t \prod_l c_l^{-1} \cdot \sigma^{x_l} c_l,$$

поэтому

$$[s, m_j] \equiv [t, m_j]\,[\sigma, m_j]^{\Sigma x_l}$$

(в силу мультипликативности коммутатора).

Но $[t, m_j] \in M_{j+1}$ и

$$[\sigma, m_j] = ([\sigma, m_j]\, m_j^{-r})\, m_j^r \in M_{j+1} S_{j+2},$$

так как каждый из множителей принадлежит $M_{j+1} S_{j+2}$.

Сформулируем результаты работы ([5]), относящиеся к задаче погружения полей.

Задача погружения полей есть задача отыскания условий, при которых нормальное расширение k/Ω с заданной группой F может быть погружено в нормальное расширение K/Ω с группой G. Очевидно, что группа F должна быть фактор-группой G. Мы будем считать это отображение заданным и обозначим его через φ. Тогда задачу погружения можно коротко записать в виде $(k/\Omega, G, \varphi)$.

Рассматриваются задачи, для которых:

1) ядро φ — группа A — абелева,

2) корни степени η из единицы содержатся в k, где η — период A.

В работе ([5]) нами доказана

ТЕОРЕМА ПОГРУЖЕНИЯ. *Для разрешимости задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ над локальным полем Ω необходимо и достаточно, чтобы распадались все скрещенные произведения $(k/\Omega, F, \chi(a))$, где a — коцикл, соответствующий расширению A с помощью F, а χ — характер группы A, удовлетворяющий условию $\chi(c^\sigma) = \chi(c)^\sigma$ для всех $c \in A$, $\sigma \in F$.*

Заметим, что задачи погружения, рассматриваемые в работе ([5]), могут иметь решения, не являющиеся полями. Но в случае, когда число образующих G равно числу образующих F, решение задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ автоматически является полем. Задачи погружения, рассматриваемые далее, будут удовлетворять этому условию.

§ 2. Группа максимального p-расширения локального поля, содержащего корень степени p из единицы ($p \neq 2$)

Обозначения. R_p — локальное рациональное поле; Ω — локальное поле (расширение конечной степени поля R_p); $n = (\Omega : R_p)$ — степень поля Ω над R_p; K — максимальное p-расширение поля Ω (объединение всех конечных нормальных p-расширений поля Ω); $\mathfrak{G}$ — группа поля K над Ω.

В этом параграфе находится группа $\mathfrak{G}$ в случае, когда поле Ω содержит корень степени p из единицы.

Выясним сначала некоторые простые свойства группы $\mathfrak{G}$.

Известно, что $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих и что число ее образующих ν равно $n+2$.

Пусть ζ_q есть корень из 1 максимальной p-степени, содержащийся в $\Omega\,(q=p^m,\ m\geqslant 1)$.

Построим для $\mathfrak{G}$ q-центральный ряд

$$\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}\ni\mathfrak{G}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_i\supset\ldots.$$

Пусть соответствующая цепочка подполей K будет

$$\Omega_0=\Omega\subset\Omega_1\subset\ldots\subset\Omega_1\subset\ldots.$$

Тогда $H^i=G/G_i$ есть группа поля Ω_i над Ω.

ЛЕММА 5. *Для любого конечного нормального p-расширения Ω' поля Ω найдется такой номер j, что $\Omega'\subset\Omega_j$.*

Поле Ω' содержится в максимальном p-расширении K. Обозначим нормальный делитель, которому принадлежит Ω' в K, через $\mathfrak{N}'$. Тогда $H'=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ — группа Ω' над Ω; H' — конечная p-группа. Известно, что p-центральный ряд, построенный для конечной p-группы, оканчивается единицей. Тем более для такой группы будет оканчиваться единицей q-центральный ряд. Следовательно, существует номер j, для которого

$$H'_j=\mathfrak{G}_j/\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{G}_j=1,$$

т. е. $\mathfrak{G}_j\subset\mathfrak{N}'\cap\mathfrak{G}_j$ или $\mathfrak{G}_j\subset\mathfrak{N}'$. Это дает:

$$\Omega'\subset\Omega_j.$$

Лемма 4 означает, что группа $\mathfrak{G}$ является проективным пределом последовательности конечных p-групп $H^1, H^2,\ldots$, т. е. $\mathfrak{G}$ — топологическая p-группа. Поэтому мы и будем последовательно определять H^1, $H^2,\ldots,H^i,\ldots$.

Как следует из теории полей классов, группа H^1 есть абелева группа с $\nu=n+2$ образующими, имеющая тип $(q, q,\ldots, q)$.

Для определения группы H^2 выберем в Ω^* такой q-базис $a_1, a_2,\ldots,a_\nu$, для которого выполняются соотношения:

$$a_1=\zeta_q,\quad (a_1, a_2)_q=\zeta_q,\ \ldots,\ (a_{\nu-1}, a_\nu)_q=\zeta_q$$

(здесь $(\alpha, \beta)_q$ обозначает символ норменного вычета), остальные символы норменного вычета равны 1. Возможность такого выбора следует из невырожденности символа $(\alpha, \beta)_q$.

Образующие $\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_\nu$ группы $\mathfrak{G}$ выбираем так, чтобы образующая σ_i из всех корней $\sqrt[q]{a_1}, \sqrt[q]{a_2},\ldots,\sqrt[q]{a_\nu}$ действовала только на $\sqrt[q]{a_i}$ $(\sqrt[q]{a_i}^{\sigma_i}=\zeta_q\sqrt[q]{a_i})$.

ЛЕММА 6. *Если $\Omega_1=\Omega(\sqrt[q]{a_1}, \sqrt[q]{a_2},\ldots,\sqrt[q]{a_\nu})$ и образующие $\sigma_1, \sigma_2,\ldots,\sigma_\nu$ в группе $\mathfrak{G}$ выбраны так, что*

$$\sqrt[q]{a_i}^{\sigma_j}=\zeta_q^{\delta_{i,j}}\sqrt[q]{a_i},$$

то группа H^2 имеет единственное определяющее соотношение

$$\sigma_2^q[\sigma_1, \sigma_2][\sigma_3, \sigma_4]\ldots[\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu]=1,$$

кроме тривиальных (в последнем соотношении $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$ *обозначают образы образующих группы* $\mathfrak{G}$ *в* H^2).

При доказательстве этой леммы мы будем пользоваться некоторыми результатами § 1.

Так как в H^1 никаких соотношений нет, то в H^2 любое соотношение будет иметь вид

$$\prod_i (\sigma_i^q)^{x_i} \prod_{i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Для выяснения структуры этих соотношений мы будем ставить некоторые центральные задачи погружения (степени q) над полем

$$\Omega_1 = \Omega\left(\sqrt[q]{a_1}, \sqrt[q]{a_2}, \ldots, \sqrt[q]{a_\nu}\right).$$

Здесь мы воспользуемся таким свойством: задача погружения $(\Omega_1/\Omega, G, \varphi)$, для которой $G_2 = 1$, разрешима тогда и только тогда, когда G есть фактор-группа H^2. То, что это так, очевидно ввиду того, что H^2 есть группа поля Ω_2, получающегося объединением решений всех именно таких задач погружения.

Поставим задачу погружения $(\Omega_1/\Omega, G, \varphi)$, где G — центральное расширение нормального делителя $A = \{z, z^q = 1\}$ с помощью H^1, определяемое условиями

$$\sigma_i^q = z^{y_i}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = z^{y_{i,j}} \quad (i < j).$$

Как только что было замечено, необходимое и достаточное условие для разрешимости этой задачи заключается в том, чтобы G была фактор-группой группы H^2 или чтобы

$$\prod_i z^{x_i y_i} \prod_{i<j} z^{x_{i,j} y_{i,j}} = 1.$$

Для выполнения этого равенства нужно, чтобы

$$\sum_i x_i y_i + \sum_{i<j} x_{i,j} y_{i,j} \equiv 0 \pmod q. \tag{3}$$

С другой стороны, для разрешимости задачи погружения $(\Omega_1/\Omega, G, \varphi)$ необходимо и достаточно, чтобы (по теореме Брауэра) распадалась алгебра:

$$(\Omega_1/\Omega, H^1, \chi(a)), \quad \chi \in \operatorname{char} A \quad (\chi(z) = \zeta_q). \tag{4}$$

Здесь a — фундаментальный коцикл точной последовательности

$$1 \to A \to G \to H^1 \to 1.$$

Будем теперь специализировать задачу погружения.

1) $y_i = 0$, $y_{i,j} = 0$, кроме одного $y_{i',j'} = 1$ $(i' < j' + 1)$.

Для такой задачи условие (4) выполняется, так как в алгебре $(\Omega_1/\Omega, H^1, \chi(a))$ в этом случае имеется матричная подалгебра, порожденная элементами поля

$$\Omega\left(\ldots, \widehat{\sqrt[q]{a_{i'}}}, \ldots\right)$$

и

$$u_{\sigma_1}, \ldots, \hat{u}_{\sigma_{i'}}, \ldots, u_{\sigma_\nu}.$$

После отщепления этой матричной алгебры остается алгебра

$$(a_{i'},\ a_{j'}^{-1}) = (a_{i'},\ a_{j'})^{-1} \sim 1$$

(в силу выбора $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu$ и условия $i' < j' + 1$).

Таким образом, задача погружения в этом случае разрешима, и условие (3) дает:

$$x_{i'j'} \equiv 0 \pmod q \quad \text{при} \quad i' < j' + 1.$$

2) $y_i = 0$, кроме одного $y_{i'} = 1\ (i' \neq 2)$; $y_{i,\,j} = 0$. Для такой задачи условие (4) тоже выполняется, так как в алгебре $(\Omega_1/\Omega,\ H^1,\ \chi(a))$ имеется в этом случае матричная подалгебра, порожденная элементами

$$\Omega\left(\ldots,\ \widehat{\sqrt[q]{a_{i'}}},\ \ldots\right)$$

и

$$u_{\sigma_1},\ \ldots,\ \hat{u}_{\sigma_{i'}},\ \ldots,\ u_{\sigma_\nu},$$

и после отщепления ее остается алгебра $(a_{i'},\ \zeta_q) \sim 1$ (так как $i' \neq 2$).

Таким образом, и здесь задача погружения разрешима, и условие (3) дает:

$$x_{i'} \equiv 0 \pmod q \quad \text{при} \quad i' \neq 2.$$

3) $y_2 = 1,\ y_{i',\,i'+1} = -1 \quad (i' \neq 1)$; все остальные члены — нули.

Для такой задачи условие (4) выполняется: в алгебре $(\Omega_1/\Omega,\ H^1,\ \chi(a))$ имеется в этом случае матричная подалгебра, порожденная элементами

$$\Omega\left(\sqrt[q]{a_1},\ \widehat{\sqrt[q]{a_2}},\ \ldots,\ \widehat{\sqrt[q]{a_{i'}}},\ \ldots\right)$$

и

$$u_{\sigma_1},\ \hat{u}_{\sigma_2},\ \ldots,\ \hat{u}_{\sigma_{i'}},\ \ldots,\ u_{\sigma_\nu},$$

после отщепления которой остается алгебра вида

$$\sum_{x,\,y} u_{\sigma_2}^x \left(u_{\sigma_{i'}} \sqrt[q]{a_{i'+1}}\right)^y \alpha_{x,\,y},$$

где

$$\alpha_{x,\,y} \in \Omega\left(\sqrt[q]{a_2},\ \sqrt[q]{a_{i'}}\right).$$

Последняя алгебра есть прямое произведение алгебр $(a_2,\ \zeta_q)$ и $(a_{i'},\ a_{i'+1})$:

$$(\Omega_1/\Omega,\ H^1,\ \chi(a)) \sim (a_2,\ \zeta_q)\,(a_{i'},\ a_{i'+1}) = (\zeta_q,\ a_2)^{-1}\,(a_{i'},\ a_{i'+1});$$

инвариант этой алгебры равен

$$\mu\left((\zeta_q,\ a_2)^{-1}\,(a_{i'},\ a_{i'+1})\right) = \zeta_q^{-1}\zeta_q = 1,$$

т. е. она распадается. Задача погружения в этом случае опять разрешима, и условие (3) дает:

$$x_2 \equiv x_{i',\,i'+1} \pmod q \quad \text{для} \quad i' \neq 1.$$

4) $y_2 = 1,\ y_{1,2} = -1$; все остальные члены — нули.

Условие (4) выполняется: алгебра $(\Omega_1/\Omega, H^1, \chi(a))$ содержит матричную подалгебру, порожденную элементами поля

$$\Omega\left(\sqrt[q]{a_1}, \sqrt[q]{\hat{a}_2}, \ldots, \sqrt[q]{a_\nu}\right)$$

и

$$u_{\sigma_1}, \hat{u}_{\sigma_2}, \ldots, u_{\sigma_\nu},$$

после отщепления которой получается алгебра

$$(a_2, \zeta_q/a_1) = (a_2, 1) \sim 1.$$

Задача погружения разрешима, и условие (3) дает:

$$x_2 \equiv x_{1,2} \pmod q.$$

Таким образом, нетривиальные соотношения в H^2 имеют вид:

$$(\sigma_2^q)^{x_2}[\sigma_1, \sigma_2]^{x_2}[\sigma_3, \sigma_4]^{x_2}\ldots[\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu]^{x_2} = 1.$$

По лемме 1, элементы в левой части коммутируют между собой, значит, соотношения в H^2 можно записать в виде:

$$(\sigma_2^q[\sigma_1, \sigma_2][\sigma_3, \sigma_4]\ldots[\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu])^{x_2} = 1.$$

Отсюда, в частности, следует вывод: *в группе H^2 имеется единственно определяющее соотношение* (если оно существует).

По теории полей классов, в группе $\mathfrak{G}/[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ имеется определяющее соотношение $\tau^q = 1$, так как ζ_q — корень максимальной p-степени, содержащейся в Ω. Отсюда следует, что x_2 не может делиться на p.

Таким образом, в H^2 имеется единственное определяющее соотношение

$$\sigma_2^q[\sigma_1, \sigma_2][\sigma_3, \sigma_4]\ldots[\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Группа $\mathfrak{G}$ максимального p-расширения локального поля Ω, содержащего корень степени q $(q = p^m, m \geqslant 1)$ из единицы, изоморфна топологической группе с $\nu = n + 2$ образующими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$, на которые наложено единственное соотношение*

$$\rho = \sigma_2^q[\sigma_1, \sigma_2][\sigma_3, \sigma_4]\ldots[\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Как следует из леммы 5, группа $\mathfrak{G}$ полностью определяется рядом ее фактор-групп $H^1, H^2, \ldots, H^i, \ldots$. Поэтому мы будем доказывать следующее утверждение: *группа H^i при $i \geqslant 2$ изоморфна группе с ν образующими, на которые наложено единственное соотношение* $\rho = 1$ (*кроме тривиальных* $(H^i)_i = 1$).

Это утверждение доказывается по индукции. При $i = 2$ это есть лемма 6. Допустим, что утверждение верно для группы H^j $(j \geqslant 2)$. Для выяснения структуры группы H^{j+1} введем в рассмотрение конечную p-группу $\overline{H}$, которая получается из свободной группы S с ν образующими факторизацией по нормальному делителю $\mathfrak{N}$, порожденному эле-

ментами из S_{j+1} и некоторым словом $\bar{\rho}$, на которое мы наложим единственное условие, чтобы по модулю S_j оно приводилось к виду ρ:

$$\bar{\rho} \equiv \rho \,(\mathrm{mod}\, S_j).$$

Из определения группы $\overline{H}$ и из предположения относительно группы H^j следует, что фактор-группа $\overline{H} / \overline{H}_j$ изоморфна H^j, а фактор-группа $\overline{H} / \overline{H}_{j-1}$ изоморфна группе H^{j-1}.

Заметим, далее, что порядок группы $\overline{H}$ не меньше порядка группы H^{j+1}. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что имеет место следующее неравенство порядков их нормальных делителей $\overline{H}_j$ и $(H^{j+1})_j$:

$$[\overline{H}_j : 1] \geqslant [(H^{j+1})_j : 1].$$

Докажем, что группа $\overline{H}_j$ не зависит от вида слова $\bar{\rho}$. Так как группа H^{j+1} получается факторизацией из свободной группы S по нормальному делителю, содержащему элементы S_{j+1} и некоторое слово вида $\bar{\rho}$, то из последнего утверждения действительно будет следовать неравенство порядков групп $\overline{H}_j$ и $(H^{j+1})_j$.

Так как

$$\overline{H} = S / \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} = \{S_{j+1}, \bar{\rho}\},$$

то $\overline{H}_j = S_j / \mathfrak{N} \cap S_j$, и нам нужно показать, что группа $\mathfrak{N} \cap S_j$ не зависит от слова $\bar{\rho}$. Любой элемент из $\mathfrak{N}$ можно представить в виде

$$s_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} R_l^{-1} \bar{\rho} R_l,$$

где $s_{j+1} \in S_{j+1}$. Но $\bar{\rho} = \rho s_j$ при $s_j \in S_j$. Для того чтобы элемент $s_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} R_l^{-1} \bar{\rho}\, R_l$ принадлежал S_j, нужно, чтобы элемент

$$s_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} (R_l^{-1} \rho s_j R_l) = s_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} ([R_l^{-1}, \rho]\, \rho\, [R_l^{-1}, s_j]\, s_j) =$$

$$= s'_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} ([R_l^{-1}, \rho]\, \rho)\, s_j^{\alpha}$$

принадлежал S_j, т. е. чтобы

$$\prod_{l=1}^{\alpha} ([R_l^{-1}, \rho]\, \rho) \in S_j.$$

Но $j \geqslant 2$, поэтому

$$\prod_{l=1}^{\alpha} ([R_l^{-1}, \rho]\, \rho) \in S_2.$$

Отсюда, в силу того, что $[R_l^{-1}, \rho] \in S_2$, следует, что $\rho^{\alpha} \in S_2$, т. е. α делится на q.

Таким образом, ввиду того, что s_j^{α} при $\alpha \equiv 0 \pmod q$ принадлежит S_{j+1}, любой элемент из $\mathfrak{N} \cap S_j$ можно представить в виде

$$s''_{j+1} \prod_{l=1}^{\alpha} ([R_l^{-1}, \rho]\, \rho),$$

где $s''_{j+1} \in S_{j+1}$. Следовательно, группа $\mathfrak{N} \cap S_j$ от $\bar{\rho}$ не зависит.

Для определения группы H^{j+1} $(j \geqslant 2)$ поставим задачу погружения $(\Omega_{j-1}/\Omega, \overline{H}, \overline{\varphi})$, где $\overline{\varphi}$ — естественный гомоморфизм $\overline{H}$ на H^{j-1}. Нормальный делитель $\overline{H}_{j-1}$ в этой задаче — абелев периода q^2 (лемма 1).

Корни степени q^2 содержатся в поле Ω_{j-1}, так как $\Omega_{j-1} \supset \Omega_1$ (при $i \geqslant 2$). Поэтому к нашей задаче можно применить теорему погружения, которая была сформулирована в § 1.

Условие разрешимости в данном случае заключается в том, чтобы распадались все скрещенные произведения

$$(\Omega_{j-1}/\Omega, H^{j-1}, \chi(a)),$$

где a — коцикл, задающий расширение $\overline{H}_{j-1}$ при помощи H^{j-1}, а χ — H^{j-1}-инвариантный характер группы $\overline{H}_{j-1}$.

Посмотрим, что дает условие

$$\chi(c^{\sigma}) = \chi(c)^{\sigma}, \quad c \in \overline{H}_{j-1}, \quad \sigma \in H^{j-1}.$$

Если $\sigma = \sigma_i^{-1}$ $(i \neq 1)$, то σ не действует на значения характера χ, и условие

$$\chi\left(c^{\sigma_i^{-1}}\right) = \chi(c)$$

дает, что

$$\chi([\sigma_i, c]) = 1.$$

Если $\sigma = \sigma_1^{-1}$, то условие

$$\chi\left(c^{\sigma_1^{-1}}\right) = \chi(c)^{\sigma_1^{-1}}$$

означает, что

$$\chi([\sigma_1, c]\, c^q) = 1$$

(это можно проверить непосредственно, исходя из того, что $\sqrt[q]{a_1}^{\sigma_1} = \zeta_q \sqrt[q]{a_1}$ и $a_1 = \zeta_q$). Последнее условие, в свою очередь, означает, что характер χ должен обращаться в 1 на подгруппе, порожденной элементами $[\sigma_i, c]$ при $i \neq 1$ и $[\sigma_1, c]\, c^q$. Но эта подгруппа есть не что иное, как подгруппа M_j, построенная при $T = \{\sigma_2, \ldots, \sigma_\nu\}$ и при u порожденном образующей σ_1. Применяя лемму 4, получаем:

$$M_j \overline{H}_{j+1} = \overline{H}_j;$$

но $\overline{H}_{j+1} = 1$ по определению $\overline{H}$. Поэтому

$$\overline{H}_j = M_j \subset \operatorname{Ker} \chi.$$

Характер χ должен обращаться в 1 на $\overline{H}_j$. После факторизации по $\overline{H}_j$ получается задача $(\Omega_{j-1}/\Omega,\ H^j,\ \varphi)$, так как $\overline{H}/\overline{H}_j \cong H^j$. Но такая задача очевидным образом разрешима: ее решением является поле Ω_j. Следовательно, и подавно будет разрешима задача $(\Omega_{j-1}/\Omega,\ \overline{H}/\operatorname{Ker}\chi,\ \psi)$.

Отсюда следует, что для поставленной первоначально задачи $(\Omega_{j-1}/\Omega,\ \overline{H},\ \overline{\varphi})$ выполняется условие погружаемости, и, таким образом, задача погружения $(\Omega_{j-1}/\Omega,\ \overline{H},\ \overline{\varphi})$ разрешима.

Число образующих у группы $\overline{H}$ — такое же, как и у H^{j-1}, поэтому решением нашей задачи будет некоторое поле $\overline{\Omega}$. Так как $\overline{H}_{j+1} = 1$, то $\overline{\Omega} \subset \Omega_{j+1}$ (Ω_{j+1} является максимальным из такого рода полей).

Из последнего включения делаем вывод: $\overline{H}$ есть фактор-группа группы H^{j+1}, но, как мы знаем, $[\overline{H}:1] \geqslant [H^{j+1}:1]$, поэтому $\overline{H} \cong H^{j+1}$.

Следовательно, в группе H^{j+1} образующие можно выбрать так, чтобы между ними выполнялось единственное соотношение $\bar{\rho} = 1$. Беря теперь в качестве $\bar{\rho}$ слово ρ, мы и получаем утверждение теоремы.

Теорема 1 дает возможность выяснить структуру подгрупп конечного индекса группы $\mathfrak{G}$.

Следствие. *Подгруппа $\mathfrak{G}'$ конечного индекса группы $\mathfrak{G}$ изоморфна топологической p-группе с $\nu' = n\cdot(\mathfrak{G}:\mathfrak{G}') + 2$ образующими, связанными единственным соотношением*

$$\sigma_2^{q'}[\sigma_1, \sigma_2][\sigma_3, \sigma_4]\ldots[\sigma_{\nu'-1}, \sigma_{\nu'}] = 1.$$

Действительно, пусть подгруппе $\mathfrak{G}'$ в K принадлежит подполе Ω'. Тогда максимальное p-расширение поля Ω' совпадает с K, степень Ω над R_p есть

$$(\Omega':\Omega)(\Omega:R_p) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{G}')\cdot n$$

и $\zeta_q \in \Omega \subset \Omega'$.

Применяя теорему 1 к этому случаю, мы и получаем утверждение следствия.

Интересно обратить внимание на аналогию этого следствия с известными теоремами о подгруппах конечного индекса фундаментальной группы поверхности и свободной группы с конечным числом образующих.

§ 3. Топологические p-группы с единственным соотношением

Топологической p-группой называется компактная топологическая группа G со следующими двумя свойствами:

1. Пусть $\mathfrak{H} = \{H_\alpha,\ \alpha \in J\}$ есть совокупность всех открытых и замкнутых нормальных делителей H_α группы G; тогда для каждой $H_\alpha \in \mathfrak{H}$

$$(G:H_\alpha) = p^{n_\alpha} \quad (n_\alpha = 1, 2, \ldots).$$

2. Совокупность $\mathfrak{H} = \{H_\alpha;\ \alpha \in J\}$ образует систему окрестностей единичного элемента 1 в G, т. е. $\bigcap\limits_\alpha H_\alpha = \{1\}$.

Для того чтобы группа G была топологической p-группой, необходимо и достаточно, чтобы она была проективным пределом некоторой совокупности конечных p-групп.

Мы будем рассматривать топологические p-группы с конечным четным числом ν образующих, связанных единственным определяющим соотношением, при $p \neq 2$.

Пусть G — такая группа с соотношением $\tau = 1$ (τ — некоторое слово) Для каждой такой группы рассмотрим группу $G/[G, G]$. В этой группе либо не будет никакого соотношения (группа без кручения; такие группы мы будем называть группами первого типа), либо это соотношение с помощью замены образующих можно будет привести к виду $\sigma^{p^m} = 1$ (σ — образующая; такие группы мы будем называть группами второго типа).

Определение 3. Соотношение $\tau = 1$ в топологической p-группе G называется полным, если его по модулю второго члена p-центрального ряда нельзя заменить эквивалентным, не содержащим хотя бы одной образующей.

ЛЕММА 7. *Для того чтобы соотношение $\tau = 1$ в группе G было полным, необходимо и достаточно, чтобы по модулю второго члена G_2 q-центрального ряда оно было эквивалентно одному из следующих двух видов:*

$$[\sigma_2, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1$$

или

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Если в лемме 7 группа G первого типа, то для нее мы строим p-центральный ряд.

Доказательство достаточности. Нам нужно только доказать, что из выражения

$$[\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu]$$

по модулю членов, содержащих более одной операции, с помощью замены образующих нельзя изгнать никакую образующую. Этого достаточно ввиду того, что при замене образующих из члена σ_2^q никакие коммутаторы возникнуть не могут, так как, в силу леммы 3,

$$(ab)^q \equiv a^q b^q \pmod{G_2}.$$

Покажем, например, что нельзя изгнать образующую σ_1. Общий вид замены образующих таков:

$$\sigma_i = \prod_j (\bar{\sigma}_j)^{x_{i,j}},$$

где $|x_{i,j}| \not\equiv 0 \pmod p$.

Подсчитаем показатель степени при $[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_k]$ после замены образующих. Это будет выражение

$$(x_{1,1}x_{2,k} - x_{1,k}x_{2,1}) + (x_{3,1}x_{4,k} - x_{3,k}x_{4,1}) + \cdots$$
$$\cdots + (x_{\nu-1,1}x_{\nu,k} - x_{\nu-1,k}x_{\nu,1}),$$

которое не может равняться нулю при всех k, так как получающаяся линейная система уравнений имеет определитель, отличный от 0 (по mod p).

Доказательство необходимости. Пусть группа G — первого типа и имеет полное соотношение $\tau = 1$. Тогда по модулю G_2 соотношение $\tau = 1$ имеет вид

$$\prod_{i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Пусть σ_1 входит в соотношение в виде $[\sigma_1, \sigma_j]$. Тогда, изменив нумерацию образующих ($\sigma_j = \bar{\sigma}_2$; $\sigma_2 = \bar{\sigma}_j$), можно считать, что в соотношение входит коммутатор $[\sigma_1, \sigma_2]$.

Сделаем замену образующих

$$\sigma_1^{x_{1,2}} = \bar{\sigma}_1$$

(это возможно, так как $x_{1,2} \not\equiv 0 \pmod p$). Тогда наше соотношение примет вид:

$$[\sigma_1, \sigma_2] \prod_{i<j,\ (i,j)\neq(1,2)} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Произведя теперь замену

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \prod_{j>2} \bar{\sigma}_j^{-x_{1,j}}, \quad \sigma_1 = \bar{\sigma}_1 \prod_{j>2} \bar{\sigma}_j^{-x_{2,j}},$$

мы получим соотношение вида

$$[\sigma_1, \sigma_2] \prod_{2<i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Продолжая процесс, мы придем к соотношению

$$[\sigma_1, \sigma_2]\, [\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Пусть теперь группа G — второго типа; тогда, сделав замену образующих так, чтобы в $G/[G, G]$ выполнялось соотношение $\sigma_2^q = 1$, будем иметь, что по модулю G_2 соотношение $\tau = 1$ принимает вид

$$\sigma_2^q \prod_{i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Пусть σ_1 входит в это соотношение в виде коммутатора $[\sigma_1, \sigma_j]$ и $x_{1,j} \not\equiv 0 \pmod p$. Все $x_{1,j}$ не могут делиться на p, так как в противном случае по второму члену p-центрального ряда соотношение не содержало бы σ_1, что противоречило бы его полноте. Если $j \neq 2$, то при помощи замены $\sigma_j = \bar{\sigma}_2 \bar{\sigma}_j$ мы всегда добьемся того, что $[\sigma_1, \bar{\sigma}_2]$ будет входить в соотношение. Сделаем замену образующих $\sigma_1^{x_{1,2}} = \bar{\sigma}_1$; тогда наше соотношение примет вид:

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \prod_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2)}} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Произведя теперь замену

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 \prod_{j>2} \bar{\sigma}_j^{x_{2,j}},$$

мы приведем соотношение к виду

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \prod_{\substack{i<j,\ i\neq 2 \\ (i,j)\neq(1,2)}} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \prod_{2<j} [\sigma_1, \sigma_j]^{x_{1,j}} \prod_{2<i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}} = 1.$$

Выделим образующие, входящие в произведение

$$\prod_{2<i<j} [\sigma_i, \sigma_j]^{x_{i,j}}$$

со степенью коммутатора, не делящейся на p, и занумеруем их последними индексами $\nu'+1, \nu'+2, \ldots, \nu$. Ясно, что все такие образующие можно изгнать из произведения

$$\prod_{2<j} [\sigma_1, \sigma_j]^{x_{1,j}}$$

и привести соотношение к виду

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \prod_{j=3}^{\nu'} [\sigma_1, \sigma_j]^{x_{1,j}} \prod_{2<i<j\leqslant\nu'} [\sigma_i, \sigma_j]^{px_{i,j}} [\sigma_{\nu'+1}, \sigma_{\nu'+2}] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1,$$

где $x_{1,j} \not\equiv 0 \pmod p$ и ν' — четное число $(2 \leqslant \nu' \leqslant \nu)$.

Покажем, что $\nu' = 2$. Для этого достаточно установить, что при $\nu' > 2$ соотношение

$$\sigma_2^q \prod_{j=3}^{\nu'} [\sigma_1, \sigma_j]^{x_{1,j}} \prod_{2<i<j\leqslant\nu'} [\sigma_i, \sigma_j]^{px_{i,j}} = 1$$

не будет полным или что не будет полным соотношение

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \prod_{j=3}^{\nu'} [\sigma_1, \sigma_j]^{x_{1,j}} = 1.$$

Для этого сделаем замену

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \prod_{j=3}^{\nu'} \bar{\sigma}_j^{-x_{1,j}}.$$

Тогда соотношение примет вид:

$$\left(\sigma_2 \prod_{j=3}^{\nu'} \sigma_j^{-x_{1,j}}\right)^q [\sigma_1, \sigma_2] = 1,$$

где все $x_{1,j} \not\equiv 0 \pmod p$.

Совершая теперь преобразование

$$\sigma_2 \sum_{j=3}^{\nu'} \sigma_j^{-x_{1,j}} = \bar{\sigma}_3,$$

мы получим соотношение

$$\sigma_3^q [\sigma_1, \sigma_2] = 1,$$

не содержащее, например, σ_4. Таким образом, $\nu' = 2$ и наше соотношение имеет вид:

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \dots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Топологическая p-группа* ($p \neq 2$) *первого* (*второго*) *типа с четным числом* ν *образующих с единственным полным определяющим соотношением изоморфна топологической p-группе с образующими* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\nu$, *на которые наложено единственное соотношение*

$$[\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \dots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1$$

$$(\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \dots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1).$$

Для доказательства теоремы строим в группе G q-центральный ряд $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset \dots$ (если группа G первого типа, то для нее строим p-центральный ряд). Пересечение всех членов этого ряда равно 1, и они образуют систему окрестностей единицы. Группа G является проективным пределом последовательности конечных p-групп

$$H^0 \subset H^1 \subset H^2 \subset \dots \subset H^i \subset \dots,$$

где $H^i = G / G_i$.

Группа H^1 — абелева с ν образующими, типа $(q, q, \dots, q)$.

Лемма 7 показывает, что в группе H^2 выполняется соотношение как раз требуемого вида.

Пусть теперь соотношение нужного вида имеет место в группе H^j $(j \geqslant 2)$, т. е. по модулю G_j. Докажем, что образующие в G можно выбрать так, что и в H^{j+1} соотношение будет такое же.

Отметим, что образующие в фактор-группе G_j / G_{j+1} можно выбрать в виде K^{q^α}, где K — чистый коммутатор (чистым мы называем коммутатор вида $[\sigma_j, K']$, где K' — чистый коммутатор более низкого веса и σ_j — образующая, а чистый коммутатор нулевого веса — просто образующая). Разумеется, вес $K + \alpha = j$.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G — первого типа. Тогда по модулю $(j+1)$-го члена p-центрального ряда соотношение будет иметь вид

$$[\sigma_1, \sigma_2] \dots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] \prod_{k, i} \left([\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}}\right)^{x_{k, i}} = 1,$$

где $\alpha_i +$ вес $K_i + 1 = j$. Степени образующих в соотношение входить не будут, так как G — группа первого типа.

Докажем, что все коммутаторы $[\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}}$ можно изгнать с помощью замены образующих в G.

Если k нечетно, то сделаем замену

$$\sigma_{k+1} = \bar{\sigma}_{k+1} (\bar{K}_i^{q^{\alpha_i}})^{-x_{k,i}},$$

где $\bar{K}_i$ — коммутатор такого же вида, что и K_i, только с новыми образующими. При этой замене выражение

$$\prod_{k,i} ([\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{k,i}}$$

не изменится, а соотношение перейдет в такое, у которого один коммутатор

$$([\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{k,i}}$$

пропадет.

Если k четно, то применяем преобразование

$$\sigma_{k-1} = \bar{\sigma}_{k-1} (\bar{K}_i^{q^{\alpha_i}})^{x_{k,i}}.$$

Таким образом из соотношений изгоняются все коммутаторы

$$([\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{k,i}},$$

и теорема для случая групп первого типа доказана.

Пусть теперь G — группа второго типа. В этом случае соотношение по модулю G_{j+1} можно записать в виде

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] \prod_i (\sigma_i^{q^j})^{x_i} \prod_{k,i} ([\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{k,i}} = 1.$$

Таким же образом, как и в первом случае, мы можем изгнать все коммутаторы $[\sigma_k, K_i]^{q^{\alpha_i}}$ при $k \neq 1$ и привести соотношение к виду

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] \prod_i (\sigma_i^{q^j})^{x_i} \prod_i ([\sigma_1, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{1,i}} = 1.$$

Сделаем теперь преобразование образующих

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 (\bar{K}_i^{q^{\alpha_i}})^{-x_{1,i}}.$$

Тогда, используя лемму 3, получим:

$$\sigma_2^q \equiv \bar{\sigma}_2^q (\bar{K}_i^{q^{\alpha_i+1}})^{-x_{1,i}} \pmod{\sigma_{j+1}}.$$

При таком преобразовании коммутатор

$$([\sigma_1, K_i]^{q^{\alpha_i}})^{x_{1,i}}$$

изгоняется, но появляется новый коммутатор $K_i^{q^{\alpha_i+1}}$ с большим показателем степени q^{α_i+1}.

Продолжая этот процесс, мы придем к соотношению вида

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] \prod_i (\sigma_i^{q^j})^{x_i} = 1$$

и, сделав преобразование

$$\sigma_2 = \bar{\sigma}_2 \prod_i (\bar{\sigma}_i^{q^{j-1}})^{-x_i},$$

получим соотношение вида

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] \prod_{i>1} ([\sigma_1, \sigma_i]^{q^{j-1}})^{-x_i} = 1.$$

Все коммутаторы $[\sigma_1, \sigma_i]^{q^{j-1}}$ мы можем изгнать первоначальным способом и окончательно получим соотношение

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Теорема доказана.

Как следствие теоремы 2, можно легко получить доказательство теоремы 1, если только воспользоваться доказанным Kawada ([4]) фактом, что в группе максимального p-расширения локального поля имеется единственное определяющее соотношение.

Действительно, группа $\mathfrak{G}$ является топологической p-группой (лемма 5) с четным числом образующих $\nu = n + 2$ второго типа (как следует из теории полей классов) с единственным полным соотношением (единственность предполагается, полнота следует из лемм 6 и 7). Следовательно, она изоморфна топологической p-группе с ν образующими $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu$, на которые наложено единственное соотношение

$$\sigma_2^q [\sigma_1, \sigma_2] [\sigma_3, \sigma_4] \ldots [\sigma_{\nu-1}, \sigma_\nu] = 1.$$

Поступило
23.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шафаревич И. Р., О p-расширениях, Матем. сборн., 20 (62) : 2 (1947), 351—363.

[2] Скопин А. И., p-расширения локального поля, содержащего корни степени p^M из единицы, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 445—470.

[3] Фаддеев Д. К. и Скопин А. И., К доказательству одной теоремы Кавада, Доклады Ак. наук СССР, 127, № 3 (1959), 529—530.

[4] Kawada I., On the structure of the Galois group of some infinite extensions. I, Journ. of the Faculty of science Univ. Tokyo, sec. I, vol. VII (1954), 1—18.

[5] Демушкин С. П. и Шафаревич И. Р., Задача погружения для локальных полей, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 823—840.

[6] Демушкин С. П., Группа максимального p-расширения локального поля, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 4 (1959), 657—660.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 347—356

А. А. ГОНЧАР

ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В работе доказывается одна обратная теорема о наилучших приближениях рациональными функциями, а также приводится ряд смежных результатов.

В настоящей работе устанавливается зависимость дифференциальных свойств функции $\varphi(x)$, определенной и непрерывной на совершенном множестве P положительной меры, от скорости стремления к нулю ее наилучших приближений рациональными функциями $R_n(\varphi; P)$ (и, в частности, алгебраическими многочленами). Полученные результаты позволяют естественным образом сформулировать прямую и обратную теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями (и многочленами) измеримой функции $f(x)$, определенной и конечной почти всюду на измеримом множестве F.

Основная теорема работы, являющаяся аналогом хорошо известной теоремы С. Н. Бернштейна [см., например, ([1])] о наилучших приближениях алгебраическими многочленами функции, определенной и непрерывной на отрезке $[a, b]$ действительной оси, может быть сформулирована так:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $R_n(\varphi, P) \leqslant \frac{C}{n^{k+\alpha+\delta}}$, *где* $k \geqslant 0$ — *целое*, $0 \leqslant \alpha < 1$, $\delta > 0$ *произвольно мало*, C *не зависит от* n. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется совершенное множество* $P_\varepsilon \subset P$, $\operatorname{mes}(P \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$, *такое, что функция* $\varphi(x)$, *рассматриваемая только на этом множестве, имеет непрерывную* k*-ю производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка* α.

Если $k \geqslant 1$, *то функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема почти всюду на множестве* P *(по множеству* P*).*

Основные результаты настоящей работы были опубликованы без доказательств в заметке автора ([9]) (для некоторых частных случаев результаты были получены ранее в работах ([7]), ([8])) *.

1. Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, определенную и непрерывную на совершенном множестве $P \subset [a, b]$ (мы будем рассматривать только вещественные функции на ограниченных множествах, принадлежащих отрезку $[a, b]$; при этом как требование вещественности функции, так и требование ограниченности множеств несущественны). Обозначим через $\omega(\delta; \varphi; P)$ модуль непрерывности функции $\varphi(x)$ на множестве P:

$$\omega(\delta, \varphi; P) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in P \\ |x_1 - x_2| \leqslant \delta}} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

* Ряд результатов в этом направлении получен недавно Е. П. Долженко ([6]).

Если $\omega(\delta; \varphi; P) \leqslant C\delta^{\alpha}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$ и C не зависит от δ, то говорят, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на P.

Пусть $\varphi_P^{(k)}(x)$ обозначает k-ю производную функции $\varphi(x)$ в точке $x \in P$ по множеству P; тогда, в частности, имеем:

$$\varphi'_P(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x,\, x+h \in P}} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Определение 1. Непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на множестве P, принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(k+\alpha)$ на множестве P или $\varphi(x) \in L(k+\alpha;\, P)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, если существует непрерывная k-я производная $\varphi_P^{(k)}(x)$, $x \in P$, удовлетворяющая условию Липшица порядка α на P.

Пусть $F \in [a, b]$ — измеримое множество, $\mathrm{mes}\, F > 0$; для характеристики дифференциальных свойств измеримой функции $f(x)$ на множестве F удобно ввести следующее

Определение 2. Измеримая функция $f(x)$, определенная и конечная почти всюду на F, принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,(k+\alpha)$ *внутри множества* F, или $f(x) \in L(k+\alpha;\, F \setminus 0)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует совершенное множество $P_\varepsilon \subset F$, $\mathrm{mes}\,(F \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$, такое, что $f(x) \in L(k+\alpha;\, P_\varepsilon)$.

Следующие замечания нетрудно вывести из результатов А. Я. Хинчина (2) и H. Whitney (3).

Замечание 1. Для принадлежности $f(x)$ классу $L(k+\alpha;\, F \setminus 0)$ необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на F существовала конечная k-я асимптотическая производная (по А. Я. Хинчину) $f_F^{[k]}(x) \in L(\alpha;\, F \setminus 0)$.

Замечание 2. Для принадлежности $f(x)$ классу $L(k+\alpha;\, F \setminus 0)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ существовали совершенное множество $P_\varepsilon \subset F$ и функция $\varphi_\varepsilon(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, такие, что

а) $\mathrm{mes}\,(F \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$,

б) $\varphi_\varepsilon(x) = f(x)$ на множестве P_ε,

в) $\varphi_\varepsilon(x) \in L(k+\alpha;\, [a, b])$.

Рассмотрим класс рациональных функций n-го порядка:

$$R_n(x) = P_m(x) / Q_k(x), \quad n = \max\,(m, k),$$

где $P_m(x)$, $Q_k(x)$ — многочлены степени m, k соответственно.

Пусть $R_n(\varphi; P)$ есть наилучшее приближение непрерывной функции $\varphi(x)$ на множестве P рациональными функциями порядка не выше n:

$$R_n(\varphi; P) = \inf_{\{R_n(x)\}} \max_{x \in P} |\varphi(x) - R_n(x)|.$$

Заметим, что нижняя грань берется в классе всех рациональных функций без какого-либо ограничения на расположение полюсов; очевидно, при рассмотрении наилучших приближений функции $\varphi(x)$, непрерывной на совершенном множестве P, класс аппроксимирующих функций по существу ограничивается рациональными дробями, не имеющими полюсов на множестве P. Тем не менее, отсутствие других ограничений на расположение полюсов приводит к тому, что обратные теоремы даже для случая наилучших приближений рациональными дробями непре-

рывных функций на отрезке $[a, b]$ качественно отличаются от соответствующих теорем о наилучших приближениях многочленами — никакая скорость стремления к нулю $R_n(\varphi; [a, b])$ не обеспечивает сколько-нибудь «хороших» дифференциальных свойств $\varphi(x)$ на *всем* отрезке $[a, b]$ (см. ниже, замечание 5).

В то же время для всюду разрывных совершенных множеств P полученные результаты позволяют сформулировать обратную теорему и о наилучших приближениях многочленами, являющуюся нетривиальным аналогом теоремы С. Н. Бернштейна для отрезка [см. ([5]), ([9]), теорема 2].

Наилучшие приближения многочленами, как обычно, будем обозначать через $E_n(\varphi; P)$; очевидно,

$$E_n(\varphi; P) \geqslant R_n(\varphi; P).$$

2. Оценка производной рациональной функции. Доказательство теоремы А. Картана [см., например, ([4]), стр. 31—33] об оценке модуля многочлена снизу содержит в себе доказательство следующего утверждения, которое мы сформулируем в виде леммы:

ЛЕММА 1. *Каковы бы ни были число $\eta > 0$ и комплексные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, можно найти в комплексной плоскости систему кружков с диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_m$, $m \leqslant n$, $\min\limits_k d_k \geqslant \frac{\eta}{n}$, $\sum\limits_1^m d_k \leqslant \eta$, такую, что для всякой точки z, лежащей вне этих кружков,*

$$|z - a_{n_k}| > Ck\frac{\eta}{n},$$

где a_{n_k} перенумерованы в порядке возрастания их расстояний от z, C — абсолютная постоянная.

Из леммы 1 легко получить следующую лемму об оценке логарифмической производной рациональной функции.

ЛЕММА 2. *Пусть $R_n(z)$ — рациональная функция n-го порядка, $\eta > 0$ — произвольно малое число. В комплексной плоскости можно найти систему кружков с диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_m$, $m \leqslant 2n$, $\min\limits_k d_k \geqslant \frac{\eta}{2n}$, $\sum\limits_1^m d_k \leqslant \eta$, такую, что для всех точек z, лежащих вне этих кружков, имеет место оценка:*

$$|R_n'(z)| \leqslant C|R_n(z)|\frac{n \ln n}{\eta}, \tag{1}$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство. Пусть $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$, где $P_n(z)$, $Q_n(z)$ — многочлены степени не выше n. Очевидно, имеем:

$$|R_n'(z)| \leqslant |R_n(z)| \left(\left|\frac{P_n'(z)}{P_n(z)}\right| + \left|\frac{Q_n'(z)}{Q_n(z)}\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant |R_n(z)| \left(\sum \frac{1}{|z - p_k|} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{|z - q_k|}\right),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ — нули $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ соответственно

(кратные нули здесь выписаны столько раз, какова их кратность). По лемме 1, вне множества исключительных кружков имеем, например:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-p_k|} \leqslant C_1 \frac{n}{\eta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant C_2 \frac{n \ln n}{\eta},$$

откуда следует оценка (1).

Возвращаясь к множествам на прямой, сформулируем еще одну лемму, являющуюся непосредственным следствием леммы 2.

ЛЕММА 3. *Пусть* $F \in [a, b]$ — *произвольное множество,* $R_n(x)$ — *рациональная функция n-го порядка,* $\eta > 0$ *произвольно мало. Существует множество* $\Delta = \Delta(R_n(x); \eta)$, $\operatorname{mes} \Delta \leqslant \eta$, *такое, что если*

$$\max_{x \in F \setminus \Delta} |R_n(x)| \leqslant M,$$

то

$$\max_{x \in F \setminus \Delta} |R'_n(x)| \leqslant CM \frac{n \ln n}{\eta},$$

где C — абсолютная постоянная.

Множество Δ *представляет собой систему конечного числа интервалов, длину наименьшего из которых можно считать* $\geqslant \frac{\eta}{2n}$.

3. Рассмотрим снова функцию $\varphi(x)$, определенную и непрерывную на совершенном множестве P.

ЛЕММА 4. *Если* $R_n(\varphi; P) \leqslant \frac{C}{n^{\alpha+\delta}}$, *где* $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ — *произвольно малое число, C не зависит от n, то* $\varphi(x) \in L(\alpha; P \setminus 0)$.

Доказательство. Представим функцию $\varphi(x)$ на множестве P в виде

$$\varphi(x) = R_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [R_{2^{n+1}}(x) - R_{2^n}(x)], \tag{2}$$

где $R_k(x)$ — рациональная функция, осуществляющая наилучшее приближение k-го порядка функции $\varphi(x)$ на множестве P.

Обозначим

$$\overline{R}_n(x) = R_{2^{n+1}}(x) - R_{2^n}(x);$$

очевидно, $\overline{R}_n(x)$ — рациональная функция, порядок которой не выше $3 \cdot 2^n$. Мы имеем:

$$|\overline{R}_n(x)| \leqslant |\varphi(x) - R_{2^{n+1}}(x)| + |\varphi(x) - R_{2^n}(x)| \leqslant \frac{C}{2^{n(\alpha+\delta)}} \tag{3}$$

для $x \in P$.

Зададимся произвольным положительным числом ε. Приведем в соответствие рациональной функции $\overline{R}_n(x)$ множество

$$\Delta_n = \Delta'_n \cup \Delta''_n, \quad \operatorname{mes} \Delta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2n^2},$$

где Δ'_n и Δ''_n определяются следующим образом: множество Δ'_n определяется леммой 3 об оценке производной рациональной функции в применении к $\overline{R}_n(x)$ и $\eta = \frac{\varepsilon}{4n^2}$ и представляет собой сумму конечного чис-

ла интервалов, длина каждого из которых не меньше $\frac{C'\varepsilon}{n^2 2^n}$, где C' — абсолютная постоянная; множество Δ_n'' строится как сумма конечного числа интервалов (не больше $6\cdot 2^n$), содержащих вещественные нули производной $\overline{R}_n'(x)$, причем длину каждого интервала полагаем равной $\frac{C''\varepsilon}{n^2 2^n}$, где C'' — абсолютная постоянная, выбранная так, чтобы $\operatorname{mes}\Delta_n'' = \frac{\varepsilon}{4n^2}$ (заметим, что вещественные нули и полюсы $\overline{R}_n(x)$ войдут в Δ_n').

Обозначим $P_\varepsilon^n = P\setminus\Delta_n$; очевидно, $P_\varepsilon^n \subset P$ (мы можем считать P_ε^n совершенным множеством; точнее, через P_ε^n мы обозначаем совершенную часть полной меры замкнутого множества $P\setminus\Delta_n$). Рассмотрим теперь множество, представляющее собой сумму множества P_ε^n и тех дополнительных к P интервалов (относительно отрезка $[a, b]$), которые не пересекаются с множеством Δ_n; обозначим это множество через $\widetilde{P}_\varepsilon^n$. Очевидно, дополнение $\widetilde{\Delta}_n$ (относительно отрезка $[a, b]$) множества $\widetilde{P}_\varepsilon^n$ представляет собой сумму конечного числа интервалов, длина каждого из которых не меньше $\frac{C\varepsilon}{n^2 2^n}$, $C = \min(C'; C'')$ (так как $\widetilde{\Delta}_n \supset \Delta_n$).

Таким образом, множество $\widetilde{P}_\varepsilon^n$ существенно проще P_ε^n, причем $\widetilde{P}_\varepsilon^n \supset P_\varepsilon^n$.

Для $x\in\widetilde{P}_\varepsilon^n$ справедлива оценка (3):

$$|\overline{R}_n(x)| \leqslant \frac{C}{2^{n(\alpha+\delta)}}; \tag{3'}$$

действительно, точки $x\in[a, b]$, которые не принадлежат P (на P оценка справедлива) и в то же время принадлежат $\widetilde{P}_\varepsilon^n$, расположены в тех дополнительных к P интервалах, на которых функция $|\overline{R}_n(x)|$ монотонна (см. построение множества Δ_n'').

Из леммы 3 для $x\in\widetilde{P}_\varepsilon^n$ следует оценка

$$|\overline{R}_n'(x)| \leqslant C\,\frac{1}{2^{n(\alpha+\delta)}}\,\frac{n^3 2^n}{\varepsilon},$$

так как исключительное множество, где эта оценка может не выполняться, входит в дополнение к $\widetilde{P}_\varepsilon^n$ (см. построение множества Δ_n').

Отсюда получаем:

$$|\overline{R}_n'(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(\alpha-1+\delta_1)}}, \qquad x\in\widetilde{P}_\varepsilon^n, \quad 0<\delta_1<\delta \tag{4}$$

($\delta_1>0$, которое мы здесь сохранили, понадобится при доказательстве леммы 5). Пусть теперь x_1 и x_2 принадлежат P_ε^n. Докажем справедливость следующей оценки:

$$\left|\frac{\overline{R}_n(x_1)-\overline{R}_n(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(\alpha-1)}}, \qquad x_1,\ x_2\in P_\varepsilon^n. \tag{5}$$

При доказательстве могут представиться два случая:

1) отрезок $[x_1, x_2]$ полностью принадлежит множеству $\widetilde{P}_\varepsilon^n$. В этом случае оценка (5) является непосредственным следствием теоремы Лагранжа и оценки (4);

2) отрезок $[x_1, x_2]$ содержит в себе по крайней мере один интервал, дополнительный к множеству $\widetilde{P}_\varepsilon^n$ (так как $x_1, x_2 \in \widetilde{P}_\varepsilon^n$). Тогда имеем:

$$|x_1 - x_2| > \frac{C\varepsilon}{n^2 2^n}$$

и, учитывая (3), получаем:

$$\left|\frac{\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant \frac{2 \max\limits_{x \in P} |\bar{R}_n(x)|}{|x_1 - x_2|} \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(\alpha-1)}}.$$

Рассмотрим, наконец, множество $P_\varepsilon = \bigcap\limits_n P_\varepsilon^n = P \setminus \bigcup\limits_n \Delta_n$. Очевидно, $P_\varepsilon \subset P$, mes $(P \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$, причем для $x_1, x_2 \in P_\varepsilon$ имеем:

$$\left|\frac{R_n(x_1) - R_n(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(\alpha-1)}}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Пусть $h > 0$ — произвольное число, $x_1, x_2 \in P_\varepsilon$, $|x_1 - x_2| \leqslant h$ и m — такое натуральное число, что $\frac{1}{2^{m+1}} \leqslant h < \frac{1}{2^m}$. Имеем:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |R_1(x_1) - R_1(x_2)| + \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)| =$$

$$= |R_1(x_1) - R_1(x_2)| + \sum_{n=0}^{m} |\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)|.$$

Первую сумму оцениваем с помощью неравенства (6):

$$\sum_{n=0}^{m} |\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(\alpha-1)}} |x_1 - x_2| =$$

$$= C(\varepsilon; \alpha) |x_1 - x_2| \frac{1}{2^{(m+1)(\alpha-1)}} \leqslant Ch^\alpha.$$

Вторую сумму оцениваем, используя (3):

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |\bar{R}_n(x_1) - \bar{R}_n(x_2)| \leqslant 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C}{2^{n(\alpha+\delta)}} \leqslant \frac{C(\varepsilon; \alpha)}{2^{m(\alpha+\delta)}} \leqslant Ch^\alpha.$$

Складывая оценки, получаем: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant Ch^\alpha$, а следовательно, и $\omega(h; \varphi; P_\varepsilon) \leqslant Ch^\alpha$, где C не зависит от h, и так как ε произвольно мало, то $\varphi(x) \in L(\alpha; P \setminus 0)$. Лемма доказана.

Замечание 3. С помощью несложных дополнительных построений (см. ниже, доказательство леммы 5) может быть доказано следующее утверждение, усиливающее лемму 4.

ЛЕММА 4'. *В предположениях леммы 4 почти всюду на P справедлива оценка*

$$\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ x+h\in P}}\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h^{\alpha}}\right|\leqslant C(x), \tag{7}$$

причем, каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует совершенное множество $P_\varepsilon\subset P$, $\operatorname{mes}(P\setminus P_\varepsilon)<\varepsilon$, на котором оценка (7) справедлива равномерно.

ЛЕММА 5. *Пусть $R_n(\varphi;P)\leqslant\frac{C}{n^{A+\delta}}$, где $A\geqslant 1$, $\delta>0$ — произвольно малое число, C не зависит от n; тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется совершенное множество $P_\varepsilon\subset P$, $\operatorname{mes}(P\setminus P_\varepsilon)<\varepsilon$, такое, что для $x\in P_\varepsilon$ существует конечная производная $\varphi_P{}'(x)$, причем*

$$R_n(\varphi_P{}';P_\varepsilon)\leqslant\frac{C_1}{n^{A-1+\delta_1}}, \tag{8}$$

где $0<\delta_1<\delta$, C_1 не зависит от n.

Доказательство. Заметим, что требуется доказать существование производной функции $\varphi(x)$ в точках множества P_ε по всему множеству P (а не P_ε); с этой целью несколько продолжим построения предыдущей леммы. Наряду с множествами Δ_n' и Δ_n'' рассмотрим множества Δ_{n1}' и Δ_{n1}'', построенные следующим образом: каждый из интервалов, составляющих множества Δ_n', Δ_n'', заменим концентрическим ему интервалом в три раза большей длины и совокупность этих новых интервалов обозначим через Δ_{n1}', Δ_{n1}'' соответственно. Имеем: $\Delta_{n1}=\Delta_{n1}'\cup\Delta_{n1}''$; очевидно, $\operatorname{mes}\Delta_{n1}\leqslant 3\varepsilon$.

Исходя из множества Δ_{n1}, аналогично предыдущему, строим множества $P_{\varepsilon1}^n$, $P_{\varepsilon1}$; заметим, что

$$P_{\varepsilon1}\subset P,\qquad \operatorname{mes}(P\setminus P_{\varepsilon1})\leqslant 3\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ произвольно мало.

Пусть теперь $x\in P_{\varepsilon1}^n$, $x+h\in P$. Оценим разностное отношение

$$\left|\frac{\overline{R}_n(x+h)-\overline{R}_n(x)}{h}\right|,\qquad x\in P_{\varepsilon1}^n,\quad x+h\in P.$$

При проведении оценки могут представиться два случая:

1) отрезок $[x,x+h]$ полностью принадлежит множеству $\widetilde{P}_\varepsilon^n$; тогда из оценки, соответствующей оценке (4), получаем:

$$\left|\frac{\overline{R}_n(x+h)-\overline{R}_n(x)}{h}\right|=\left|\overline{R}_n'(\xi)\right|\leqslant\frac{C(\varepsilon)}{2^{n(A-1+\delta_1)}},\qquad 0<\delta_1<\delta,$$

так как $\xi\in\widetilde{P}_\varepsilon^n$;

2) отрезок $[x,x+h]$ содержит точки из $\widetilde{\Delta}_n$; так как x и $x+h$ принадлежат P, то в этом случае отрезок $[x,x+h]$ обязан содержать точки из Δ_n. Пусть Δ_n^k — интервал, принадлежащий Δ_n и имеющий непустое пересечение с $[x,x+h]$; длина $\Delta_n^k\geqslant\frac{C\varepsilon}{n^2 2^n}$. Так как точка $x\in P_{\varepsilon1}^n$, то она ле-

жит вне концентрического с Δ_n^k интервала втрое большей длины; следовательно, если обозначить длину Δ_n^k через I_n^k, то будем иметь:

$$|h| \geqslant I_n^k \geqslant \frac{C\varepsilon}{n^2 2^n};$$

отсюда, аналогично соответствующей оценке предыдущей леммы, получаем:

$$\left| \frac{\overline{R}_n(x+h) - \overline{R}_n(x)}{h} \right| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{2^{n(A-1+\delta_1)}}, \qquad 0 < \delta_1 < \delta. \tag{9}$$

Для $x \in P_{\varepsilon 1}^n$, $x + h \in P$ имеем:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{R_1(x+h) - R_1(x)}{h} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{R}_n(x+h) - \overline{R}_n(x)}{h}. \tag{10}$$

Из оценки разностного отношения (9) следует, что ряд (10) сходится равномерно относительно h и, тем самым, возможен почленный переход к пределу под знаком суммы при $h \to 0$. Это доказывает существование производной $\varphi'_P(x)$ для $x \in P_{\varepsilon 1}$, причем

$$\varphi'_P(x) = R'_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [R'_{2^{n+1}}(x) - R'_{2^n}(x)].$$

Используя оценку (4), для $x \in P_{\varepsilon 1}$ получаем:

$$|\varphi'_P(x) - R'_{2^{n+1}}(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\overline{R}'_k(x)| \leqslant \frac{C(\varepsilon; A)}{2^{n(A-1+\delta_1)}},$$

откуда следует:

$$R_n(\varphi_P'; P_{\varepsilon 1}) \leqslant \frac{C}{n^{A-1+\delta_1}},$$

где $n = 2^k$, C не зависит от n.

Пусть теперь n — произвольное натуральное число, $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. Имеем:

$$R_n(\varphi'_P;\ P_{\varepsilon 1}) \leqslant R_{2^k}(\varphi'_P;\ P_{\varepsilon 1}) \leqslant \frac{C}{2^{k(A-1+\delta_1)}} \leqslant \frac{C_1}{n^{A-1+\delta_1}}.$$

Следовательно, оценка (8) справедлива для всех натуральных n. Лемма доказана.

Замечание 4. Из доказательства леммы 5 непосредственно вытекает, что

$$\varphi'_P(x) = \lim_{k \to \infty} R'_{2^k}(x), \tag{11}$$

причем, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, указывается множество

$$P_\varepsilon \subset P, \quad \text{mes}(P \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

на котором сходимость равномерная. Вместо последовательности $\{2^k\}$ может быть взята любая последовательность $\{n_k\}$, для которой $n_{k+1}/n_k \geqslant C$; равенство (11) остается справедливым.

Следствие 1. *Если* $R_n(\varphi; P) \leqslant \frac{C}{n^{1+\delta}}$, *где* $\delta > 0$ *произвольно*

мало, то функция $\varphi(x)$ *дифференцируема почти всюду на множестве* P, *причем*

$$\varphi'(x) = \lim_{k\to\infty} R'_{2^k}(x),$$

где $R_n(x)$ — *рациональная функция наилучшего приближения* $\varphi(x)$ *на* P.

4. Из результатов предыдущего пункта непосредственно вытекает следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $R_n(\varphi; P) \leqslant \frac{C}{n^{A+\delta}}$, *где* $A > 0$, $\delta > 0$ *произвольно мало,* C *не зависит от* n, *то* $\varphi(x) \in L(A;\ P \setminus 0)$. *При* $A \geqslant 1$ *функция* $\varphi(x)$ *дифференцируема почти всюду на множестве* P.

В силу замечания 1, эта теорема может быть сформулирована иначе:

ТЕОРЕМА 1′. *Если* $R_n(\varphi; P) \leqslant \frac{C}{n^{k+\alpha+\delta}}$, *где* $k \geqslant 0$ — *целое,* $0 \leqslant \alpha < 1$, $\delta > 0$ *произвольно мало, то функция* $\varphi(x)$ *почти всюду на* P *имеет конечную* k*-ю асимптотическую производную* $\varphi_P^{[k]}(x)$ $(\varphi_P^{[1]}(x) = \varphi'_P(x))$, *удовлетворяющую условию Липшица порядка* α *внутри* P.

При этом имеем:

$$\varphi_P^{[k]}(x) = \lim_{m\to\infty} R_{2^m}^{(k)}(x),$$

где $R_n(x)$ — *рациональная функция наилучшего приближения* $\varphi(x)$ *на* P.

З а м е ч а н и е 5. Теорема 1 (1′) гарантирует определенные дифференциальные свойства функции $\varphi(x)$ лишь «внутри» множества P. В то же время, как было отмечено выше, никакая скорость стремления к нулю $R_n(\varphi; P)$ не может гарантировать сколько-нибудь «хороших» дифференциальных свойств функции $\varphi(x)$ на всем множестве P, точнее, справедливо следующее утверждение [см. ([7])]:

Каковы бы ни были множество P *(в частности,* $P = [a, b]$*) и положительные функции* $\mu(n)$ *и* $\omega(\delta) \downarrow 0$ *при* $\delta \to 0$, *существует непрерывная функция* $\varphi(x)$, $x \in P$, *такая, что*

$$R_n(\varphi; P) < \mu(n), \quad \overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{\omega(\delta;\ \varphi;\ P)}{\omega(\delta)} > 1.$$

Отсюда и из теоремы 1, в частности для $P = [a, b]$ (если учесть соответствующие результаты о наилучших приближениях многочленами), следует:

а) *существуют функции, непрерывные на* $[a, b]$, *для которых* $E_n(\varphi)$ *стремятся к нулю сколь угодно медленно, в то время как* $R_n(\varphi)$ *стремятся к нулю сколь угодно быстро;*

б) *существуют функции, непрерывные на* $[a, b]$, *для которых порядок стремления к нулю* $R_n(\varphi)$ *не выше, чем порядок стремления к нулю* $E_n(\varphi)$.

З а м е ч а н и е 6. Мы установили, что порядок $\frac{1}{n^{1+\delta}}$ стремления к нулю $R_n(\varphi; P)$ обеспечивает дифференцируемость $\varphi(x)$ почти всюду на P (следствие 1); дополнительная скорость стремления к нулю $R_n(\varphi; P)$

обеспечивает дополнительную гладкость $\varphi(x)$ внутри P'' (теорема 1). Нижеследующие теоремы 2 и 3 устанавливают, как дополнительная скорость стремления к нулю $R_n(\varphi; P)$ влияет на свойства исключительного множества точек недифференцируемости функции $\varphi(x)$.

Пусть $h(r)$ — положительная неубывающая функция положительного аргумента r; мера Хаусдорфа $m(P; h)$ определяется следующим образом: покроем множество P системой интервалов Δ_k так, что длина $\Delta_k = r_k$, $r_k \leqslant \varepsilon$. Нижнюю грань $\sum_k h(r_k)$ по всевозможным покрытиям обозначим через $m_\varepsilon(P; h)$. Тогда

$$m(P; h) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon(P; h).$$

Если $h(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, то получаем меру Хаусдорфа порядка α; в частности, при $\alpha = 1$ получаем линейную меру Лебега; при $h(r) = \frac{1}{\ln \frac{1}{r}}$ имеем логарифмическую меру.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $R_n(\varphi; P) \leqslant \frac{C}{n^{A+\delta}}$, *где* $A \geqslant 1$, $\delta > 0$ *произвольно мало, то мера Хаусдорфа порядка* A^{-1} *множества точек недифференцируемости* $\varphi(x)$ *равна нулю.*

В частности, при $A = 1$ получаем следствие 1 леммы 5.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{R_n(\varphi; P)} = 0$, *то логарифмическая мера множества точек недифференцируемости* $\varphi(x)$ *равна нулю.*

Доказательства теорем 2, 3 аналогичны доказательству теоремы 1 и основываются на соответствующих оценках производных рациональных функций. Заметим, что теоремы 2, 3 содержательны и для множеств P меры нуль.

Поступило
29.X.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ИТТЛ, 1949.

[2] Хинчин А. Я., Исследования о строении измеримых функций, Матем. сборн., 31 : 3 (1924), 377—433.

[3] Whitney H., Differentiable functions defined in closed sets. I, Trans. Amer. Math. Soc., 36, № 2 (1934), 369—387.

[4] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1956.

[5] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVII, 1951.

[6] Долженко Е. П., О дифференцировании комплексных функций, Доклады Ак. наук СССР, 130, № 1 (1960), 17—20.

[7] Гончар А. А., О наилучших приближениях рациональными функциями, Доклады Ак. наук СССР, 100, № 2 (1955), 205—208.

[8] Гончар А. А., О новом квазианалитическом классе функций, Доклады Ак. наук СССР, 111, № 5 (1956), 930—932.

[9] Гончар А. А., Обратные теоремы о наилучших приближениях рациональными функциями на замкнутых множествах, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 1 (1959), 25—28.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 357—366

С. Б. СТЕЧКИН

О НАИЛУЧШИХ ЛАКУНАРНЫХ СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ

В работе строятся и изучаются наилучшие лакунарные системы функций.

Введение

Пусть $\{f_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — конечная или бесконечная система действительных линейно независимых функций, заданная на пространстве E с мерой μ. Пусть, далее, заданы числа $p > 2$ и $M > 0$. Систему $\{f_k(x)\}$ будем называть $S_p(M)$-лакунарной, если $f_k(x) \in L^2(E)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и для любого натурального N и любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x) \right\|_{(p)} \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x) \right\|_{(2)}, \tag{0.1}$$

где, вообще,

$$\| f(x) \|_{(q)} = \left\{ \int_E | f(x) |^q \, dx \right\}^{\frac{1}{q}} \quad (q > 0).$$

В частности, если система $\{f_k(x)\}$ конечна и состоит из n функций, то условие (0.1) можно записать в форме:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \right\|_{(p)} \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \right\|_{(2)} \tag{0.2}$$

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В случае, когда система $\{f_k(x)\}$ является ортонормированной, наше определение совпадает с обычным определением S_p-лакунарных систем [см. ([2]), гл. VII] *.

В этой работе изучается вопрос о том, при каком наименьшем значении $M = M_p^*(n)$ существует система $\{f_k(x)\}$, состоящая из n функций и удовлетворяющая условию (0.2). Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от значения $\mu(E)$ и без ограничения общности можно предположить, что

$$\mu(E) = 1.$$

---

* Точнее, $S_p = \bigcup_{M>0} S_p(M)$.

Мы показываем здесь, что при соблюдении этой нормировки

$$M_p^*(n) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}} \sqrt{n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{0.3}$$

строим систему функций $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, для которой M принимает значение $M_p^*(n)$, и изучаем некоторые свойства этой наилучшей лакунарной системы.

Кроме того, в работе устанавливается, что при $p = 2m$ $(m = 2, 3, \ldots)$ известная система Радемахера является одной из наилучших лакунарных систем среди всевозможных бесконечных систем функций *. Вопрос о том, обладает ли система Радемахера этим свойством для других $p > 2$, остается открытым.

§ 1. Новая лакунарная система функций

Пусть R_n есть n-мерное эвклидово пространство, состоящее из точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, S_n $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1\right)$ — единичная сфера этого пространства и

$$\mu_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{1.1}$$

— площадь сферы S_n. Обозначим через $d\sigma$ элемент площади сферы S_n и на множестве $E_n = S_n$ с мерой $ds = \frac{d\sigma}{\mu_n}$ построим систему n линейно независимых функций

$$\alpha_1(s),\ \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s) \quad (s \in E_n),$$

полагая в точке $s = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $\alpha_k(s) = x_k$. Таким образом,

$$\{\alpha_k(s)\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

есть система направляющих косинусов внешней нормали $n(s)$ к сфере S_n в точке s.

Очевидно, система $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ортогональна. Кроме того, поскольку значение интеграла

$$\int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds$$

не зависит от k и

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds = \int_{E_n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 ds = \int_{E_n} ds = 1,$$

имеем:

$$\|\alpha_k(s)\|_{(2)} = \left\{ \int_{E_n} \alpha_k^2(s)\, ds \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

---

* Этот результат принадлежит Л. В. Тайкову.

Покажем, что система $\{\alpha_k(s)\}$ является $S_p(M)$-лакунарной для любого $p>2$, и подсчитаем для нее соответствующую константу лакунарности M.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $0<p_0<p$. *Тогда для любых чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *справедливо равенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k(s) \right\|_{(p)} = \frac{K_p(n)}{K_{p_0}(n)} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k(s) \right\|_{(p_0)}, \tag{1.2}$$

где

$$K_p(n) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Прежде всего подсчитаем интеграл $\int\limits_{E_n} |x_n|^p\,ds$ при $p>0$, $n\geqslant 2$. Так как

$$ds = \frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{\mu_n |x_n|},$$

то

$$\int\limits_{E_n} |x_n|^p\,ds = \frac{2}{\mu_n} \overset{(n-1)}{\int\limits_{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant 1}} \left\{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right\}^{\frac{p-1}{2}} dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

откуда, по формуле Лиувилля [см. ([3]), § 650], получаем:

$$\int\limits_{E_n} |x_n|^p\,ds = \frac{2}{\mu_n} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^1 r^{n-2}(1-r^2)^{\frac{p-1}{2}}\,dr.$$

Подставляя в это равенство значение μ_n из (1.1) и учитывая, что

$$\int\limits_0^1 r^{n-2}(1-r^2)^{\frac{p-1}{2}}\,dr = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

находим:

$$\int\limits_{E_n} |x_n|^p\,ds = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \quad (p>0,\ n\geqslant 2). \tag{1.4}$$

Подсчитаем теперь величину $\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k(s) \right\|_{(p)}$ при $p>0$, $n\geqslant 2$. Для этого заметим, что если $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k(s) = (a, n(s)).$$

Отсюда видно, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)}^{p} = \int_{E_n} |(a, n(s))|^p ds$$

не зависит от направления вектора a, а зависит лишь от его длины. Следовательно,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)}^{p} = |a|^p \int_{E_n} |(e_n, n(s))|^p ds,$$

где e_n — единичный вектор по оси x_n, т. е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)}^{p} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{p}{2}} \int_{E_n} |x_n|^p ds,$$

откуда, в силу (1.4) имеем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)} = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= K_p(n) \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqslant 2).$$

Сопоставляя эти равенства для p_0 и p, получаем:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)} = \frac{K_p(n)}{K_{p_0}(n)} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p_0)} \quad (n \geqslant 2).$$

Поскольку в случае $n = 1$ результат тривиален, теорема доказана. Так как $K_2(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то, в частности,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(p)} = K_p(n) \sqrt{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k (s) \right\|_{(2)} \quad (p > 0). \tag{1.5}$$

Эта формула показывает, что система $\{\alpha_k(s)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обладает следующим замечательным свойством: *норма любого полинома по системе $\{\alpha_k(s)\}$ в смысле $L^p(E_n)$ $(p > 0)$ однозначно определяется его нормой в метрике $L^2(E_n)$.*

§ 2. Подсчет $M_p^*(n)$

В этом параграфе определяется точное значение константы $M_p^*(n)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы, $p > 0$, $f_k(x) \in L^2(E)$, $\mu(E) = 1$. Если для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \right\|_{(p)} \leqslant M_p(n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \right\|_{(2)} \tag{2.1}$$

для некоторого $p > 2$, *то*

$$M_p(n) \geqslant \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n}. \tag{2.2}$$

Если же для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *справедливо неравенство*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(p)} \geqslant M_p(n) \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(2)} \tag{2.3}$$

для некоторого p, $0 < p < 2$, *то*

$$M_p(n) \leqslant \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|f_k\|_{(2)} = 1, \quad f_j \perp f_k \quad (j \neq k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1. \tag{2.5}$$

В этом случае

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(2)} = 1,$$

и неравенство (2.1) принимает вид:

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(p)} \leqslant M_p(n) \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1, \quad p > 2 \Big),$$

т. е.

$$\max_{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(p)}^{p} \leqslant M_p^p(n).$$

Для оценки $M_p(n)$ снизу замечаем, что

$$\max_{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big\|_{(p)}^{p} = \max_{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1} \int_E \Big| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x) \Big|^p dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{E_n} \int_E \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s) f_k(x) \Big|^p dx\, ds,$$

где E_n и $\alpha_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют тот же смысл, что и в § 1. Последний интеграл легко вычисляется. Меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\int_{E_n} \int_E \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s) f_k(x) \Big|^p dx\, ds = \int_E \int_{E_n} \Big| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \alpha_k(s) \Big|^p ds\, dx =$$

$$= \int_E \Big\{ \sum_{k=1}^{n} f_k^2(x) \Big\}^{\frac{p}{2}} dx \int_{E_n} |(e(x), n(s))|^p ds,$$

где $e(x)$ — единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$. Но последний интеграл уже был вычислен в § 1. Именно,

$$\int_{E_n} |(e(x),\ n(s))|^p\, ds = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} = K_p^p(n).$$

Отсюда получаем:

$$\max_{\sum_{k=1}^n a_k^2=1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right\|_{(p)}^p \geqslant K_p^p(n) \int_E \left\{ \sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx.$$

Но, поскольку $\mu(E) = 1$ и $p > 2$,

$$\int_E \left\{ \sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx \geqslant \left\{ \int_E \sum_{k=1}^n f_k^2(x)\, dx \right\}^{\frac{p}{2}} = n^{\frac{p}{2}}.$$

Таким образом, окончательно,

$$M_p(n) \geqslant \max_{\sum_{k=1}^n a_k^2=1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right\|_{(p)} \geqslant K_p(n)\sqrt{n} = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} \quad (p > 2).$$

Аналогично рассматривается случай $0 < p < 2$. Мы имеем, при выполнении условий (2.5):

$$M_p(n) \leqslant \min_{\sum_{k=1}^n a_k^2=1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right\|_{(p)}.$$

Но

$$\min_{\sum_{k=1}^n a_k^2=1} \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right\|_{(p)}^p \leqslant \int_{E_n} \int_E \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k(s) f_k(x) \right|^p dx\, ds =$$

$$= \int_E \int_{E_n} |(f(x),\ n(s))|^p\, ds\, dx = \int_E \left\{ \sum_{k=1}^n f_k^2(x) \right\}^{\frac{p}{2}} dx\, K_p^p(n) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_E \sum_{k=1}^n f_k^2(x)\, dx \right\}^{\frac{p}{2}} K_p^p(n) = n^{\frac{p}{2}} K_p^p(n) \quad (0 < p < 2),$$

откуда следует:

$$M_p(n) \leqslant K_p(n)\sqrt{n} = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} \quad (0 < p < 2),$$

и теорема доказана.

Сопоставляя теоремы 1 и 2, получаем:

$$M_p^*(n) = \min M_p(n) = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n} \quad (p > 2)$$

и

$$M_p^*(n) = \max M_p(n) = \frac{K_p(n)}{K_2(n)} = K_p(n)\sqrt{n} \quad (0 < p < 2).$$

Экстремальной системой является, в частности, построенная в § 1 система направляющих косинусов нормалей к сфере S_n.

§ 3. Исследование константы $M_p^*(n)$

Исследуем асимптотическое поведение константы

$$M_p^*(n) = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{p}} \sqrt{n} \quad (p > 0), \tag{3.1}$$

когда один или оба параметра p и n неограниченно возрастают.

1) Случай $p \to \infty$. Пусть $p \to \infty$, а $n = n(p) \geqslant 1$ меняется произвольно. Применяя формулу Стирлинга, получаем:

$$\left\{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \approx \sqrt{\frac{p}{2e}},$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \approx \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n-1}{2p}} e^{-\frac{n}{2p}},$$

$$\left\{\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{p}} \approx \left(\frac{n+p}{2}\right)^{\frac{n+p-1}{2p}} e^{-\frac{n+p}{2p}},$$

откуда находим:

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{p}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{-\frac{n}{2p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}.$$

Так как, кроме того,

$$1 \leqslant \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant (1 + p)^{\frac{1}{2p}} \to 1 \quad (p \to \infty),$$

то

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{\frac{np}{n+p}}\left(1 + \frac{p}{n}\right)^{-\frac{n}{2p}} \quad (p \to \infty). \tag{3.2}$$

В частности,

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{\frac{p}{e}} \qquad \text{при } p \to \infty, \quad \frac{p}{n} \to 0,$$

$$M_p^*(n) \approx (1+\alpha)^{-\frac{1+\alpha}{2\alpha}}\sqrt{p} \quad \text{при } p \to \infty, \ \frac{p}{n} \to \alpha > 0,$$

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{n} \qquad \text{при } \frac{p}{n} \to \infty.$$

Например, если n фиксировано, а $p \to \infty$, то

$$M_p^*(n) \approx \sqrt{n}.$$

2) Случай $n \to \infty$, p фиксировано. Применяя формулу Стирлинга, убеждаемся, что

$$M_p^* = \lim_{n\to\infty} M_p^*(n) = \sqrt{2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p>0). \tag{3.3}$$

Отсюда следует:

$$M_p^* \approx \sqrt{\frac{p}{e}} \quad (p\to\infty). \tag{3.4}$$

Кроме того, заметим, что при $m = 2, 3, \ldots$

$$M_{2m}^* = \sqrt{2}\left\{\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^{\frac{1}{2m}} = \sqrt{2}\left\{\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^{\frac{1}{2m}} =$$

$$= \sqrt{2}\left\{\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m}\right\}^{\frac{1}{2m}} = \left\{\frac{(2m)!}{2^m m!}\right\}^{\frac{1}{2m}}, \tag{3.5}$$

а при $p=1$

$$M_1^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{3.6}$$

Формула (3.3) показывает, что для любой бесконечной системы $\{f_k(x)\}$

$$M_p \geqslant \sqrt{2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p>2) \tag{3.7}$$

и, точно так же,

$$M_p \leqslant \sqrt{2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0<p<2). \tag{3.8}$$

§ 4. Приложения

В этом параграфе полученные выше результаты прилагаются к изучению свойств нескольких классических лакунарных систем функций.

1) Система Радемахера. Пусть $\{\varphi_\nu(t)\}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ есть система Радемахера на отрезке $[0, 1]$ и

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 < \infty.$$

Согласно неравенству Хинчина [см. ([1]), § 5.5], если

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(t),$$

то

$$\|f(t)\|_{(2m)} \leqslant \left\{\frac{(2m)!}{2^m m!}\right\}^{\frac{1}{2m}} \|f(t)\|_{(2)} \quad (m=2, 3, \ldots). \tag{4.1}$$

Это неравенство показывает, что система Радемахера является S_p-лакунарной для любого $p > 2$ и что для нее

$$M_{2m} = \left\{\frac{(2m)!}{2^m m!}\right\}^{\frac{1}{2m}} \quad (m = 2, 3, \ldots). \tag{4.2}$$

Сопоставляя эту формулу с формулой (3.5), убеждаемся, что

$$M_{2m} = M^*_{2m}.$$

Таким образом, *для системы Радемахера константа M_{2m} имеет наименьшее возможное значение*; в частности, константа в неравенстве Хинчина не может быть улучшена.

2) Лакунарные тригонометрические системы. Пусть m — натуральное число. Если возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ обладает тем свойством, что всякое натуральное N не более чем одним способом представляется в форме

$$N = h_1 n_{k_1} + h_2 n_{k_2} + \ldots,$$

где $n_{k_1} < n_{k_2} < \ldots$, h_i — натуральные числа и $h_1 + h_2 + \ldots = m$, то будем писать $\{n_k\} \in B_m$. Тригонометрическую систему вида $\{\cos n_k x, \sin n_k x\}$, где $\{n_k\} \in B_m$, будем называть системой класса $\Lambda^{(m)}$. Как хорошо известно [см. (1), § 9.601], если $\{n_k\} \in B_m$,

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

то

$$\| f(x) \|_{(2m)} \leqslant \sqrt{2}\, (m!)^{\frac{1}{2m}} \| f(x) \|_{(2)}, \tag{4.3}$$

где, в соответствии с нашей нормировкой $\mu(E) = 1$,

$$\| f(x) \|_{(p)} = \left\{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(x) |^p \, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1).$$

Таким образом, тригонометрическая система класса $\Lambda^{(m)}$ является S_{2m}-лакунарной, и для нее

$$M_{2m} = \sqrt{2}\, (m!)^{\frac{1}{2m}}. \tag{4.4}$$

Заметим, что

$$\frac{(m!)^{\frac{1}{2m}}}{\left\{\frac{(2m!)}{2^m m!}\right\}^{\frac{1}{2m}}} = \left\{\frac{2^m (m!)^2}{(2m)!}\right\}^{\frac{1}{2m}} < 1 \quad (m = 2, 3, \ldots) \tag{4.5}$$

и, следовательно,

$$M_{2m} < \sqrt{2}\, M^*_{2m}.$$

Отсюда вытекает, что константа в неравенстве (4.3) является точной в смысле порядка и не может быть улучшена больше чем в $\sqrt{2}$ раз ни для какой последовательности $\{n_k\}$. Кроме того, при $m \to \infty$

$$M_{2m} \approx \sqrt{\frac{2m}{e}}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.4), выводим, что *при больших m тригонометрические системы класса $\Lambda^{(m)}$ являются, в смысле значения M_{2m}, близкими к наилучшим.* Исходя из этого, нетрудно построить такую тригонометрическую систему, не зависящую от m, для которой

$$\lim_{m\to\infty} \frac{M_{2m}}{M^*_{2m}} = 1.$$

3) Лакунарные системы показательных функций. До сих пор мы все время рассматривали случай действительных систем и действительных коэффициентов. Покажем на примере, что в комплексном случае результаты должны иметь другой вид. Рассмотрим систему $\{e^{in_kx}\}$, где $\{n_k\} \in B_m$ для некоторого целого $m \geqslant 2$. Тогда, как хорошо известно [см. ([1]), § 9.601], если

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{n_k} \quad (|z| < 1)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

то

$$\|F\|_{(2m)} \leqslant (m!)^{\frac{1}{2m}} \|F\|_{(2)}, \tag{4.6}$$

где

$$\|F\|_{(p)} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{ix})|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1).$$

Таким образом, здесь

$$M_{2m} = (m!)^{\frac{1}{2m}}$$

и, в силу (4.5), эта константа меньше, чем M^*_{2m} в действительном случае. Поэтому при $m = 2, 3, \ldots$ соответствующая наилучшая константа в комплексном случае отлична от M^*_{2m}. Мы не занимались подсчетом этой новой константы.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7. IX. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
[2] Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958.
[3] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, М.—Л., 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 367—384

В. А. ГУСЕВ

ФУНКЦИОНАЛЫ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА И ТЕОРЕМА В. А. МАРКОВА

В работе дается приложение метода функционалов к исследованию точной верхней грани множества производных k-го порядка от алгебраического полинома в каждой точке сегмента [0,1]. Приводится другое доказательство неравенства В. А. Маркова и устанавливаются некоторые новые результаты.

Теорема В. А. Маркова (1) дает оценку производной любого порядка $k \leqslant n$ от алгебраического полинома $P_n(x)$: если

$$\max_{[-1,\,1]} |P_n(x)| = M, \tag{1}$$

то

$$\max_{[-1,\,1]} |P_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{k-1}^2)}{1.3\ldots(2k-1)}\cdot M \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{2}$$

Новые, более простые доказательства этой теоремы были даны С. Н. Бернштейном (2), а также Шеффером и Даффином (3).

Метод функционалов, разработанный Е. В. Вороновской (4) — (6), позволяет исследовать данный вопрос значительно полнее, чем в работах (2) и (3), и значительно короче, чем в работе (1).

Случай $k=1$ был исследован Е. В. Вороновской (7). В настоящей работе результаты, полученные в работе (7) для первой производной, распространяются на производные высших порядков; терминология, принятая в работе (7), здесь полностью сохраняется.

Будем рассматривать сегмент [0,1] (для метода функционалов это удобнее). Тогда формула (2) примет вид:

$$\max_{[0,\,1]} |P_n^{(k)}(x)| \leqslant \frac{2^k n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-\overline{k-1}^2)}{1\cdot 3\ldots(2k-1)} M_{[0,\,1]} = M_{[0,\,1]} T_n^{(k)}(1), \tag{2'}$$

где

$$M_{[0,\,1]} = \max_{[0,\,1]} |P_n(x)|, \quad T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1).$$

Будем истолковывать k-ю производную от $P_n(x)$ в некоторой любой точке ξ как линейный функционал $F_\xi^{(k)}$, заданный конечной последовательностью (или отрезком)

$$(\mu_i^{(k)})_{i=0}^{n} = 0_0,\ 0_1,\ \ldots,\ 0_{k-1},\ k!;\ (k+1)!\,\xi,\ \ldots,\ \frac{n!}{(n-k)!}\,\xi^{n-k}$$
$$(k=1,2,\ldots,n;\ -\infty<\xi<\infty) \tag{3}$$

на множестве полиномов $\{P_n(x)\}$ не выше n-й степени, так что

$$F_\xi^{(k)}(x^i) = 0 \quad \text{при } i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

$$F_\xi^{(k)}(x^i) = \frac{i!}{(i-k)!}\,\xi^{i-k} \quad \text{при } i = k, \ k+1, \ldots, n$$

и

$$F_\xi^{(k)}[P_n(x)] = P_n^{(k)}(\xi).$$

Ввиду конечномерности пространства $\{P_n(x)\}$, для любого ξ существует полином $Q_n(x, \xi)$, называемый экстремальным или обслуживающим, такой, что при

$$\max_{[0,1]} |Q_n(x, \xi)| = 1$$

(приведенный полином) имеет место равенство

$$N_k(\xi) = [Q_n^{(k)}(x, \xi)]_{x=\xi},$$

где $N_k(\xi)$ — норма функционала (3). Имеем:

$$\max_{[0,1]} |P_n^{(k)}(\xi)| \leqslant M_{[0,1]} \cdot N_k(\xi) = M_{[0,1]} \cdot [Q_n^{(k)}(x, \xi)]_{x=\xi} \quad (k = 1, \ 2, \ldots, n).$$

Это неравенство является уточнением неравенства В. А. Маркова (2′). Таким образом, задача состоит в изучении экстремального полинома и нормы функционала (3).

Замечание 1. Обозначив $\mu_i^{(k)} = \mu_{i,0}^{(k)}$, составим таблицу разностей $(\mu_{l,p}^{(k)})$ отрезка (3), где

$$\mu_{l,p}^{(k)} = \mu_{l,p-1}^{(k)} - \mu_{l+1,p-1}^{(k)};$$

мы получим:

$$(\mu_{0j}^{(k)}) = 0_0, \ 0_1, \ldots, \ 0_{k-1}, \ (-1)^k k!, \ (-1)^k (k+1)!\,(1-\xi), \ldots$$

$$\ldots, \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}(1-\xi)^{n-k}.$$

Этот функционал имеет ту же норму [см. ([4])], что и (3). Следовательно,

$$N_k(\xi) = N_k(1-\xi) \quad (k = 1, \ 2, \ldots, n; \ -\infty < \xi < \infty). \tag{4}$$

Замечание 2. При $\xi < 0$ отрезок (3) имеет чередующиеся знаки, следовательно,

$$Q_n(x, \xi) = +T_n(x),$$

если $k \equiv n \pmod 2$, и

$$Q_n(x, \xi) = -T_n(x),$$

если $k + 1 \equiv n \pmod 2$. Ввиду (4), при любом ξ вне $[0,1]$ имеем:

$$Q_n(x, \xi) = \pm T_n(x), \quad N_k(\xi) = |T_n^{(k)}(\xi)| \quad (k = 1, \ 2, \ldots, n).$$

Напомним необходимый и достаточный критерий того, чтобы данный приведенный полином $L_n(x)$ $(\max\limits_{[0,1]} |L_n(x)| = 1)$ с распределением $\overset{\pm}{(\sigma_i)}{}_1^s$

$(0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_s \leqslant 1; \; L_n(\overset{+}{\sigma_i}) = +1, \;\; L_n(\bar{\sigma_i}) = -1)$ являлся экстремальным для любого данного отрезка $(\mu_i)_0^n$. Этот критерий экстремальности состоит в следующем [см. ([7])]: система $n+1$ уравнений с s неизвестными δ_i вида

$$\sum_{i=1}^{s} \delta_i \sigma_i^l = \mu_l \quad (l = 0, 1, \ldots, n) \qquad \text{(V)}$$

удовлетворяет условиям: 1) она совместна и 2) решается в таких знаках, что либо $\operatorname{sgn} \delta_i = L_n(\sigma_i)$, либо $\delta_i = 0$ (однако не все).

ТЕОРЕМА 1. *На сегменте* [0,1] *имеется* $n-k+1$ *чебышевских сегментов* $[\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n; \; i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$, *в точках которых функционал* (3) *обслуживается одним из полиномов* $\pm T_n(x)$. *Границы сегментов*: $\alpha_2^{(k)}, \alpha_3^{(k)}, \ldots, \alpha_{n-k+1}^{(k)}$ — *корни уравнения*

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{R_{n+1}(x)}{x}\right) = 0$$

и $\alpha_1^{(k)} = 0$; $\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \ldots, \beta_{n-k}^{(k)}$ — *корни уравнения*

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{R_{n+1}(x)}{x-1}\right) = 0$$

и $\beta_{n-k+1}^{(k)} = 1$; *здесь* $R_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - \tau_i)$ — *резольвента полинома* $T_n(x)$, *а* $(\tau_i)_0^n$ — *его узлы, т. е. точки отклонения.*

Доказательство. Применим критерий экстремальности к $L_n(x) = \pm T_n(x)$. В этом случае $s = n+1$ и условие 1) отпадает, а условие 2) состоит в том, что $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ имеют чередующиеся знаки. Система (V) имеет вид (для отрезка (3))

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \delta_i \tau_i^l = 0 & (l = 0, 1, \ldots, k-1), \\ \sum_{i=0}^{n} \delta_i \tau_i^l = \dfrac{l!}{(l-k)!}\, \xi^{l-k} & (l = k, k+1, \ldots, n), \end{cases}$$

и решение ее дается формулой

$$\delta_j = \frac{(-1)^{n-j}}{\prod_{i \neq j} |\tau_j - \tau_i|} \cdot \left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{R_{n+1}(x)}{x - \tau_j}\right)\right]_{x=\xi} \quad (j = 0, 1, \ldots, n). \qquad (5)$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие три леммы В. А. Маркова ([1]).

ЛЕММА 1. *Если уравнение* $G_s(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_{s-1}x + a_s = 0$ *не имеет комплексных корней, то при любом* $k \leqslant s$ *имеет место неравенство*

$$[G_s^{(k)}(x)]^2 - G_s^{(k-1)}(x) \cdot G_s^{(k+1)}(x) > 0$$

для всех вещественных x, *исключая корни уравнения* $G_s(x) = 0$ *кратности выше* k.

ЛЕММА 2. *Пусть* $G(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-x_i)\ (x_k\neq x_j)$, z — *корень уравнения* $G^{(k)}(x)=0$ *и*

$$G_l(x)=\frac{G(x)}{x-x_l}\quad (l=1,\ 2,\ldots,\ s);$$

тогда все числа $G_1^{(k)}(z),\ G_2^{(k)}(z),\ldots,\ G_s^{(k)}(z),\ G^{(k+1)}(z)$ *одинаковых знаков.*

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$G(x)=A\cdot\prod_{i=1}^{s}(x-a_i),\quad H(x)=B\cdot\prod_{i=1}^{s}(x-b_i)\quad (A>0,\ B>0)$$

и $b_1<a_1<b_2<a_2<\ldots<b_s<a_s$. *Тогда если* $G^{(k)}(z)=0$, *то*

$$\frac{H^{(k)}(z)}{G^{(k+1)}(z)}>0.$$

Следствие. Из леммы 3 непосредственно следует, что корни уравнений $G^{(k)}(x)=0$ и $H^{(k)}(x)=0$ перемежаются. Последнее утверждение справедливо и тогда, когда степени $G(x)$ и $H(x)$ разнятся на единицу (корни $G(x)$ и $H(x)$ взаимно разделены).

Обозначим через $\Phi_j(x)$ полином

$$\frac{R_{n+1}(x)}{x-\tau_j}\quad (j=0,\ 1,\ldots,\ n)$$

и через $\xi_{j,k}^{(1)},\ \xi_{j,k}^{(2)},\ldots,\ \xi_{j,k}^{(n-k)}$ — корни $\Phi_j^{(k)}(x)$; тогда $\xi_{0,k}^{(i)}=\alpha_{i+1}^{(k)}$ и $\xi_{n,k}^{(i)}=\beta_i^{(k)}$; через $\theta_1^{(k)},\ \theta_2^{(k)},\ldots,\ \theta_{n-k+1}^{(k)}$ обозначим корни $R_{n+1}^{(k)}(x)$. Из результатов Е. В. Вороновской для $k=1$ [см. (7)] следует, что для корней $\Phi_0'(x),\ \Phi_1'(x),\ldots,\ \Phi_n'(x)$ и $R_{n+1}'(x)$ справедливы неравенства:

$$0<\theta_1^{(1)}<\beta_1^{(1)}<\xi_{n-1,1}^{(1)}<\xi_{n-2,1}^{(1)}<\ldots<\xi_{1,1}^{(1)}<\alpha_2^{(1)}<\theta_2^{(1)}<\beta_2^{(1)}<\xi_{n-1,1}^{(2)}<$$
$$<\ldots<\xi_{1,1}^{(2)}<\alpha_3^{(1)}<\theta_3^{(1)}<\beta_3^{(1)}<\ldots<\alpha_{n-1}^{(1)}<\theta_{n-1}^{(1)}<\beta_{n-1}^{(1)}<\xi_{n-1,1}^{(n-1)}<\ldots$$
$$\ldots<\xi_{1,1}^{(n-1)}<\alpha_n^{(1)}<\theta_n^{(1)}<1.$$

Применяя следствие из леммы 3 к каждой паре полиномов $\Phi_0'(x)$, $\Phi_1'(x),\ldots,\ \Phi_n'(x)$, $R_{n+1}'(x)$, убеждаемся, что и для корней производных k-го порядка $\Phi_0^{(k)}(x),\ \Phi_1^{(k)}(x),\ldots,\ \Phi_n^{(k)}(x),\ R_{n+1}^{(k)}(x)$ справедливы аналогичные неравенства:

$$0<\theta_1^{(k)}<\beta_1^{(k)}<\xi_{n-1,k}^{(1)}<\xi_{n-2,k}^{(1)}<\ldots<\xi_{1,k}^{(1)}<\alpha_2^{(k)}<\theta_2^{(k)}<\beta_2^{(k)}<\ldots<$$
$$<\alpha_i^{(k)}<\theta_i^{(k)}<\beta_i^{(k)}<\xi_{n-1,k}^{(i)}<\xi_{n-2,k}^{(i)}<\ldots<\xi_{1,k}^{(i)}<\alpha_{i+1}^{(k)}<\theta_{i+1}^{(k)}<\beta_{i+1}^{(k)}<\ldots$$
$$\ldots<\alpha_{n-k}^{(k)}<\theta_{n-k}^{(k)}<\beta_{n-k}^{(k)}<\xi_{n-1,k}^{(n-k)}<\xi_{n-2,k}^{(n-k)}<\ldots<\xi_{1,k}^{(n-k)}<\alpha_{n-k+1}^{(k)}<$$
$$<\theta_{n-k+1}^{(k)}<1.$$

Таким образом, внутри каждого сегмента вида

$$[\alpha_i^{(k)},\ \beta_i^{(k)}]\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n-1;\quad i=1,\ 2,\ldots,\ n-k+1)$$

находится по одному корню $R_{n+1}^{(k)}(x)$, а каждая из производных $\Phi_0^{(k)}(x)$,

$\Phi_1^{(k)}(x), \ldots, \Phi_n^{(k)}(x)$ своего знака не меняет. Применяя лемму 2 к полиномам $R_{n+1}(x)$, $\Phi_0(x), \ldots, \Phi_n(x)$, приходим к выводу, что все числа $\Phi_0^{(k)}(\theta_i^{(k)})$, $\Phi_1^{(k)}(\theta_i^{(k)}), \ldots, \Phi_n^{(k)}(\theta_i^{(k)})$ одинаковых знаков (плюс при $i = n - k + 1$, $n - k - 1$, $n - k - 3, \ldots$, и минус при $i = n - k$, $n - k - 2$, $n - k - 4, \ldots$). Отсюда следует, что если $\xi \in [\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]$, то все числа $\Phi_0^{(k)}(\xi)$, $\Phi_1^{(k)}(\xi), \ldots, \Phi_n^{(k)}(\xi)$ одинаковых знаков, причем при $\xi = \alpha_i^{(k)}$ $(i = 2, 3, \ldots, n - k + 1)$ только $\Phi_0^{(k)}(\xi) = 0$, а при $\xi = \beta_i^{(k)}(i = 1, 2, \ldots, n - k)$ только $\Phi_n^{(k)}(\xi) = 0$. Обращаясь к формуле (5), мы видим, что $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ имеют чередующиеся знаки, и условие 2) критерия выполнено, если $\xi \in [\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]$. На левых границах $(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1}$ выбывает нагрузка δ_0 узла $\tau_0 = 0$, т. е. $\delta_0 = 0$, а на правых границах $(\beta_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}$ — нагрузка δ_n узла $\tau_n = 1$, т. е. $\delta_n = 0$, следовательно, в этих точках обслуживание функционала $F_\xi^{(k)}$ полиномами $\pm T_n(x)$ заканчивается (или начинается) [см. ([4]), ([5])].

Итак, в сегментах $[\alpha_{n-k+1}^{(k)}, 1]$, $[\alpha_{n-k-1}^{(k)}, \beta_{n-k-1}^{(k)}], \ldots$ функционал $F_\xi^{(k)}$ обслуживаьтся полиномом $+T_n(x)$, а в сегментах $[\alpha_{n-k}^{(k)}, \beta_{n-k}^{(k)}]$, $[\alpha_{n-k-2}^{(k)}, \beta_{n-k-2}^{(k)}], \ldots$ — полиномом $-T_n(x)$. В случае $k = n$ формула (5) имеет вид:

$$\delta_j = \frac{(-1)^{n-j} n!}{\prod\limits_{i \neq j} |\tau_j - \tau_i|} \quad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

и при $\xi \in [0,1]$ функционал $F_\xi^{(n)}$ обслуживается полиномом $+T_n(x)$. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Между чебышевскими сегментами находятся открытые золотаревские интервалы* $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1;\ i = 1, 2, \ldots, n-k)$, *в точках которых функционал* (3) *обслуживается всеми полиномами паспорта* $[n, n, 0]$ * (*обозначим их через* $Q_n(x, \vartheta)$) *и только ими, причем каждым из них в той точке каждого интервала, в которой*

$$\left[\frac{\partial^k R_n(x, \vartheta)}{\partial x^k}\right]_{\substack{x=\xi \\ \vartheta=\vartheta_\xi}} = 0.$$

Здесь $R_n(x, \vartheta) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - \sigma_i)$ — *резольвента полинома* $Q_n(x, \vartheta)$, $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^n$ — *его распределение,* ϑ — *переменный старший коэффициент полиномов* $Q_n(x, \vartheta)$ $(-2^{2n-1} < \vartheta < 2^{2n-1})$.

Доказательство. Пусть $L_n(x)$ — какой-нибудь полином паспорта $[n, n, 0]$, $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^n$ — его распределение и

$$R_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \sigma_i) = \sum_{l=0}^{n} r_l x^l$$

— его резольвента, и пусть ξ_0 — корень уравнения $R_n^{(k)}(x) = 0$. Убедимся, что $L_n(x)$ обслуживает функционал $F_{\xi_0}^{(k)}$. Первые n уравнений си-

* См. ([6]).

стемы (V) в этом случае имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^l = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, k-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^l = \frac{l!}{(l-k)!} \xi_0^{l-k} \quad (l = k, k+1, \ldots, n-1),$$

и решение дается формулой

$$\delta_j = \frac{(-1)^{n-j-1}}{\prod\limits_{i \neq j} |\sigma_j - \sigma_i|} \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{R_n(x)}{x - \sigma_j} \right) \right]_{x=\xi_0} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Условие 2) критерия экстремальности выполнено, так как, согласно лемме 2, все числа

$$\left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{R_n(x)}{x-\sigma_1} \right) \right]_{x=\xi_0}, \quad \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{R_n(x)}{x-\sigma_2} \right) \right]_{x=\xi_0}, \ldots, \left[\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{R_n(x)}{x-\sigma_n} \right) \right]_{x=\xi_0}$$

одинаковых знаков. Условие 1) критерия, требующее, чтобы и

$$\frac{n!}{(n-k)!} \xi_0^{n-k} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^n,$$

т. е. условие совместности всей системы (V), дает равенство:

$$F_\xi^{(k)}[R_n(x)] = R_n^{(k)}(\xi) = \sum_{l=0}^{n} r_l \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^l = \sum_{i=1}^{n} \delta_i R_n(\sigma_i) = 0,$$

т. е. $R_n^{(k)}(\xi) = 0$, что выполнено в точке ξ_0 и ни в какой другой.

Итак, каждый полином $L_n(x)$ обслуживает $F_\xi^{(k)}$ ровно в $n-k$ точках — корнях $R_n^{(k)}(x) = 0$, расположенных по одной в каждом интервале $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$.

Если из множества $\{Q_n(x, \vartheta)\}$ исключить содержащиеся в нем чебышевские трансформации $\pm T_n(\nu x)$ и $\pm T_n(\nu \overline{1-x})$, то оставшиеся полиномы образуют множество, с точностью до множителя тождественное полиномам Е. И. Золотарева ([8]), выраженным им через эллиптические функции; обозначим их через $Z_n(x, \vartheta)$.

Так как на границах $(\beta_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}$ и $(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1}$ функционал $F_\xi^{(k)}$ теряет нагрузку соответственно в узлах $\tau_n = 1\ (\delta_n = 0)$ и $\tau_0 = 0\ (\delta_0 = 0)$, то в $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$ обслуживание передается при движении ξ от $\beta_i^{(k)}$ к $\alpha_{(i+1)}^{(k)}$ (предполагаем, для определенности, что в сегменте $[\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]$ функционал $F_\xi^{(k)}$ обслуживается полиномом $+T_n(x)$) в такой последовательности:

$$+T_n(\nu x) \quad \left(\cos^2 \frac{\pi}{2n} \leqslant \nu < 1\right), \ +Z_n(x, \vartheta) \quad \left(0 < \vartheta < 2^{2n-1} \cos^{2n} \frac{\pi}{2n}\right),$$

$$-T_{n-1}(x), \quad (-1)^{n-1} Z_n(1-x, \vartheta), \quad (-1)^{n-1} T_n(\nu \cdot \overline{1-x})$$

без единого пропуска, согласно теореме о непрерывной деформации [см. ([4]), ([5])], и без повторения до превращения экстремального полинома в $-T_n(x)$ в точке $\alpha_{i+1}^{(k)}$.

Теорема 2 доказана.

Таким образом, если E_T — множество точек чебышевских сегментов, а E_z — его дополнение до $[0,1]$, то для приведенных полиномов имеют место неравенства:

$$|P_n^{(k)}(\xi)| \leqslant \begin{cases} |T_n^{(k)}(\xi)| = N_k(\xi) & \text{при } \xi \in E_T, \\ |Q_n^{(k)}(\xi, \vartheta_\xi)| = N_k(\xi) & \text{при } \xi \in E_z, \end{cases}$$

где зависимость между ϑ_ξ и ξ, согласно теореме 2, задается уравнением

$$\frac{\partial^k R_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi^k} = 0. \qquad (6)$$

Норма $N_k(\xi)$ — непрерывная функция от ξ.

ТЕОРЕМА 3. *В каждом внутреннем чебышевском сегменте норма $N_k(\xi)$ достигает один раз максимума*

$$\max_{[\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]} N_k(\xi) = N_k(\gamma_i^{(k)}),$$

где $(\gamma_i^{(k)})_{i=2}^{n-k}$ — корни уравнения $T_n^{(k+1)}(x) = 0$; в двух крайних чебышевских сегментах норма $N_k(\xi)$ монотонно убывает от границ $[0,1]$ внутрь.

Доказательство. Теорема 3 Е. В. Вороновской ([7]) устанавливает, что корни $(\gamma_i^{(1)})_{i=2}^{n-1}$ полинома $T_n''(x)$ лежат по одному в каждом внутреннем сегменте $[\alpha_i^{(1)}, \beta_i^{(1)}]$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. Применяя следствие из леммы 3 В. А. Маркова к каждой паре полиномов $\Phi_0'(x)$, $T_n''(x)$, $\Phi_n'(x)$, убеждаемся, что при любом $k \leqslant n-2$ корни $(\gamma_i^{(k)})_{i=2}^{n-k}$ полинома $T_n^{(k+1)}(x)$ лежат по одному в каждом внутреннем сегменте $[\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)}]$ $(i = 2, 3, \ldots, n-k)$. Отсюда следует, что в каждом внутреннем чебышевском сегменте норма $N_k(\xi)$ один раз достигает максимума, а в крайних чебышевских сегментах $N_k(\xi)$ монотонно убывает от границ $[0,1]$ внутрь, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $k \equiv n \pmod 2$, то существует чебышевский сегмент

$$[\alpha^{(k)}_{\frac{n-k+2}{2}},\ 1 - \alpha^{(k)}_{\frac{n-k+2}{2}}],$$

содержащий точку $\xi = \gamma^{(k)}_{\frac{n-k+2}{2}} = \frac{1}{2}$, и

$$N_k\left(\frac{1}{2}\right) = \left|T_n^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \begin{cases} 2^k n(n^2 - 1^2)\ldots(n^2 - \overline{k-2}^2) & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ 2^k n^2(n^2 - 2^2)\ldots(n^2 - \overline{k-2}^2) & \text{при } n \text{ четном}. \end{cases}$$

Перейдем к изучению нормы $N_k(\xi)$ на золотаревских интервалах. В каждом интервале $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$ существует одна и только одна точка $\xi_{i,k}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k)$, в которой функционал $F_\xi^{(k)}$ обслуживается одним из полиномов $\pm T_{n-1}(x)$. Точки $(\xi_{i,k}^*)_{i=1}^{n-k}$ находятся как корни урав-

нения $R_n^{(k)}(x)=0$, где $R_n(x)$ — резольвента $T_{n-1}(x)$. Назовем $(\beta_i^{(k)}, \xi_{i,k}^*)$ и $(\xi_{i,k}^*, \alpha_{i+1}^{(k)})$ соответственно левой и правой частью интервала $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$.

ТЕОРЕМА 4. *В интервале* $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$ $(i=1, 2, \ldots, n-k)$ *норма* $N_k(\xi)$ *изменяется монотонно в каждой точке* ξ, *в которой* $(k+1)$*-я производная экстремального полинома не обращается в нуль.*

Доказательство. Положим, для определенности, что при $\xi=\beta_i^{(k)}$ экстремальным полиномом является полином $+T_n(x)$. Тогда в некотором интервале $(\beta_i^{(k)}, A_i^{(k)})$, $\beta_i^{(k)}<\xi<A_i^{(k)}<\xi_{i,k}^*$, экстремальными являются чебышевские трансформации $T_n(\nu x)$ (см. теорему 2). Имеем:

$$N_k(\xi)=T_n^{(k)}(\nu\xi)\cdot\nu^k$$

и

$$N_k'(\xi)=-kT_n^{(k)}(\nu\xi)\cdot\frac{[\beta_i^{(k)}]^k}{\xi^{k+1}};$$

действительно, величина $T_n^{(k)}(\nu\xi)\cdot\nu^k$ должна дать максимум по ν, т. е.

$$T_n^{(k+1)}(\nu\xi)\cdot\xi\nu^k+T_n^{(k)}(\nu\xi)\,k\nu^{k-1}=0,$$

или

$$T_n^{(k+1)}(\nu\xi)\cdot\nu\xi+kT_n^{(k)}(\nu\xi)=0,$$

откуда следует, что $\nu\xi=\text{const}$. Таким образом, $\nu=\frac{\beta_i^{(k)}}{\xi}$, $A_i^{(k)}=\frac{\beta_i^{(k)}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$

$\left(\text{при } \nu=1,\ \xi=\beta_i^{(k)};\ \nu=\cos^2\frac{\pi}{2n},\ \xi=A_i^{(k)}\right)$, $T_n^{(k)}(\nu\xi)>0$, $N_k'(\xi)<0$ и

норма $N_k(\xi)$ в $(\beta_i^{(k)}, A_i^{(k)})$ убывает. Для остальных чебышевских трансформаций монотонность нормы доказывается аналогично.

Итак, остается доказать теорему для той части интервала $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$, в которой экстремальными являются полиномы $Z_n(x,\vartheta)$. Пусть $A_i^{(k)}<\xi_1<\xi_{i,k}^*$; тогда $Z_n(x,\vartheta_{\xi_1})$ обслуживает $F_{\xi_1}^{(k)}$,

$$N_k(\xi_1)=[Z_n^{(k)}(x,\vartheta_{\xi_1})]_{x=\xi_1},$$

$$[R_n^{(k)}(x,\vartheta_{\xi_1})]_{x=\xi_1}=0,$$

где $R_n(x,\vartheta_{\xi_1})$ — резольвента полинома $Z_n(x,\vartheta_{\xi_1})$ (см. теорему 2). Имеем:

$$N_k'(\xi)=\frac{\partial^{k+1}Z_n(\xi,\vartheta)}{\partial\xi^{k+1}}+\frac{\partial^{k+1}Z_n(\xi,\vartheta)}{\partial\xi^k\partial\vartheta}\frac{d\vartheta}{d\xi}.$$

Используя основную зависимость, связывающую полином Золотарева с его резольвентой,

$$\frac{\partial Z_n(\xi,\vartheta)}{\partial\vartheta}=R_n(\xi,\vartheta)$$

[см. ([4]), ([6])], получаем:

$$\frac{\partial^{k+1}Z_n(\xi,\vartheta)}{\partial\xi^k\partial\vartheta}=\frac{\partial^kR_n(\xi,\vartheta)}{\partial\xi^k}.$$

Следовательно,

$$N'_k(\xi_1) = \left(\frac{\partial^{k+1} Z_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi^{k+1}}\right)_{\substack{\xi=\xi_1 \\ \vartheta=\vartheta_{\xi_1}=\vartheta_1}} + \left(\frac{\partial^k R_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi^k} \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_1 \\ \vartheta=\vartheta_{\xi_1}=\vartheta_1}} = Z_n^{(k+1)}(\xi_1 \vartheta_1).$$

Теорема 4 доказана.

Замечание. Норма $N_k(\xi)$ имеет непрерывную производную $N'_k(\xi)$. Действительно,

$$\lim_{\xi \to \beta_i^{(k)} - 0} N'_k(\xi) = N'_k(\beta_i^{(k)} - 0) = T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})$$

и

$$\lim_{\xi \to \beta_i^{(k)} + 0} N'_k(\xi) = N'_k(\beta_i^{(k)} + 0) = -\frac{k}{\beta_i^{(k)}} T_n^{(k)}(\beta_i^{(k)}).$$

Так как

$$A_i^{(k)} = \frac{\beta_i^{(k)}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}}$$

и

$$Z_n\left(x, 2^{2n-1} \cos^{2n} \frac{\pi}{2n}\right) = T_n\left(x \cos^2 \frac{\pi}{2n}\right),$$

то

$$\lim_{\xi \to A_i^{(k)} + 0} N'_k(\xi) = N'_k(A_i^{(k)} + 0) = \cos^{2(k+1)} \frac{\pi}{2n} \cdot T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})$$

и

$$\lim_{\xi \to A_i^{(k)} - 0} N'_k(\xi) = N'_k(A_i^{(k)} - 0) = -kT_n^{(k)}(\beta_i^{(k)}) \frac{\cos^{2(k+1)} \frac{\pi}{2n}}{\beta_i^{(k)}}.$$

Используя зависимость

$$T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})\, \beta_i^{(k)} + kT_n^{(k)}(\beta_i^{(k)}) = 0$$

(см. теорему 4), убеждаемся, что

$$N'_k(\beta_i^{(k)} - 0) = N'_k(\beta_i^{(k)} + 0)$$

$$N'_k(A_i^{(k)} - 0) = N'_k(A_i^{(k)} + 0).$$

Из симметрии нормы (см. формулу (4)) выводим непрерывность $N'_k(\xi)$ в точках $(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1}$ и $(1 - A_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}$. В остальных точках непрерывность $N'_k(\xi)$ очевидна.

Найдем выражение для второй производной от нормы $N''_k(\xi)$ в интервале $(A_i^{(k)}, \xi^*_{i,k})$. Так как

$$N'_k(\xi) = Z_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta_\xi),$$

то

$$N_k''(\xi) = \frac{\partial Z_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial Z_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta_\xi)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi} =$$

$$= Z_n^{(k+2)}(\xi, \vartheta_\xi) + R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta_\xi) \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi}.$$

Продифференцируем по ξ уравнение (6):

$$R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta) + \frac{\partial R_n^{(k)}(\xi, \vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi} = 0,$$

откуда получаем:

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = -\frac{R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta)}{\dfrac{\partial R_n^{(k)}(\xi, \vartheta)}{\partial \vartheta}}.$$

Найдем $\dfrac{\partial R_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta}$. Так как

$$R_n(x, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} [x - \sigma_i(\vartheta)],$$

то

$$\frac{\partial R_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d\sigma_i}{d\vartheta} \cdot R_i(x, \vartheta),$$

где

$$R_i(x, \vartheta) = \frac{R_n(x, \vartheta)}{x - \sigma_i}.$$

Кроме того, между полиномом $Z_n(x, \vartheta)$ и его резольвентой имеется еще такая зависимость [см. ([6])]:

$$n\vartheta(x - \lambda) R_n(x, \vartheta) = x(x-1) Z_n'(x, \vartheta), \tag{7}$$

где λ — корень $Z_n'(x, \vartheta)$, лежащий вне $[0,1]$.

Продифференцировав равенство (7) по ϑ, получим:

$$n(x-\lambda) R_n(x, \vartheta) - n\vartheta R_n(x, \vartheta)\frac{d\lambda}{d\vartheta} + n\vartheta(x - \lambda)\frac{\partial R_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} =$$

$$= x(x-1)\frac{\partial Z_n'(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = x(x-1) R_n'(x, \vartheta) = x(x-1)\sum_{i=1}^{n} R_i(x, \vartheta).$$

Подставив в крайние части последнего равенства $x = \sigma_i$, найдем:

$$n\vartheta(\sigma_i - \lambda)\frac{\partial R_n(\sigma_i, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \sigma_i(\sigma_i - 1) R_i(\sigma_i, \vartheta).$$

Но

$$\frac{\partial R_n(\sigma_i, \vartheta)}{\partial \vartheta} = -\frac{d\sigma_i}{d\vartheta} \cdot R_i(\sigma_i, \vartheta),$$

поэтому

$$\frac{d\sigma_i}{d\vartheta} = \frac{\sigma_i(1 - \sigma_i)}{n\vartheta(\sigma_i - \lambda)}$$

и

$$\frac{\partial R_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i(\sigma_i - 1)}{n\vartheta(\sigma_i - \lambda)} R_i(x, \vartheta).$$

Итак,

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = \frac{n\vartheta R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i(1 - \sigma_i)}{\sigma_i - \lambda} R_i^{(k)}(\xi, \vartheta)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(x, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_i(\sigma_i - 1)}{\sigma_i - \lambda} R_i(x, \vartheta)$$

и

$$\psi(x, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i(x, \vartheta)}{\sigma_i - \lambda};$$

тогда имеем:

$$\varphi(x, \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i - 1 + \lambda) R_i(x, \vartheta) + \lambda(\lambda - 1)\psi(x, \vartheta) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (x - \sigma_i) R_i(x, \vartheta) + (x - 1 + \lambda) \sum_{i=1}^{n} R_i(x, \vartheta) + \lambda(\lambda - 1)\psi(x, \vartheta) =$$

$$= -n R_n(x, \vartheta) + (x - 1 + \lambda) R_n'(x, \vartheta) + \lambda(\lambda - 1)\psi(x, \vartheta). \tag{8}$$

Положим

$$\chi(x, \vartheta) = (x - \lambda)\psi(x, \vartheta);$$

тогда

$$\chi(\sigma_i, \vartheta) = (\sigma_i - \lambda)\psi(\sigma_i, \vartheta) = R_i(\sigma_i, \vartheta), \quad \chi(\lambda, \vartheta) = 0,$$

откуда ясно, что

$$\chi(x, \vartheta) = (x - \lambda)\psi(x, \vartheta) = R_n'(x, \vartheta) - \frac{R_n'(\lambda, \vartheta)}{R_n(\lambda, \vartheta)} R_n(x, \vartheta). \tag{9}$$

ТЕОРЕМА 5. *В каждом золотаревском интервале норма* $N_k(\xi)$ *достигает один раз минимума в точке* $\xi = \xi_{0,i}^{(k)}$, *в которой* $Z_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta_\xi) = 0$, *причем*

$$N_k(\xi_{0,i}^{(k)}) = \min_{(\beta_i^{(k)},\, \alpha_{i+1}^{(k)})} N_k(\xi) \leqslant |T_{n-1}^{(k)}(\overset{*}{\xi}_{i,k})|$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n - k;\ k = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Если $\beta_i^{(k)} > \frac{1}{2}$, *то* $\beta_i^{(k)} < \xi_{0,i}^{(k)} < \overset{*}{\xi}_{i,k}$; *если* $\alpha_{i+1}^{(k)} < \frac{1}{2}$, *то* $\overset{*}{\xi}_{i,k} < \xi_{0,i}^{(k)} < \alpha_{i+1}^{(k)}$.

Доказательство. Пусть $Z_n^{(k+1)}(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) = 0$, где $\beta_i^{(k)} < \xi_0 < \overset{*}{\xi}_{i,k}$. Продифференцируем по x равенство (7) $k + 1$ раз, после чего подставим в него $x = \xi_0$, $\vartheta = \vartheta_{\xi_0} = \vartheta_0$; тогда, учитывая, что $R_n^{(k)}(\xi_0, \vartheta_0) = 0$ и $Z_n^{(k+1)}(\xi_0, \vartheta_0) = 0$, получим:

$$n\vartheta_0(\xi_0 - \lambda) R_n^{(k+1)}(\xi_0, \vartheta_0) = \xi_0(\xi_0 - 1) Z_n^{(k)}(\xi_0, \vartheta_0) + (k + 1)k Z_n^{(k)}(\xi_0, \vartheta_0). \tag{10}$$

Продифференцируем теперь (8) и (9) по x k раз, после чего подставим $x=\xi_0$ и $\vartheta=\vartheta_0$; тогда получим:

$$\chi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)=(\xi_0-\lambda)\,\psi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)+k\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)=R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0),$$

откуда следует:

$$\psi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)=\frac{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)-k\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{\xi_0-\lambda}$$

и, значит,

$$\varphi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)=(\xi_0-1+\lambda)\,R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)+$$
$$+\lambda(\lambda-1)\frac{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)-k\,\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{\xi_0-\lambda}=$$
$$=\frac{\xi_0(\xi_0-1)}{\xi_0-\lambda}R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)-\frac{k\lambda(\lambda-1)}{\xi_0-\lambda}\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0). \qquad (11)$$

Так как

$$N_k''(\xi_0)=Z_n^{(k+2)}(\xi_0,\vartheta_0)+R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}=$$
$$=Z_n^{(k+2)}(\xi_0,\vartheta_0)-\frac{n\vartheta_0R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{\dfrac{\varphi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}},$$

то, используя (10) и (11), находим:

$$N_k''(\xi_0)=\frac{kZ_n^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)}{\lambda-\xi_0}\,\frac{k+1+\lambda(\lambda-1)\dfrac{\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}\cdot\dfrac{Z_n^{(k+2)}(\xi_0,\vartheta_0)}{Z_n^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)}}{\dfrac{\xi_0(\xi_0-1)}{\xi_0-\lambda}-\dfrac{k\lambda(\lambda-1)}{\xi_0-\lambda}\cdot\dfrac{\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}}. \qquad (12)$$

Полученная формула аналогична формуле (118) работы В. А. Маркова ([1]). Величина

$$\frac{\xi_0(\xi_0-1)}{\xi_0-\lambda}-\frac{k\lambda(\lambda-1)}{\xi_0-\lambda}\cdot\frac{\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}=\frac{\varphi^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}=-\frac{n\vartheta_0}{\left(\dfrac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_0}}>0,$$

так как при возрастании ξ от $A_i^{(k)}$ до $\overset{*}{\xi}_{i,k}$ ϑ монотонно убывает и $\frac{d\vartheta}{d\xi}<0$; далее,

$$\frac{Z_n^{(k+2)}(\xi_0,\vartheta_0)}{Z_n^{(k)}(\xi_0,\theta_0)}<0,$$

по лемме 1 В. А. Маркова, и

$$\frac{\psi^{(k-1)}(\xi_0,\vartheta_0)}{R_n^{(k+1)}(\xi_0,\vartheta_0)}<0,$$

по лемме 3 В. А. Маркова. Итак, $N_k''(\xi_0)$ и $Z_n^{(k)}(\xi_0,\vartheta_0)=N_k(\xi_0)$ имеют

одинаковые знаки. Следовательно, если верно допущение

$$Z_n^{(k+1)}(\xi_0, \vartheta_0) = 0,$$

то

$$N_k(\xi_0) = \min_{(\beta_i^{(k)},\, \alpha_{i+1}^{(k)})} N_k(\xi),$$

причем таких точек ξ_0 не может быть больше одной в каждом золотаревском интервале. Докажем, что существует одна такая точка в каждом $(\beta_i^{(k)}, \alpha_{i+1}^{(k)})$. Мы имеем:

$$(n-1)\, 2^{2n-3} R_n(x) = x(x-1)\, T'_{n-1}(x),$$

где $R_n(x)$ — резольвента $T_{n-1}(x)$. Продифференцировав k раз последнее равенство, получим:

$$(n-1)\, 2^{2n-3} R_n^{(k)}(x) = x(x-1)\, T_{n-1}^{(k+1)}(x) + k(2x-1)\, T_{n-1}^{(k)}(x) +$$
$$+ k(k+1)\, T_{n-1}^{(k-1)}(x).$$

Кроме того,

$$x(1-x)\, T_{n-1}^{(k+1)}(x) - (2k-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) T_{n-1}^{(k)}(x) +$$
$$+ (\overline{n-1}^2 - \overline{k-1}^2)\, T_{n-1}^{(k-1)}(x) = 0.$$

Подставляя в последние два равенства $x = \xi^*_{i,k}$ и учитывая при этом, что $R_n^{(k)}(\xi^*_{i,k}) = 0$, а затем исключая $T_{n-1}^{(k-1)}(\xi^*_{i,k})$, найдем:

$$\xi^*_{i,k}(1-\xi^*_{i,k})\,[\overline{n-1}^2 - \overline{k-1}^2 + k(k+1)]\, T_{n-1}^{(k+1)}(\xi^*_{i,k}) =$$
$$= k(2\xi^*_{i,k} - 1)\left[\overline{n-1}^2 - \overline{k-1}^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)(k+1)\right] T_{n-1}^{(k)}(\xi^*_{i,k}).$$

Если в этом равенстве $\xi^*_{i,k} > \frac{1}{2}$, т. е. $\beta_i^{(k)} > \frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{sgn} T_{n-1}^{(k+1)}(\xi^*_{i,k}) = \operatorname{sgn} T_{n-1}^{(k)}(\xi^*_{i,k})$$

и $N'_k(\xi^*_{i,k}) > 0$. С другой стороны,

$$N'_k(A_i^{(k)}) = -k\,|T_n^{(k)}(\beta_i^{(k)})|\,\frac{\cos^{2(k+1)}\frac{\pi}{2n}}{\beta_i^{(k)}} < 0.$$

Следовательно, в интервале $(A_i^{(k)}, \xi^*_{i,k})$ есть одна и только одна точка $\xi_{0,i}^{(k)}$ такая, что

$$N'_k(\xi_{0,i}^{(k)}) = 0.$$

На основании (4), эта точка $\xi_{0,i}^{(k)}$ лежит в интервале $(\xi^*_{i,k}, \alpha_{i+1}^{(k)})$, если $\alpha_{i+1}^{(k)} < \frac{1}{2}$. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Если $k+1 \equiv n \pmod 2$, то имеется золотаревский интервал $(\beta^{(k)}_{\frac{n-k+1}{2}},\ 1 - \beta^{(k)}_{\frac{n-k+1}{2}})$, содержащий точку

$$\xi = \xi^{(k)}_{0,\frac{n-k+1}{2}} = \xi^*_{\frac{n-k+1}{2},\,k} = \frac{1}{2},$$

и

$$N_k\left(\frac{1}{2}\right)=\left|T_{n-1}^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|=$$

$$=\begin{cases}2^k(n-1)(\overline{n-1}^2-1^2)\ldots(\overline{n-1}^2-\overline{k-2}^2) & \text{при } n \text{ четном},\\ 2^k(n-1)^2(\overline{n-1}^2-2^2)\ldots(\overline{n-1}^2-\overline{k-2}^2) & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases}$$

Замечание 2. Так как $T_n(x)=\cos n\theta$, где $\theta=\arccos(2x-1)$, то

$$T'_n(x)=-n\sin n\theta\frac{d\theta}{dx}=\frac{2n\sin n\theta}{\sin\theta}=4n\,[\cos(n-1)\theta+\cos(n-3)\theta+\ldots]$$

и

$$T_n^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{n-k}a_{k,i}\cos i\theta,$$

где $a_{k,i}\geqslant 0$ [см. ([2])]. Отсюда следует, что

$$\max_{[0,1]}N_k(\xi)=T_n^{(k)}(1),$$

и мы получаем неравенство В. А. Маркова (2′).

ТЕОРЕМА 6. *Все точки разрыва второй производной от нормы $N''_k(\xi)$ суть*

$$(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1},\quad (\beta_i^{(k)})_{i=1}^{n-k},\quad (A_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}\ \textit{и}\ (1-A_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$N''_k(\beta_i^{(k)}-0)=T_n^{(k+2)}(\beta_i^{(k)}),$$

$$N''_k(\beta_i^{(k)}+0)=\frac{k(k+1)}{[\beta_i^{(k)}]^2}T_n^{(k)}(\beta_i^{(k)})=-\frac{k+1}{\beta_i^{(k)}}T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})$$

и, следовательно,

$$N''_k(\beta_i^{(k)}-0)-N''_k(\beta_i^{(k)}+0)=T_n^{(k+2)}(\beta_i^{(k)})+\frac{k+1}{\beta_i^{(k)}}T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})=$$

$$=\frac{n2^{2n-1}}{\beta_i^{(k)}}\cdot\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})\neq 0,\quad (n2^{2n-1}\Phi_n(x)=xT'_n(x)).$$

Так как $\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})>0$ при $i=n-k,\ n-k-2,\ n-k-4,\ldots$, а $\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})<0$ при $i=n-k-1,\ n-k-3,\ldots$, то, учитывая, что экстремальными полиномами в сегментах $[\alpha_{n-k+1}^{(k)},1]$, $[\alpha_{n-k-1}^{(k)},\beta_{n-k-1}^{(k)}],\ldots$ являются полиномы $+T_n(x)$, а в сегментах $[\alpha_{n-k}^{(k)},\beta_{n-k}^{(k)}]$, $[\alpha_{n-k-2}^{(k)},\beta_{n-k-2}^{(k)}],\ldots$ — полиномы $-T_n(x)$ (см. теорему 1), имеем:

$$N''_k(\beta_i^{(k)}+0)>N''_k(\beta_i^{(k)}-0).$$

Используя формулу (4), получаем для точек $(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1}$:

$$N''_k(\alpha_i^{(k)}+0)<N''_k(\alpha_i^{(k)}-0).$$

Далее,

$$N''_k(A_i^{(k)}-0)=\frac{k(k+1)}{[\beta_i^{(k)}]^2}T_n^{(k)}(\beta_i^{(k)})\cos^{2(k+2)}\frac{\pi}{2n}=-\frac{k+1}{\beta_i^{(k)}}T_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})\cos^{2(k+2)}\frac{\pi}{2n}$$

и

$$N_k''(A_i^{(k)} - 0) = \left[Z_n^{(k+2)}(\xi, \vartheta) + R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta) \cdot \frac{d\vartheta}{d\xi}\right]_{\substack{\xi = A_i^{(k)} \\ \vartheta = 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}}} =$$

$$= \cos^{2(k+2)}\frac{\pi}{2n} \cdot T_n^{(k+2)}(\beta_i^{(k)}) + \frac{\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})}{\cos^{2(n-k-1)}\frac{\pi}{2n}} \cdot \left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi = A_i^{(k)}},$$

так как $A_i^{(k)} = \dfrac{\beta_i^{(k)}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$ и

$$R_n\left(x,\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(x - \frac{\tau_{i-1}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{\Phi_n\left(x\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}}$$

— резольвента полинома

$$Z_n\left(x,\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right) = T_n\left(x\cos^2\frac{\pi}{2n}\right).$$

Следовательно,

$$N_k''(A_i^{(k)} + 0) - N_k''(A_i^{(k)} - 0) =$$

$$= \cos^{2(k+2)}\frac{\pi}{2n} \cdot \Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)}) \left[\frac{n2^{2n-1}}{\beta_i^{(k)}} + \frac{\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi = A_i^{(k)}}}{\cos^{2(n+1)}\frac{\pi}{2n}}\right], \tag{13}$$

где

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi = A_i^{(k)}} = -n\left[\frac{\vartheta R_n^{(k+1)}(\xi, \vartheta)}{\varphi^{(k)}(\xi, \vartheta)}\right]_{\substack{\xi = A_i^{(k)} \\ \vartheta = 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}}} =$$

$$= -\frac{n2^{2n-1}\cos^{2(k+1)}\frac{\pi}{2n} \cdot \Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})}{\varphi^{(k)}\left(A_i^{(k)},\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

Вычислим $\varphi^{(k)}\left(A_i^{(k)},\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right)$. Так как

$$\varphi\left(x,\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{n\Phi_n\left(x\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}} + \frac{x\,\Phi_n'\left(x\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos^{2(n-1)}\frac{\pi}{2n}} - \frac{R_n\left(x,\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right)}{x-1}$$

(см. формулу (8)), то, дифференцируя это равенство k раз и подставляя $x = A_i^{(k)}$, получим:

$$\varphi^{(k)}\left(A_i^{(k)},\ 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\beta_i^{(k)}\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})}{\cos^{2(n-k-1)}\frac{\pi}{2n}} - \Delta_n^{(k)}(A_i^{(k)}), \tag{14}$$

где

$$\Delta_n^{(k)}(A_i^{(k)}) = \left\{\frac{d}{dx^k}\left[\frac{R_n\left(x,\, 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}\right)}{x-1}\right]\right\}_{x=A_i^{(k)}}.$$

Подставим в формулу (13) выражение для $\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi=A_i^{(k)}}$; тогда, используя (14), после некоторых преобразований найдем:

$$N_k''(A_i^{(k)}+0) - N_k''(A_i^{(k)}-0) =$$
$$=\left[\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\cos^{2(n-k-1)}\frac{\pi}{2n}}\cdot\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)}) + \frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\beta_i^{(k)}}\cdot\Delta_n^{(k)}(A_i^{(k)})\right]\left(\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\xi=A_i^{(k)}} \neq 0,$$

так как $\Phi_n^{(k+1)}(\beta_i^{(k)})$ и $\Delta_n^{(k)}(A_i^{(k)})$, по лемме 2 В. А. Маркова, всегда одинаковых знаков.

Так же как в случае точек $(\beta_i^{(k)})_{i=1}^{n-k}$ и $(\alpha_i^{(k)})_{i=2}^{n-k+1}$ убеждаемся в том, что

$$N_k''(A_i^{(k)}+0) > N_k''(A_i^{(k)}-0)$$

и

$$N_k''(1-A_i^{(k)}+0) < N_k''(1-A_i^{(k)}-0).$$

В остальных точках норма $N_k''(\xi)$, очевидно, непрерывна.

ТЕОРЕМА 7. *Сумма длин чебышевских сегментов, или мера множества* E_T, *равна* $\frac{k}{n}$.

Доказательство. Имеем:

$$\operatorname{mes} E_T = \sum_{i=1}^{n-k+1}(\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}) = 1 + \sum_{i=1}^{n-k}\beta_i^{(k)} - \sum_{i=2}^{n-k+1}\alpha_i^{(k)}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(k)}(x) &= A_k\left(x^{n-k} - \sum_{i=2}^{n-k+1}\alpha_i^{(k)}\cdot x^{n-k-1} + \ldots\right),\\ \Phi_n^{(k)}(x) &= B_k\left(x^{n-k} - \sum_{i=1}^{n-k}\beta_i^{(k)}\cdot x^{n-k-1} + \ldots\right).\end{aligned} \qquad (15)$$

С другой стороны, так как

$$\Phi_j(x) = x^n - \left(\frac{n+1}{2} - \tau_j\right)x^{n-1} + \ldots,$$

имеем:

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} - \frac{n+1}{2}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1} + \ldots,\\ \Phi_n^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} - \frac{n-1}{2}\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1} + \ldots.\end{aligned} \qquad (16)$$

Сравнивая разложения (15) и (16), находим, что

$$\sum_{i=2}^{n-k+1}\alpha_i^{(k)} = \frac{n+1}{2}\left(1-\frac{k}{n}\right), \quad \sum_{i=1}^{n-k}\beta_i^{(k)} = \frac{n-1}{2}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

откуда получаем:

$$\operatorname{mes} E_T = \frac{k}{n}.$$

Из теоремы 7 следует, что при k фиксированном и $n \to \infty$ все чебышевские сегменты стягиваются в точки, т. е. полиномы Золотарева вытесняют полиномы $T_n(x)$ с $[0, 1]$. Наоборот, при $n-k$ фиксированном и $n \to \infty$ полиномы $T_n(x)$ вытесняют полиномы Золотарева.

В заключение сравним точную мажоранту $N_k(\xi)$ с мажорантой С. Н. Бернштейна [9]:

$$|P_n^{(k)}(\xi)| < \left[\frac{k}{\xi(1-\xi)}\right]^{\frac{k}{2}} \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1) = B_k(\xi) \qquad (17)$$

и мажорантой Шеффера и Даффина [3]:

$$|P_n^{(k)}(\xi)| \leqslant |T_n^{(k)}(\xi) + iS_n^{(k)}(\xi)| \quad (S_n(x) = \sin n \arccos(2x-1)) \qquad (18)$$

(оба неравенства написаны для приведенных полиномов на $[0, 1]$; для $k=1$ неравенства совпадают).

При $k = 2, 3, \ldots, n$ мажоранта (17) совсем не касается точной мажоранты $N_k(\xi)$ [см. [9], стр. 27].

Неравенство (17) для больших n было уточнено С. Н. Бернштейном [10], который получил соотношение

$$N_k(\xi) \sim \frac{n^k}{[\xi(1-\xi)]^{\frac{k}{2}}} \quad \text{при } \xi \in (0, 1);$$

из этого соотношения следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_k(\xi)}{N_k(\xi)} = k^{\frac{k}{2}} \quad \text{при } \xi \in (0, 1).$$

Лучшее приближение к $N_k(\xi)$ дает мажоранта (18), имеющая точки касания с $N_k(\xi)$ в каждом чебышевском сегменте при $\xi = \vartheta_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$, где $(\vartheta_i^{(k)})_{i=1}^{n-k+1}$ — корни уравнения $S_n^{(k)}(x) = 0$.

Например, если $k+1 \equiv n \pmod 2$, то при фиксированном k и больших n

$$\left|T_n^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) + iS_n^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| - N_k\left(\frac{1}{2}\right) \sim k2^k n^{k-1}$$

и

$$\frac{\left|T_n^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) + iS_n^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{N_k\left(\frac{1}{2}\right)} \sim 1.$$

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность Е. В. Вороновской за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Ленинградский институт
авиаприборостроения

Поступило
16.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб., 1892.

2 Бернштейн С. Н., О теореме В. А. Маркова, Собр. соч., т. II, Изд. АН СССР, М., 1954.

[3] Schaeffer A. C. and Duffin R. J., On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff for derivatives of polynomials, Bull. Amer. Math. Soc., 44, № 4 (1938), 289—297.

[4] Вороновская Е В., Экстремальные полиномы конечных функционалов, Автореферат, Изд. ЛГУ, 1955.

[5] Вороновская Е. В., Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 1 (1954), 5—8.

[6] Вороновская Е. В., Экстремальные полиномы некоторых простейших функционалов, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 2 (1954), 193—196.

[7] Вороновская Е. В., Функционал первой производной и уточнение теоремы А. А. Маркова, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 951—962.

[8] Золотарев Е. И., Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля, Собр. соч., вып. 2, Изд. АН СССР, Л., 1932.

[9] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Собр. соч., т. I, Изд. АН СССР, М., 1952.

[10] Бернштейн С. Н., Несколько замечаний к неравенству Владимира Маркова, Собр. соч., т. I, Изд. АН СССР, М., 1952.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 385—410

А. Л. БРУДНО

СУММИРОВАНИЕ СЧЕТНОГО ЧИСЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В работе находятся условия для того, чтобы счетное число ограниченных последовательностей можно было просуммировать к заданным пределам. Рассматриваются обобщения этой задачи.

В работе рассматриваются две тесно связанные между собой задачи:

1. Даны два конечных или счетных множества ограниченных последовательностей одинаковой мощности. Существует ли матрица Тёплица, преобразующая последовательности первого множества в последовательности второго множества (с точностью до последовательностей, сходящихся к нулю)? Можно ли ее выбрать так, чтобы она была сильнее некоторой заданной матрицы Тёплица? Сколь малой можно сделать ее норму?

2. Дано не более чем счетное множество ограниченных последовательностей $\{x_m\}$, причем каждой последовательности поставлено в соответствие число $\{a_m\}$ — предел, к которому ее надо просуммировать, и еще одно, тоже не более чем счетное множество $\{y_n\}$ ограниченных последовательностей. Существует ли матрица Тёплица, суммирующая последовательности первого множества $\{x_m\}$ к заданным пределам $\{a_m\}$? Можно ли ее выбрать так, чтобы она не суммировала последовательностей второго множества? Можно ли ее выбрать так, чтобы она была сильнее заданной матрицы Тёплица? Сколь малой можно сделать ее норму?

Введение

Мы будем пользоваться общими обозначениями из работы [1]. Дополнительные обозначения будут вводиться по мере надобности. Через e или x_0 будем обозначать единичную последовательность:

$$e = x_0 = \{1, 1, \ldots, 1\}.$$

1. Пусть x_1 — ограниченная расходящаяся последовательность. Легко видеть, что для каждого числа a_1 найдется матрица Тёплица B, суммирующая последовательность x_1 к пределу a_1. Таким образом, всякая ограниченная расходящаяся последовательность вместе со своим произвольным обобщенным пределом может быть «включена» в поле. Матрица B будет при этом суммировать все последовательности вида

$$\lambda^0 e + \lambda^1 x_1 + \overline{0}$$

(где 0 — последовательность, сходящаяся к нулю) к пределам

$$\lambda^0 1 + \lambda^1 a_1.$$

Если говорить не об индивидуальных последовательностях, а о последовательностях как точках пространства R_2, то можно сказать, что матрица B вместе с последовательностями $x_0 = e$ и x_1 (которые она суммирует к 1 и a_1) суммирует и все последовательности, которые являются их линейными комбинациями в R_2.

Обязано ли поле B вместе с линейными комбинациями $x_0 = e$ и x_1 в R_2 содержать еще какую-нибудь *фиксированную* последовательность? Этот вопрос поставил Агнев (²). Ответ на него содержится в работе автора (³), где показано, что если даны $1 + m + n$ ограниченных последовательностей

$$e = x_0, x_1, \ldots, x_m; \quad y_1, y_2, \ldots, y_n$$

и $1 + m$ чисел $1 = a_0, a_1, \ldots, a_n$, то:

α) для существования матрицы Тёплица B, суммирующей последовательности $\{x_\mu\}$ к пределам $\{a_\mu\}$, необходимо и достаточно, чтобы между числами $\{a_\mu\}$ имели место все те линейные зависимости, которые есть между последовательностями $\{x_\mu\}$ в R_2;

β) если условие α) выполнено, то упомянутую матрицу B можно выбрать такой, чтобы она не суммировала ни одной последовательности $\{y_\nu\}$ в том и только в том случае, если ни одна последовательность y_ν не является линейной комбинацией последовательностей $\{x_\mu\}$ в R_2.

Таким образом, был выяснен вопрос о включении и невключении в поле конечного числа последовательностей.

2. Естественно, далее, перейти к вопросу о включении и невключении в поле счетного числа последовательностей. Матрица Тёплица B задает на своем поле линейный (в R_2) функционал $B^\infty(x)$, норма которого очевидным образом не превосходит нормы $\|B\|$ (равна норме поля $\mathfrak{B}$). Кроме того, поле есть множество, замкнутое в R_2. Эти условия и являются достаточными для случая счетных множеств последовательностей. В § 3 доказывается, что в случае заданного преобразования или суммирования счетного числа ограниченных последовательностей выбор матрицы Тёплица в качестве оператора или функционала не несет никаких дополнительных ограничений в сравнении с линейными операторами или функционалами в пространстве R_2, если только среди последовательностей, подлежащих преобразованию или суммированию, содержится последовательность из единиц, которую задано преобразовать в себя или просуммировать к пределу, равному единице. Попутно показано, что норма матрицы может быть сделана равной (в одних случаях) или сколь угодно близкой (в других случаях) к норме соответствующего оператора или функционала.

По поводу теорем о преобразовании и суммировании счетного числа последовательностей отметим два обстоятельства.

I. Очевидность (и до некоторой степени прозрачность) необходимости условий. Если задано просуммировать последовательности

$$e = x_0, x_1, \ldots$$

к пределам

$$1 = a_0, a_1, \ldots$$

и при этом не просуммировать последовательностей $y_1, y_2, \ldots$, то эти условия сводятся к следующим требованиям:

1) Вместе с последовательностями $\{x_m\}$ нам придется просуммировать их линейную оболочку $\mathcal{G}$. Если $x \in \mathcal{G}$, т. е. имеет вид

$$x = \sum_{m=0}^{M} \lambda^m x_m,$$

то x придется просуммировать к пределу

$$a(x) = \sum_{m=0}^{M} \lambda^m a_m.$$

Поэтому мы заранее должны считать, что нам придется просуммировать все последовательности $x \in \mathcal{G}$ к заданным пределам $a(x)$. Первое требование состоит в том, чтобы функция $a(x)$ была **однозначной** функцией $x \in \mathcal{G}$ (на R_2). Оно так же прозрачно, как и (содержащееся в нем) требование, чтобы каждую заданную последовательность x_m, если даже она встречается несколько раз (под разными номерами) среди последовательностей $\{x_m\}$, нужно было просуммировать к одному и тому же пределу.

2) Второе требование состоит в том, чтобы последовательности $x \in \mathcal{G}$, если они имеют малую норму $\|x\|$, нужно было просуммировать к малым пределам. Это требование необходимо, так как в противном случае была бы бесконечной норма матрицы B, суммирующей последовательности $\{x_m\}$ к заданным пределам $\{a_m\}$. Должна существовать константа N такая, что все последовательности x, принадлежащие $\mathcal{G}$ и имеющие норму $\|x\| \leqslant 1$, задано просуммировать к пределам $a(x)$, не превосходящим (по модулю) этой константы N.

Формально, условие 1) содержится в условии 2).

Из условий 1) и 2) следует, что на $\mathcal{G}$ с нормировкой $\|x\|$ существует линейный функционал, принимающий в точках $\{x_m\}$ значения $\{a_m\}$. Норма его (на $\mathcal{G}$) будет не более N.

3) Множество последовательностей, суммируемых матрицей Тёплица B, замкнуто в R_2. Поэтому последовательности y_n не должны входить в замкнутую линейную оболочку последовательностей $\{x_m\}$ в R_2.

II. В вопросе о суммировании счетного числа последовательностей мы обращаем особое внимание на то, что норма матрицы B может быть сделана сколь угодно близкой к норме (на $\mathcal{G}$) линейного функционала, принимающего в точках $\{x_m\}$ значения $\{a_m\}$. Это замечание вызвано тем, что теорема, сформулированная с учетом этого обстоятельства, является следствием своего частного случая, когда число последовательностей конечно. Имеет место следующий факт.

Пусть существует константа N такая, что для любого натурального m найдется матрица Тёплица B_m, имеющая норму $\|B_m\| \leqslant N$ и суммирующая

последовательности

$$e = x_0, x_1, \ldots, x_m$$

к пределам

$$1 = a_0, a_1, \ldots, a_m;$$

тогда найдется матрица Тёплица B, суммирующая все счетное множество последовательностей $x_0, x_1, \ldots$ к пределам $a_0, a_1, \ldots$.

Этот факт я отмечаю особо потому, что он уже не имеет места, когда мы хотим суммировать последовательности не произвольными матрицами Тёплица, а только матрицами, более сильными, чем заданная матрица A.

3. Перейдем к вопросу о добавлении к заданному полю счетного множества последовательностей. Пусть заданы матрица Тёплица A, счетное множество ограниченных последовательностей

$$e = x_0, x_1, \ldots,$$

которые надо просуммировать к пределам

$$1 = a_0, a_2, \ldots,$$

и другое счетное множество ограниченных последовательностей $y_1, y_2, \ldots$. Когда существует матрица Тёплица B, которая сильнее A, суммирует последовательности $\{x_m\}$ к пределам $\{a_m\}$ и не суммирует последовательности $\{y_n\}$? Этому вопросу посвящен § 1. Необходимость наших условий по-прежнему весьма очевидна. Здесь мы отметим только один результат:

Пусть задана матрица Тёплица A и счетные множества

$$e = x_0, x_1, \ldots; 1 = a_0, a_1, \ldots.$$

Тогда для существования матрицы Тёплица B, которая сильнее A ($B \supseteq A$) и суммирует последовательности $\{x_m\}$ к пределам $\{a_m\}$, необходимо и достаточно, чтобы эти пределы (продолженные по аддитивности) на $\mathcal{G}$ давали бы функционал β, однозначный и непрерывный в $\mathfrak{A}$-топологии.

§ 1. Основная теорема и основная лемма

1. ТЕОРЕМА (основная). *Пусть*

$$e = x_0, x_1, \ldots \tag{1}$$

— ограниченные последовательности (из R_2), $\mathcal{G}$ — их линейная оболочка и β — аддитивный оператор, заданный на $\mathcal{G}$ и принимающий значения из R_2, причем $\|\beta(e) - e\| = 0$. Пусть A — матрица Тёплица.

1.1. *Для того чтобы существовала матрица Тёплица B такая, что $B \supseteq A$ и*

$$\|B(x_n) - \beta(x_n)\| = 0 \text{ для всех } n = 0, 1, \ldots,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность $\mathcal{E}$ матрицы A, что оператор β ограничен на $\mathcal{E} \cap \mathcal{G}$.

1.2. *Если достаточные условия выполнены и*

$$\sup_{x \in \mathscr{E} \cap \mathscr{G}} \|\beta(x)\| = M < \infty,$$

то матрица B может быть выбрана таким образом, что

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} \|B(x)\| = M.$$

1.3. *Ограниченность оператора β в естественной нормировке фактор-пространства $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$ не достаточна, а ограниченность β в A-нормировке не необходима.*

Доказательство необходимости условия 1.1. Если существует матрица B, указанная в теореме, то $B \supseteq A$ и

$$\|B(x) - \beta(x)\| = 0 \text{ для всех } x \in \mathscr{G}. \tag{2}$$

В силу теоремы работы (1), в каждой окрестности $\mathscr{E}_B$ матрицы B содержится некоторая окрестность $\mathscr{E}_A$ матрицы A. Беря

$$\mathscr{E}_B = \{\|x\| < \infty,\ \|B(x)\| < 1\},$$

для $\mathscr{E}_A \subseteq \mathscr{E}_B$ получаем:

$$\sup \|B(x)\| \leqslant 1,$$

где sup берется по всем $x \in \mathscr{E}_A$. В силу (2), это означает также, что и $\beta(x)$ ограничено на $\mathscr{E} \cap \mathscr{G}$:

$$\sup \|\beta(x)\| = \sup \|B(x)\| \leqslant 1,$$

где sup берется по всем $x \in \mathscr{E}_A \cap \mathscr{G}$.

Необходимость условия 1.1 доказана. Доказательству достаточности предпошлем ряд замечаний и лемм.

Определение 1. Ограниченные последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются линейно независимыми (в R_2), если из равенства

$$\|\lambda^1 y_1 + \lambda^2 y_2 + \ldots + \lambda^n y_n\| = 0$$

следует

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \ldots = \lambda^n = 0.$$

В пространстве R_2 последовательность, сходящаяся к нулю, имеет норму, равную нулю. Любая последовательность $\beta(x)$ (при фиксированных x) представляет собой целый класс последовательностей, различающихся на последовательности, сходящиеся к нулю. Последовательности (1) основной теоремы также могут быть заданы с точностью до сходящихся к нулю. Желая отметить, что в некоторой последовательности x фиксированы все ее члены $x = \{x^1, x^2, \ldots\}$, мы будем говорить, что x — *индивидуальная последовательность.*

Замечание 1. Без ограничения общности достаточных условий основной теоремы можно предполагать последовательности (1) индивидуальными последовательностями, а любое их число — линейно независимыми в R_2. При этом $\mathscr{G}$ заменяется пространством индивидуальных последовательностей, являющихся точными (почленными) линейными

комбинациями индивидуальных последовательностей (1) (норму в $\mathcal{G}$ мы по-прежнему оставляем равной $\|x\|$).

Действительно, пусть последовательности (1) уже заменены какими угодно соответствующими индивидуальными последовательностями. Определим по индукции индивидуальные последовательности $x_0^*, x_1^*, \ldots$. Пусть $x_0^* = e$ и $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_n^*$ уже определены. Среди последовательностей $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ возьмем первую, которая линейно независима в R_2 от $x_0^*, \ldots, x_n^*$. Обозначим ее через x_{n+1}^*. Ясно, что последовательности $x_0^*, x_1^*, \ldots$ линейно независимы в R_2 в любом конечном числе и что всякая последовательность x_n есть линейная комбинация последовательностей $x_0^*, x_1^*, \ldots$ в R_2.

Если для некоторой матрицы Тёплица B

$$\|B(x_n^*) - \beta(x_n^*)\| = 0 \text{ для всех } n = 0, 1, \ldots,$$

то и

$$\|B(x_n) - \beta(x_n)\| = 0 \text{ для всех } n = 0, 1, \ldots,$$

ибо операторы B и β аддитивны и переводят последовательность, сходящуюся к нулю, в последовательности, сходящиеся к нулю.

Введем множество $\mathcal{G}^*$, представляющее собой множество точных линейных комбинаций последовательностей $\{x_n^*\}$:

$$x^* \in \mathcal{G}^*, \text{ если } x^{*k} = \sum \lambda^\nu x_\nu^{*k},$$

где $\sum$ содержит конечное число членов и λ^ν не зависит от k.

От замены последовательностей (1) индивидуальными и множества $\mathcal{G}$ — множеством $\mathcal{G}^*$ константа M в условии (1.2), очевидно, не меняется.

Замечание 2. Без ограничения общности доказательства основной теоремы можно предполагать, что оператор $\beta(x)$ переводит индивидуальную последовательность в индивидуальную же и что он аддитивен, т. е. если $x', x'' \in \mathcal{G}$, то

$$|\beta(x') + \beta(x'') - \beta(x' + x'')| = 0,$$

причем $|\beta(e) - e| = 0$.

Действительно, введем по индукции «индивидуальный» оператор $\beta_*(x)$. Пусть $\beta_*(x_0) = e$ и $\beta_*(x_1), \beta_*(x_2), \ldots, \beta_*(x_n)$ уже определены. Если

$$\|\beta(x_{n+1}) - \lambda^0 \beta(x_0) - \lambda^1 \beta(x_1) - \ldots - \lambda^n \beta(x_n)\| = 0, \tag{*}$$

то мы полагаем

$$\beta_*(x_{n+1}) = \lambda^0 \beta_*(x_0) + \lambda^1 \beta_*(x_1) + \ldots + \lambda^n \beta_*(x_n).$$

Если же оператор $\beta(x_{n+1})$ не представим в виде (*), то для значения $\beta_*(x_{n+1})$ мы выбираем любую индивидуальную последовательность из класса $\beta(x_{n+1})$.

Следствие 1. *Без ограничения общности основной теоремы можно предполагать, что оператор* $\beta(x)$ *определяет на* $\mathcal{G}$ *последовательность*

аддитивных функционалов

$$\beta(x) = \{\beta^1(x),\ \beta^2(x), \ldots\}$$

таких, что

$$\beta(e) = e = \{1, 1, \ldots\}.$$

Эти функционалы, вообще говоря, не ограничены на $\mathscr{E} \cap \mathscr{G}$.

Для удобства дальнейших выкладок введем следующие обозначения.

Пусть A и $\mathscr{E} \sim \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots\}$ — соответственно матрица Тёплица и ее окрестность, упомянутые в условиях основной теоремы и фиксированные до конца статьи.

Матрицу A будем предполагать точно треугольной усеченной* и нормированной. Согласно ([4]), это не уменьшает общности основной теоремы. Грань усечения A обозначим через $s_* = s_*(s)$. Это есть монотонно не убывающая функция, принимающая все натуральные значения и такая, что $a_k^i = 0$, если $i \geqslant s$ и $k < s_*$.

Обозначим через $\mathscr{G}_n$ линейное пространство, порожденное точными линейными комбинациями $1+n$ индивидуальных последовательностей $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и положим норму в $\mathscr{G}_n$ равной $\|x\|$.

Пусть $\mathscr{E}_m$ — общая выпуклая оболочка множеств

$$\{\|x\| \leqslant \mu,\quad \|A(x)\| \leqslant \varepsilon^\mu\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Очевидно, $\mathscr{E}_m$ является центрально-симметричным выпуклым замкнутым подмножеством R_2. Оно является телом, ибо содержит сферу

$$\{\|x\| \leqslant \min(1, \varepsilon^1 : \|A\|)\}.$$

Через $\mathscr{E}_{mn}$ обозначим пересечение

$$\mathscr{E}_{mn} = \mathscr{E}_m \cap \mathscr{G}_n.$$

Введем линейное пространство $R(s_* k)$ векторов

$$x(s_* k) = \{x^{s_*},\ x^{s_*+1}, \ldots, x^{k-1}\}$$

с нормой

$$|x(s_* k)| = |x|_{s_*}^k = \sup_{s_* \leqslant \varkappa < k} |x^\varkappa|.$$

Переход от индивидуальной последовательности x к вектору $x(s_* k)$ будем называть *проектированием* в $R(s_* k)$.

Обозначим через $\mathscr{G}_n(s_* k)$ проекцию $\mathscr{G}_n$ в $R(s_* k)$ и через $\mathscr{E}_m(s_* k)$ — выпуклую оболочку множества векторов из $R(s_* k)$ (здесь s — минимальное число, для которого $s_*(s) = s_*$):

$$\{|x|_{s_*}^k \leqslant \mu,\ |A(x)|_s^k \leqslant \varepsilon^\mu\} \text{ для всех } \mu = 1, 2, \ldots, m. \tag{3}$$

---

* Матрица усечена, если в каждом столбце отлично от нуля только конечное число членов.

Введем пересечение

$$\mathscr{E}_{mn}(s_* k) = \mathscr{E}_m(s_* k) \cap \mathscr{G}_n(s_* k)$$

и проекцию $\mathscr{E}_{mn}^{s_* k}$, равную проекции $\mathscr{E}_{mn}$ в $R(s_* k)$. Таким образом,

$$\mathscr{E}_{mn}(s_* k) = \mathscr{E}_m(s_* k) \cap \{\text{проекция } \mathscr{G}_n \text{ в } R(s_* k)\},$$

$$\mathscr{E}_{mn}^{s_* k} = \text{проекция } \{\mathscr{E}_m \cap \mathscr{G}_n\} \text{ в } R(s_* k).$$

Наконец, положим

$$M_{mn}^{\tau} = \sup_{x \in \mathscr{E}_{mn}} |\beta^{\tau}(x)|.$$

ЛЕММА 1. $\overline{\lim\limits_{\tau \to \infty}} M_{mn}^{\tau} \leqslant M$ *при любых фиксированных* m *и* n.

Доказательство. Аддитивный оператор $\beta(x)$ задан на линейном пространстве $\mathscr{G}$ и ограничен на множестве $\mathscr{E} \cap \mathscr{G}$, содержащем сферу пространства $\mathscr{G}$. Следовательно, $\beta(x)$ на $\mathscr{G}$ является линейным оператором и имеет норму $\|\beta\|_{\mathscr{G}} < \infty$.

Для каждого $x \in \mathscr{G}$

$$\|\beta(x)\| \leqslant \|\beta\|_{\mathscr{G}} \|x\| \quad (x \in \mathscr{G}).$$

Но, по определению нормы последовательности,

$$\|\beta(x)\| = \overline{\lim_{\tau \to \infty}} |\beta^{\tau}(x)|. \tag{4}$$

Значит,

$$\overline{\lim_{\tau \to \infty}} |\beta^{\tau}(x)| \leqslant \|\beta\|_{\mathscr{G}} \|x\| \quad (x \in \mathscr{G}). \tag{5}$$

Далее, из последовательности $\tau = 1, 2, \ldots$ выберем подпоследовательность, для которой

$$\lim_{t \to \infty} M_{mn}^{\tau^t} = \overline{\lim_{\tau \to \infty}} M_{mn}^{\tau} \tag{6}$$

и существуют пределы

$$\beta^*(x_\nu) = \lim_{t \to \infty} \beta^{\tau^t}(x_\nu) \text{ для всех } \nu = 1, 2, \ldots.$$

Согласно (5), числа $\beta^*(x_\nu)$ конечны. Но тогда и для любого $x \in \mathscr{G}$ существует конечный предел

$$\beta^*(x) = \lim_{t \to \infty} \beta^{\tau^t}(x), \quad x \in \mathscr{G}.$$

Действительно, каждая точка $x \in \mathscr{G}$ представляется линейной комбинацией конечного числа точек из $x_1, x_2, \ldots$, а функционалы $\beta^{\tau}(x)$, согласно замечанию 1, аддитивны. Но на конечномерном пространстве $\mathscr{G}_n$ аддитивные функционалы $\beta^{\tau} = \beta^{\tau}(x)$ ограничены, т. е. являются линейными функционалами. Их последовательность β^{τ^t} сходится в каждой точке $x \in \mathscr{G}_n$, т. е. в каждой точке полного линейного нормированного пространства к функционалу β^*. В таком случае, по известной теореме

функционального анализа, предельный функционал линеен, а последовательность функционалов сходится и по норме. В частности,

$$\lim_{t\to\infty}\|\beta^{\tau^t}\|_{\mathcal{G}_n}=\|\beta^*\|_{\mathcal{G}_n}$$

и нормы последовательности β^{τ^t} на $\mathcal{G}_n$ ограничены общей константой.

Выберем для каждого натурального t точку $y_t \in \mathcal{E}_{mn}$ такую, чтобы

$$|\beta^{\tau^t}(y_t)| > M_{mn}^{\tau^t} - 1 : t. \tag{7}$$

Так как $\mathcal{E}_{mn}$ — ограниченное замкнутое подмножество конечномерного пространства $\mathcal{G}_n$, то оно компактно и последовательность $y_1, y_2, \ldots$ имеет предельную точку $y \in \mathcal{E}_{mn}$. Семейство линейных функционалов, у которых нормы ограничены в совокупности, равностепенно непрерывно. Поэтому

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}|\beta^{\tau^t}(y_t)| \leqslant \underline{\lim}_{t\to\infty}|\beta^{\tau^t}(y)|. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) и (4) получаем:

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} M_{mn}^{\tau} \leqslant \|\beta(y)\|.$$

Но $y \in \mathcal{E}_{mn} \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{G}$. Значит, $\|\beta(y)\| \leqslant M$. Лемма 1 доказана.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество в линейном пространстве, а $\varkappa$ — действительное число. Обозначим через $\varkappa\mathcal{M}$ множество, состоящее из точек $\varkappa x$, где x пробегает M.

ЛЕММА 2. *Пусть фиксированы натуральные числа* m, n *и* s. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* k *такое, что*

$$(1+\varepsilon)\,\mathcal{E}_{mn}^{s_*\varkappa} \supseteq \mathcal{E}_{mn}(s_*\varkappa) \text{ при всех } \varkappa \geqslant k \quad (s_* = s_*(s)).$$

Доказательство. Если лемма неверна, то, очевидно, существует $1 > \varepsilon > 0$ такое, что для бесконечного множества $K = \{k\}$ значений k будем иметь:

$$\mathcal{E}_{mn}^{s_*k} \not\supseteq (1-\varepsilon)\,\mathcal{E}_{mn}(s_*k). \tag{9}$$

Множества $\mathcal{E}_{mn}^{s_*k}$ и $(1-\varepsilon)\,\mathcal{E}_{mn}(s_*k)$ суть замкнутые выпуклые тела в $\mathcal{G}_n(s_*k)$ и содержат общую точку $O(s_*k)$ — нуль пространства $R(s_*k)$. Следовательно, для каждого k, удовлетворяющего условию (9), найдется точка $y_k(s_*k)$, принадлежащая границе $\mathcal{E}_{mn}^{s_*k}$ и одновременно множеству $(1-\varepsilon)\,\mathcal{E}_{mn}(s_*k)$. Множество $\mathcal{E}_{mn}^{s_*k}$ является проекцией $\mathcal{E}_{mn}$ в $R(s_*k)$, и, следовательно, точка $y_k(s_*k)$ границы $\mathcal{E}_{mn}^{s_*k}$ имеет прообраз y_k, принадлежащий границе $\mathcal{E}_{mn}$. Последовательность y_k зафиксируем до конца доказательства леммы 2.

Множество $\mathcal{E}_{mn}$ замкнуто и ограничено, его граница компактна. Следовательно, множество $\{y_k\}$ $(k \in K)$ имеет предельную точку y, принадлежащую границе $\mathcal{E}_{mn}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{G}$. Согласно замечанию 1, оно состоит из индивидуальных последовательностей, являющихся конечными линейными комбинациями индивидуальных последовательностей $x_0, x_1, \ldots$. Точка $x \in \mathcal{G}$ представима в виде

$$x = \lambda^0 x_0 + \lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^\nu x_\nu,$$

причем если $\|x\| = 0$, то $\lambda^0 = \lambda^1 = \ldots = \lambda^\nu = 0$ в силу линейной независимости последовательностей x_n по норме $\| \;\|$. Следовательно, и $|x| = 0$. Обратно, из $|x| = 0$ вытекает $\|x\| = 0$. Как известно, две нормы (в данном случае $\|x\|$ и $|x|$) конечномерного пространства ($\mathcal{G}_n$) определяют в нем одинаковые топологии, коль скоро условия $|x| = 0$ и $\|x\| = 0$ равносильны. Таким образом, точка y предельна для множества $\{y_k\}$ и по норме $| \;|$.

Для любого $k \in K$

$$y_k(s_* k) \in (1 - \varepsilon)\, \mathcal{E}_{mn}(s_* k).$$

В более подробной записи это дает:

$$y_k(s_* k) \in \mathcal{G}_n(s_* k),$$

$$y_k(s_* k) = (1 - \varepsilon) \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_k^\mu y_{k\mu}(s_* k),$$

где

$$\lambda_k^\mu \geqslant 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_k^\mu \leqslant 1, \quad |A[y_{k\mu}(s_* k)]|_s^k \leqslant \varepsilon^\mu, \quad |y_{k\mu}(s_* k)|_{s_*}^k \leqslant \mu$$

для всех $k \in K$ и $\mu = 1, 2, \ldots, m$ $(s_* = s_*(s))$ *.

Введем последовательности $y_{k\mu}$ с таким расчетом, чтобы уже имеющиеся векторы $y_{k\mu}(s_* k)$ были проекциями $y_{k\mu}$ в $R(s_* k)$:

$$y_{k\mu}^\sigma = \begin{cases} y_{k\mu}^\sigma & \text{для } \sigma < k, \\ \dfrac{1}{1-\varepsilon} y_k^\sigma & \text{для } \sigma \geqslant k. \end{cases}$$

Мы имеем:

$$|y_{k\mu}|_{s_*}^k \leqslant \mu, \quad |A(y_{k\mu})|_s^k \leqslant \varepsilon^\mu, \quad \lambda_k^\mu \geqslant 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_k^\mu \leqslant 1,$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_k^\mu y_{k\mu} = y_k \quad (k \in K,\ \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Выберем последовательность $k^1, k^2, \ldots, k^l, \ldots$ $(k^l \in K)$ такую, чтобы

---

* Матрица A точно треугольна и усечена. Поэтому $A^i(y)$ зависит [только] от членов $y^\varkappa$, у которых $s_*(i) \leqslant \varkappa \leqslant i$. Тем самым однозначно определяется

$$A^i(y[s_*(i),\ i+1]) = A^i(y).$$

существовали пределы:

$$y^{\sigma}_{k^l t_\mu} \to z^{\sigma}_{\mu} \text{ для всех } \sigma = 1, 2, \ldots,$$

$$\lambda^{\mu}_{k^l} \to \lambda^{\mu}, \quad \| y_{k^l} - y \| \to 0.$$

Тогда

$$\lambda^{\mu} \geqslant 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m} \lambda^{\mu} \leqslant 1, \quad | z_{\mu} |_{s_*}^{\infty} \leqslant \mu, \quad | A(z_{\mu}) |_{s}^{\infty} \leqslant \varepsilon^{\mu}.$$

Как мы установили, в пространстве $\mathcal{G}_n$ из

$$\| y_{k^l} - y \| \to 0$$

следует

$$| y_{k^l} - y | \to 0.$$

В частности, для каждого σ

$$y^{\sigma}_{k^l} \to y^{\sigma}.$$

Таким образом, для предельной последовательности y имеем равенство:

$$y = (1 - \varepsilon) \sum_{\mu=1}^{m} \lambda^{\mu} y_{\mu}.$$

Мы нашли, что $y \in (1 - \varepsilon) \mathscr{E}_{mn}$, но это противоречит тому, что y входит в границу $\mathscr{E}_{mn}$. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Каждому $\tau = 1, 2, \ldots$ можно поставить в соответствие натуральные числа $s(\tau)$, $k(\tau)$, $m(\tau)$ и $n(\tau)$ такие, что*

$$k(\tau - 1) \leqslant s_*[s(\tau)], \qquad m(\tau) \to \infty, \tag{10}$$

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sup | \beta^{\tau}(x) | \leqslant M, \quad n(\tau) \to \infty. \tag{11}$$

Значок sup *взят по всему множеству $\mathscr{E}^{\tau}$ последовательностей $x \in \mathcal{G}$, у которых проекция $x(s\,[s(\tau)],\ k(\tau)) \in \mathscr{E}_{m(\tau),\, n(\tau)}(s_*[s(\tau)],\ k(\tau))$.*

Доказательство. Согласно лемме 1, существует монотонно неубывающая функция $m(\tau) = n(\tau)$ такая, что

$$m(\tau) = n(\tau) \to \infty, \qquad \overline{\lim_{\tau\to\infty}} \sup_{x \in \mathscr{E}_{m(\tau)\,n(\tau)}} | \beta^{\tau}(x) | \leqslant M. \tag{12}$$

Определим по индукции $s(\tau)$ и $k(\tau)$. Возьмем $s(\tau)$ столь большим, что если $k(\tau - 1)$ уже определено, то

$$s_*[s(\tau)] \geqslant k(\tau - 1).$$

Далее, с помощью леммы 2 возьмем $k(\tau)$ столь большим, что

$$\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) \mathscr{E}^{s_*,k}_{mn} \supseteq \mathscr{E}_{mn}(s_*, k).$$

Тогда получим:

$$\sup_{x(s_*k)\in\mathscr{E}_{mn}(s_*k)} |\beta^\tau(x)| \leqslant \left(1+\frac{1}{\tau}\right) \sup_{x(s_*k)\in\mathscr{E}_{mn}^{s_*k}} |\beta^\tau(x)| = \left(1+\frac{1}{\tau}\right) \sup_{x\in\mathscr{E}_{mn}} |\beta^\tau(x)|$$

(аргумент τ опущен). Отсюда при $\tau\to\infty$ в силу (12) получаем (11). Лемма 3 доказана.

Сохраним до конца доказательства основной теоремы обозначения для фиксированных функций

$$s(\tau),\quad k(\tau),\quad m(\tau),\quad n(\tau),\quad s^*(\tau)=s_*[s(\tau)]=s_*,$$

удовлетворяющих лемме 3. Сохраним также обозначение $\mathscr{E}^\tau$ для множества последовательностей $x\in\mathscr{G}$, у которых проекция в $R(k(\tau), s^*(\tau))$ входит в $\mathscr{E}_{m(\tau)n(\tau)}(s^*(\tau),\ k(\tau))$.

Замечание 3. Пусть $y_1\in\mathscr{G}_{n(\tau)}$, $y_2\in\mathscr{G}_{n(\tau)}$ и $|y_1-y_2|_{s^*(\tau)}^{k(\tau)}=0$. Тогда для $z=(y_1-y_2)$ имеем:

$$\lambda z\in\mathscr{G}_{n(\tau)},\quad |\lambda z|_{s^*(\tau)}^{k(\tau)}=0,$$

$$\lambda z\in\mathscr{E}^\tau,\quad \beta^\tau(\lambda z)=\lambda\beta^\tau(z)$$

при любом действительном λ. Таким образом, либо $\beta^\tau(y_1)=\beta^\tau(y_2)$, либо β^τ не ограничено на $\mathscr{E}^\tau$. Согласно лемме 3, существует такое τ_0, что при $\tau\geqslant\tau_0$ последнее обстоятельство не может иметь места.

Следствие 2. *При всех $\tau\geqslant\tau_0$ равенство*

$$B_*^\tau[x(s^*(\tau),\ k(\tau))]=\beta^\tau(x) \tag{13}$$

определяет на $\mathscr{G}_{n(\tau)}(s^*(\tau),\ k(\tau))$ линейный функционал B_*^τ.

Действительно, согласно замечанию 3, этот функционал однозначно определен при $\tau\geqslant\tau_0$. Кроме того, он аддитивен, а пространство $\mathscr{G}_n(s_*k)$ конечномерно.

Доказательство основной теоремы. Обозначим

$$\Delta(\tau)=\sup B_*^\tau[x(s^*(\tau), k(\tau))]=\sup_{x\in\mathscr{E}^\tau}\beta^\tau(x),$$

где первый знак sup берется по $x(s^*(\tau),\ k(\tau))\in\mathscr{E}_{m(\tau),n(\tau)}(s^*(\tau),\ k(\tau))$. Тогда $\Delta(\tau)<\infty$ при всех $\tau\geqslant\tau_0$, и, по лемме 3,

$$\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\,\Delta(\tau)\leqslant M. \tag{14}$$

Пусть фиксировано натуральное число $\tau\geqslant\tau_0$ и числа $m=m(\tau)$, $n=n(\tau)$, $s=s(\tau)$, $k=k(\tau)$, $s_*=s_*[s(\tau)]$. На $\mathscr{G}_n(s_*k)$ определен линейный функционал $B_*^\tau[x(s_*k)]$, достигающий на $\mathscr{E}_{mn}(s_*k)\subset\mathscr{G}_n(s_*k)$ максимума $\Delta=\Delta(\tau)$.

Пусть ρ — гиперплоскость, состоящая из точек $\mathscr{G}_n(s_*k)$, где функционал $B_*^\tau[x(s_*,\ k)]$ равен Δ:

$$\Delta=\max_{x(s_*k)\in\mathscr{E}_{mn}(s_*k)} B_*^\tau[x(s_*k)],$$

$$\rho=\{x(s_*k)\in\mathscr{G}_n(s_*k),\ B_*^\tau[x(s_*k)]=\Delta\}.$$

Функционал B_*^τ отличен от нуля, ибо

$$B^\tau[e(s_* k)] = B^\tau(x_0) = 1$$

(см. следствие 1). Значит, число измерений ρ на единицу ниже числа измерений $\mathcal{G}_n(s_* k)$ и ρ служит опорной гиперплоскостью к $\mathcal{E}_{mn}(s_* k)$ в $\mathcal{G}_n(s_* k)$. Но $\mathcal{G}_n(s_* k)$ является линейным подпространством $R(s_* k)$, а $\mathcal{E}_{mn}(s_* k)$ является пересечением выпуклого тела $\mathcal{E}_m(s_* k) \in R(s_* k)$ с подпространством $\mathcal{G}_n(s_* k)$. Поэтому в $k - s_*$-мерном пространстве $R(s_* k)$ через ρ проходит $k - s_* - 1$-мерная гиперплоскость Г, опорная для $\mathcal{E}_m(s_* k)$. Она не содержит нуля — внутренней точки $\mathcal{E}_m(s_* k)$.

Следовательно, уравнение Г

$$b_{s_*}^\tau x^{s_*} + b_{s_*+1}^\tau x^{s_*+1} + \ldots + b_{k-1}^\tau x^{k-1} = \Delta$$

можно нормировать так, чтобы правая его часть была равна $\Delta \neq 0$. Зададим на $R(s_* k)$ линейный функционал

$$\sum_{\sigma=s^*}^{k-1} b_\sigma^\tau x^\sigma.$$

Он равен Δ на ρ, т. е. на всем множестве, где функционал B_*^τ определен и равен Δ. Таким образом, новый функционал совпадает с B_*^τ на всем множестве $\mathcal{G}_n(s_* k)$ определения B_*^τ и является его продолжением на $R(s_* k)$. Поэтому мы будем в дальнейшем считать B_τ^* определенным на всем $R(s_* k)$ условием

$$B_*^\tau[x(s_* k)] = \sum_{\sigma=s_*}^{k-1} b_\sigma^\tau x^\sigma.$$

Так как центрально-симметрическое тело $\mathcal{E}_m(s_* k)$ лежит между гиперплоскостями Г и —Г $\equiv (\sum b_\sigma^\tau x^\sigma = -\Delta)$, на которых функционал B_τ^* принимает значения Δ и $-\Delta$, то

$$|B_*^\tau[x(s_* k)]| \leqslant \Delta(\tau)$$
$$\text{для всех } x(s_* k) \in \mathcal{E}_m(s_* k) \quad (\tau \geqslant \tau_0). \tag{15}$$

Числа b_σ^τ определены только для $\tau \geqslant \tau_0$ и σ, удовлетворяющих условию

$$s_*(\tau) \leqslant \sigma < k(\tau).$$

Положим b_σ^τ равными нулю в остальных случаях и докажем, что матрица $B = \{b_\sigma^\tau\}$ удовлетворяет основной теореме.

Для матрицы B (при всех $\tau \geqslant \tau_0$ и любом x) мы имеем:

$$B^\tau(x) = B_*^\tau[x(s_*(\tau), k(\tau))]. \tag{16}$$

В частности [см. (15)],

$$|B^\tau(x)| \leqslant \Delta(\tau), \text{ коль скоро } x(s^*(\tau), k(\tau)) \in \mathcal{E}_{m(\tau)}(s_*(\tau), k(\tau)). \tag{17}$$

1. Пусть индивидуальная последовательность x входит в $\mathscr{E}$. Тогда для некоторого m_1 $x \in \mathscr{E}_{m_1}$, или, более подробно,

$$x = \sum_{\mu=1}^{m_1} \lambda^{\mu} y_{\mu}, \quad \text{где} \quad \lambda^{\mu} \geqslant 0, \quad \sum_{\mu=1}^{m_1} \lambda^{\mu} \leqslant 1,$$

$$\| y_{\mu} \| \leqslant \mu, \quad \| A(y_{\mu}) \| \leqslant \varepsilon^{\mu} \quad [1 \leqslant \mu \leqslant m_1].$$

В силу этого, для каждого $1 > \varepsilon > 0$ найдется s_1 такое, что

$$\varepsilon \,| y_{\mu} |_{s_{1*}}^{\infty} < \mu, \quad \varepsilon \,| A(y_{\mu}) |_{s_1}^{\infty} < \varepsilon^{\mu} \quad (1 \leqslant \mu \leqslant m_1, \; s_{1_*} = s_*(s_1)).$$

Таким образом, для $z_{\mu} = \varepsilon y_{\mu}$ имеем $(1 \leqslant \mu \leqslant m)$:

$$\varepsilon x = \sum_{\mu=1}^{m_1} \lambda^{\mu} z_{\mu} \quad (| z_{\mu} |_{s_{1*}}^{\infty} < \mu, \quad | A(z_{\mu}) |_{s_1}^{\infty} < \varepsilon^{\mu}). \tag{18}$$

Возьмем теперь τ_1 столь большим, что $\tau_1 > \tau_0$, $m(\tau_1) > m_1$, $s^*(\tau_1) > s_1$ Тогда для любого $\tau \geqslant \tau_1$ будем иметь:

$$m(\tau) > m_1, \quad s(\tau) > s_1, \quad s^*(\tau) = s_*[s(\tau)] > s_{1_*}$$

и, согласно неравенствам (18) и определению $\mathscr{E}_m(s_* k)$,

$$\varepsilon x(s^*(\tau), k(\tau)) \in \mathscr{E}_{m(\tau)}(s^*(\tau), k(\tau)) \quad (\tau \geqslant \tau_1).$$

В силу условия (17), отсюда вытекает, что

$$| B^{\tau}(x) | \leqslant \Delta(\tau) : \varepsilon.$$

Принимая во внимание (14) и произвольность ε, получаем неравенство

$$\| B(x) \| \leqslant M.$$

2. Пусть x — ограниченная последовательность и $\| A(x) \| = 0$. Тогда $B(x) \| = 0$.

Действительно, $\lambda x \in \mathscr{E}$ при любом λ, значит,

$$\| B(\lambda x) \| \leqslant M \text{ и } \| B(x) \| = 0.$$

3. В частности, из $\| x \| = 0$ следует $\| A(x) \| = 0$ и, значит, $\| B(x) \| = 0$.

4. Пусть $n \,(n = 0, 1, \ldots)$ — произвольное, но фиксированное число. Тогда при $\tau \geqslant \tau_0$ имеем (см. (16)):

$$B^{\tau}(x_n) = B_*^{\tau}[x_n(s_*(\tau), k(\tau))].$$

Если, кроме того, τ так велико, что $n(\tau) \geqslant n$, то $x_n \in \mathscr{G}_{n(\tau)}$ и

$$x_n(s^*(\tau), k(\tau)) \in \mathscr{G}_{n(\tau)}[s^*(\tau), k(\tau)].$$

Таким образом, в силу (13),

$$B^{\tau}(x_n) = \beta^{\tau}(x_n) \quad (\tau \geqslant \tau_0, \; n(\tau) \geqslant n).$$

По определению функционалов β^{τ} (см. следствие 1),

$$\beta(x) = \{\beta^1(x), \beta^2(x) \ldots\},$$

имеем:

$$\| B(x_n) - \beta(x_n) \| = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

5. В частности,

$$\| B(x_0) - \beta(x_0) \| = \| B(e) - \beta(e) \| = 0.$$

Таким образом, $B^{\infty}(e) = 1$ и, в силу 3, матрица B есть матрица Тёплица.

6. Из пп. 5 и 2 вытекает, что всякая ограниченная последовательность, суммируемая матрицей A, суммируется матрицей B и к тому же пределу: $B \supseteq A$.

Достаточность условия 1.1 и утверждение 1.2 основной теоремы доказаны. Утверждение 1.3 будет доказано в примерах 3 и 4 § 5.

Определение 2. Пусть в линейном пространстве R лежит выпуклое центрально-симметрическое множество $\mathcal{M}$ с центром в нуле. Пусть $\mathcal{M}$ пересекается с каждой прямой λx по (замкнутому) сегменту значений λ, конечному или бесконечному, но отличному от точки $\lambda = 0$. Если $\mathcal{M}$ принято за единичную сферу R, то говорят, что в R введена $\mathcal{M}$-нормировка.

$\mathcal{M}$-норма удовлетворяет условиям:

$$|\lambda x|_M = |\lambda| \, |x|_M, \quad |x + y|_M \leqslant |x| + |y|_M,$$

$\mathcal{M}$-норма может равняться нулю для некоторых точек $x \neq 0$.

ЛЕММА 4. *Пусть точки $y_1, y_2, \ldots$ не входят в замыкание множества $\mathcal{G}$ по $\mathfrak{A}$-топологии. Тогда найдется окрестность $\mathcal{E}$ матрицы A такая, что точки $y_1, y_2, \ldots$ не будут входить в замыкание $\mathcal{G}$ по $\overline{\mathcal{E}}$-нормировке ($\overline{\mathcal{E}}$ есть замыкание по норме $\| \ \|$).*

Доказательство. По условию леммы, каждому натуральному n можно поставить в соответствие окрестность

$$\mathcal{E}_n \sim \{\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \ldots\}$$

матрицы A такую, что $\mathcal{E}_n(y_n)$ не пересекается с $\mathcal{G}$.

Введем окрестность

$$\mathcal{E} \sim \{\varepsilon^1, \varepsilon^2 \ldots\},$$

полагая

$$\varepsilon^\nu = \min_{n \leqslant \nu} \varepsilon_n^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для

$$\varepsilon(n) = \min_{\nu \leqslant n} [1, \ \varepsilon_n^\nu : \varepsilon^\nu]$$

будем иметь:

$$\varepsilon(n)\, \varepsilon^\nu \leqslant \varepsilon_n^\nu$$

при всех ν и n. Действительно, при $n \leqslant \nu$, ввиду $\varepsilon(n) \leqslant 1$,

$$\varepsilon(n)\, \varepsilon^\nu \leqslant \varepsilon^\nu \leqslant \varepsilon_n^\nu,$$

а при $\nu \leqslant n$

$$\varepsilon(n)\, \varepsilon^\nu \leqslant \varepsilon_n^\nu,$$

следовательно,

$$\varepsilon(n)\, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, для каждого натурального n найдено положительное число $\varepsilon(n)$ такое, что окрестность $\varepsilon(n)\mathscr{E}+y_n$ не пересекается с $\mathscr{G}$.

ЛЕММА 5 (основная). *Пусть A — матрица Тёплица, $x_0, x_1, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ — два счетных множества ограниченных последовательностей, G — линейная оболочка $\{x_0, x_1, \ldots y_1, y_2, \ldots\}$, $\mathscr{G}$ — линейная оболочка $\{x_0, x_1, \ldots\}$, причем ни одна точка y_n не входит в замыкание $\mathscr{G}$ по $\mathfrak{A}$-топологии. Тогда существует окрестность $\mathscr{E}$ матрицы A такая, что ни одна точка $\{y_n\}$ не входит в замыкание $\mathscr{G}$ по $\overline{\mathscr{E}}$-нормировке, и для всякой такой фиксированной окрестности $\mathscr{E}$ и положительного числа ε можно определить на $\overline{G}$ (без постулата свободного выбора) линейный функционал l, для которого*

$$l(x)=0 \text{ для всех } x\in\mathscr{G}, \tag{19}$$

$$l(y_n)\neq 0 \text{ при всех } n=1, 2, \ldots, \tag{20}$$

$$|l(x)|\leqslant\varepsilon \text{ для всех } x\in\mathscr{E}\cap G \tag{21}$$

(*черта над буквой обозначает замыкание по норме* $\|\ \|$).

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно определить на G аддитивный функционал l_1, ограниченный на $\mathscr{E}\cap G$ и удовлетворяющий условиям (19) и (20). Действительно, $\mathscr{E}$ есть тело в R_2, так что $\mathscr{E}\cap\overline{G}$ есть тело в $\overline{G}$. Следовательно, функционал l_1, аддитивный на $\overline{G}$ и ограниченный на $\mathscr{E}$, является линейным функционалом и тогда линейный функционал

$$l=(\varepsilon:\sup|l_1(x)|)\,l_1$$

(где sup берется по всем $x\in\mathscr{E}\cap\overline{G}$), будет, очевидно, удовлетворять лемме 5.

С помощью леммы 4 образуем и зафиксируем окрестность $\mathscr{E}$ такую, что ни одна точка $\{y_n\}$ не входит в замыкание $\mathscr{G}$ по $\overline{\mathscr{E}}$-нормировке. Обозначим через $\mathscr{G}'$ пересечение $\overline{G}$ с замыканием $\mathscr{G}$ по $\overline{\mathscr{E}}$-нормировке и образуем фактор-пространство $\widetilde{G}=(\overline{G}/\mathscr{G}')$. Норму в $\widetilde{G}$ обозначим через $|\ |_1$. Образы точек и множеств из $\overline{G}$ при естественном отображении $\overline{G}\to\widetilde{G}$ будем обозначать прибавлением сверху значка $\sim$. Так как $\mathscr{G}'$ есть линейное замкнутое (в $\overline{G}$) подпространство $\overline{G}$, то в $\widetilde{O}$ (нуль $\widetilde{G}$) переходят только точки $\mathscr{G}'$. В частности, $\widetilde{y}_n\neq\widetilde{O}$. Мы построим l_1, если определим на $\widetilde{G}$ (с естественной нормировкой фактор-пространства) линейный функционал $\widetilde{l}_1$, ограниченный на $\widetilde{\mathscr{E}}$ и отличный от нуля на $\widetilde{y}_n\,(n=1, 2, \ldots)$. Действительно, тогда достаточно будет положить

$$l_1(x)=\widetilde{l}_1(\widetilde{x}).$$

1°. Покажем, что $\widetilde{\mathscr{E}}$ не содержит ни одного бесконечного луча. Пусть $\widetilde{x}$ — произвольная точка $\widetilde{G}$, отличная от $\widetilde{O}$ (нуль $\widetilde{G}$), а x' — какой-нибудь ее фиксированный прообраз. Тогда $x'\notin\mathscr{G}'$ и, следовательно,

существует положительное число $\varepsilon(x')$ такое, что $\varepsilon(x')\mathscr{E}+x'$ не пересекается с $\mathscr{G}'$. Но если x — любой прообраз $\tilde{x}$, то $x'=x+g$, где $g\in\mathscr{G}'$, так что $\varepsilon(x')\mathscr{E}+x+g$ не пересекает $\mathscr{G}'$, и, значит,

$$\varepsilon(x')\mathscr{E}+x \text{ не пересекает } \mathscr{G}'-g=\mathscr{G}'. \tag{22}$$

Таким образом, константа $\varepsilon(x')$, удовлетворяющая условию (22), — одна и та же для всех x, являющихся прообразами $\tilde{x}$. Обозначив ее через $\varepsilon(\tilde{x})$, получим:

$$\varepsilon(\tilde{x})\mathscr{E}+x \text{ не пересекает } \mathscr{G}'.$$

Но тогда

$$\varepsilon(\tilde{x})\tilde{\mathscr{E}}+\tilde{x} \text{ не пересекает (не содержит) } \tilde{O}$$

и

$$\varepsilon(\tilde{x})\tilde{\mathscr{E}}\not\ni\tilde{x}.$$

Следовательно, для каждого $\tilde{x}\neq\tilde{O}$ мы нашли положительное число $\varepsilon(\tilde{x})>0$ такое, что $\tilde{x}\notin\varepsilon(\tilde{x})\tilde{\mathscr{E}}$. Значит, $\tilde{\mathscr{E}}$ не содержит бесконечных лучей.

2°. $\tilde{\mathscr{E}}$ есть выпуклое тело, кроме того, это открытое множество, следовательно, $\tilde{\mathscr{E}}$ пересекается с каждой прямой $\{\lambda\tilde{x}\}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ по интервалу. Согласно 1°, этот интервал конечен. Добавим к $\tilde{\mathscr{E}}$ концы интервалов $\{\lambda\tilde{x}\}\cap\tilde{\mathscr{E}}$ ($\tilde{x}$ пробегает все $\tilde{G}$) и обозначим получившееся тело через $\mathscr{E}_2$.

Перенормируем $\tilde{G}$, приняв $\mathscr{E}_2$ за единичную сферу. При этом $\tilde{G}$ превратится снова в нормированное пространство; обозначим его через G_2. Норма $\tilde{x}$ в $\tilde{G}_2$ (обозначим ее через $|\tilde{x}|_2$), согласно 1°, равна нулю тогда и только тогда, когда $|\tilde{x}|_1=0$. В частности,

$$|\tilde{y}_n|_2\neq 0 \quad (n=1,\,2,\,\ldots).$$

В качестве искомого функционала $\tilde{l}_1$ можно взять любой линейный функционал l_2 на $\tilde{G}_2$, отличный от нуля в точках $\tilde{y}_n\,(n=1,\,2,\,\ldots)$. Построим l_2.

3°. Для каждого $n=1,\,2,\ldots$ в $\tilde{G}_2$ существует линейный функционал φ_n, отличный от нуля в точке $\tilde{y}_n$. Действительно, положим $\varphi_n(\lambda\tilde{y}_n)=\lambda$ на прямой $\{\lambda\tilde{y}_n\}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$ и продолжим φ_n на все $\tilde{G}_2$. В нашем счетномерном случае такое продолжение может быть выполнено без постулата свободного выбора.

Определим по индукции последовательность чисел n так, чтобы для функционалов

$$F_n=\varepsilon^1\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\ldots+\varepsilon^n\varphi_n$$

выполнялись условия:

$$F_n(\tilde{y}_\nu)\neq 0 \quad \text{для всех} \quad \nu\leqslant n, \tag{23}$$

$$|\varepsilon^n\varphi_n(\tilde{y}_\nu)|<|F_\varkappa(\tilde{y}_\nu)|:2^{n+1} \quad \text{для всех} \quad \nu\leqslant\varkappa<n, \tag{24}$$

$$|\varepsilon^n \varphi_n| \leqslant 1 : 2^{n+1}. \tag{25}$$

Положим $\varepsilon^1 = 1 : 2\,|\varphi_1|_2$; тогда при $n = 1$ условия (23) и (25) будут выполнены. Пусть $s \geqslant 1$ и числа ε^n уже определены и удовлетворяют условиям (23) и (25) для всех $n \leqslant s$. Если $F_s(\widetilde{y}_{s+1}) \neq 0$, то положим $\varepsilon^{s+1} = 0$. Если же $F_s(\widetilde{y}_{s+1}) = 0$, то возьмем ε^{s+1} столь малым положительным числом, чтобы и при $n = s+1$ выполнялись условия (23) и (25). Легко видеть, что для этого достаточно взять

$$\varepsilon^{s+1}\,|\varphi_{s+1}|_2 < 1 : 2^{s+2},$$

$$\varepsilon^{s+1} \max_{\nu \leqslant s} |\varphi_{s+1}(\widetilde{y}_\nu)| < \min_{\nu \leqslant \varkappa \leqslant s} |F_\varkappa(\widetilde{y}_\nu)| : 2^{s+2}.$$

По индуктивному предположению (23) получаем: $\varepsilon^{s+1} > 0$. Кроме того,

$$|F_{s+1}(\widetilde{y}_\nu)| > |F_s(\widetilde{y}_\nu)| - |\varepsilon^{s+1}\varphi_{s+1}(\widetilde{y}_\nu)| > 0 \text{ для всех } \nu \leqslant s.$$

Таким образом, и в случае $F_s(\widetilde{y}_{s+1}) = 0$ и в случае $F_s(\widetilde{y}_{s+1}) \neq 0$ условия (23) — (25) остаются верными и для $n = s+1$.

4°. Рассмотрим линейный функционал l_2, определенный рядом

$$l_2 = \varepsilon^1\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \ldots,$$

сходящимся по норме. Для любого $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ имеем:

$$l_2(\widetilde{y}_\nu) = F_\nu(\widetilde{y}_\nu) + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_n(\widetilde{y}_\nu),$$

так что

$$|l_2(\widetilde{y}_\nu)| \geqslant |F_\nu(\widetilde{y}_\nu)| - \sum_{n=\nu+1} |\varepsilon^n \varphi_n(\widetilde{y}_\nu)|.$$

Согласно условию (24), при $\nu < n$

$$|\varepsilon^n\varphi_n(\widetilde{y}_\nu)| < \frac{1}{2^{n+1}}\,|F_\nu(\widetilde{y}_\nu)|.$$

Таким образом,

$$|l_2(\widetilde{y}_\nu)| > 0 \text{ для всех } \nu = 1, 2, \ldots,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Преобразование и суммирование счетного числа последовательностей матрицей, более сильной, чем заданная

Приведем другую формулировку основной теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $e = x_0, x_1, \ldots$ и $e = z_0, z_1, \ldots$ — два равномощных и не более чем счетных множества ограниченных последовательностей, и пусть A — матрица Тёплица. Для того чтобы существовала матрица Тёплица B, которая суммирует все ограниченные последовательности, суммируемые матрицей A $(B \supseteq A)$, и преобразует после-*

довательность x_m в z_m (с точностью до последовательности, сходящейся к нулю):

$$\| B(x_m) - z_m \| = 0 \quad (m = 0,\ 1, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор β, заданный на $\{x_m\}$ равенствами $\beta(x_m) = z_m$ и продолженный по аддитивности на $\mathcal{G}$ (линейную оболочку $\{x_m\}$), был бы ограничен в $\mathfrak{A}$-топологии.

Ограниченность оператора β в естественной нормировке фактор-пространства $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$ не достаточна, а ограниченность β в A-нормировке не необходима.

Если достаточное условие выполнено, то для фиксированной окрестности $\mathcal{E}$ матрицы A, на которой оператор ограничен, матрицу B можно выбрать так, что

$$\sup_{x \in \mathcal{E}} \| B(x) \| = \sup_{x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{G}} \| \beta(x) \|.$$

Необходимое и достаточное условие теоремы 1 можно перефразировать еще и так: необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность $\mathcal{E}$ матрицы A, что после принятия $\overline{\mathcal{E}}$ за единичную сферу фактор-группы $(R / \mathfrak{A}_0)$ оператор β становился бы линейным оператором. Если достаточное условие выполнено, то матрицу B можно выбрать так, чтобы ее норма совпадала с нормой β (в упомянутом пространстве)

ТЕОРЕМА 2. 1°. *Для того чтобы существовала матрица Тёплица $B \supseteq A$, суммирующая ограниченные последовательности $e = x_0, x_1, \ldots$ к пределам $1 = a_0, a_0, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы функционал β, заданный на $\{x_m\}$ равенствами $\beta(x_m) = a_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$ и продолженный по аддитивности на $\mathcal{G}$ (линейную оболочку $\{x_m\}$), был ограничен в $\mathfrak{A}$-топологии.*

2°. *Ограниченность функционала β в естественной нормировке фактор-пространства $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$ может оказаться недостаточной.*

3°. *Если достаточное условие выполнено, то для всякой окрестности $\mathcal{E}$ матрицы A (на которой функционал β ограничен) матрицу B можно выбрать так, что*

$$\sup_{x \in \mathcal{E}} \| B(x) \| = \sup_{x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{G}} | \beta(x) |.$$

4°. *Для того чтобы матрица B, кроме того, могла не суммировать ограниченных последовательностей $y_1, y_2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы ни одна последовательность y_n не входила в замыкание $\mathcal{G}$ по $\mathfrak{A}$-топологии.*

5°. *Если условия 1° и 4° выполнены, то существует такая окрестность $\mathcal{E}$ матрицы A, что функционал β ограничен на $\mathcal{E}$, т. е.*

$$\sup_{x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{G}} | \beta(x) | < \infty,$$

и замыкание линейной оболочки $\{x_m\}$ в $\overline{\mathcal{E}}$-нормировке не содержит ни одной точки y_n.

6°. *Для каждой окрестности $\mathcal{E}$ с этими свойствами и $\varepsilon > 0$ можно подобрать матрицу Тёплица B, удовлетворяющую теореме и неравенству*

$$\sup_{x\in\mathscr{E}} \| B(x) \| < \sup_{x\in\mathscr{E}\cap\mathscr{G}} | \beta(x) | + \varepsilon.$$

7°. *Последовательности* $\{x_m\}$, $\{a_m\}$, $\{y_n\}$ *и матрица* A *могут оказаться такими, что для любой окрестности* $\mathscr{E}$ *матрицы* A *и любой матрицы* B, *удовлетворяющей теореме, будет иметь место неравенство*

$$\sup_{x\in\mathscr{E}} \| B(x) \| > \sup_{x\in\mathscr{E}\cap\mathscr{G}} | \beta(x) |.$$

Доказательство теоремы 2. Введем оператор

$$\beta_*(x) = \{\beta(x), \beta(x), \ldots\} = \beta(x) e.$$

Оператор β_* определен всюду, где задан функционал β, причем

$$\| \beta_*(x) \| = | \beta(x) |.$$

Если существует матрица B, удовлетворяющая условию 1°, то

$$\| B(x_n) - \beta_*(x_n) \| = 0$$

при всех n. Таким образом, из теоремы 1 следует необходимость и достаточность условия 1° и утверждение 3°.

Проверим необходимость условия 4°. Если искомая матрица B существует, то она определяет $\mathfrak{B}$-топологию, которая слабее $\mathfrak{A}$-топологии [см. ([1])]. Если матрица B не суммирует некоторой последовательности y, то

$$\overline{\lim}\, B^n(y) - \underline{\lim}\, B^n(y) > \Delta > 0.$$

В таком случае окрестность $y + \{\| B(x) \| < \Delta\}$ матрицы B вокруг точки y не содержит последовательностей, суммируемых матрицей B. В частности, эта окрестность не пересекает $\mathscr{G}$. Необходимость условия 4° доказана.

Обозначим через G общую линейную оболочку $x_0, x_1, \ldots, y_1, y_2, \ldots$. Если условие 1° выполнено, то существует окрестность $\mathscr{E}_1$ матрицы A, на которой функционал β ограничен, т. е.

$$\sup | \beta(x) | = M < \infty,$$

где sup берется по всем $x \in \mathscr{E}_1 \cap G$. Но тогда, по известной лемме Гана, линейный функционал β можно продолжить на G так, что

$$\sup | \beta(x) | = M,$$

где sup берется по всем $x \in \overline{\mathscr{E}_1 \cap G}$. Для проверки достаточно принять замыкание $\overline{\mathscr{E}_1 \cap G}$ за единичную сферу линейного множества G. Согласно лемме 4, существует окрестность $\mathscr{E}_2$ матрицы A, такая, что ни одна точка $\{y_n\}$ не входит в замыкание $\mathscr{G}$ по $\overline{\mathscr{E}}_2$-нормировке. Пусть $\mathscr{E}$ — какая-нибудь окрестность A, содержащаяся в пересечении $\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2$. Тогда $\mathscr{E}$, очевидно, удовлетворяет условию 5°.

Проверим достаточность условия 4° и справедливость условия 6°. Если условие 4° имеет место, то существует окрестность $\mathscr{E}$ со свойствами 5°. Согласно лемме 5, для $\mathscr{E}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется функционал

l со свойствами (19)—(21). Введем оператор

$$\beta_*(x) = \{\beta(x),\ \beta(x) + l(x),\ \beta(x),\ \beta(x) + l(x), \ldots\}.$$

Он, очевидно, аддитивен и ограничен на $\mathscr{E} \cap G$ и

$$\sup_{x \in \mathscr{E} \cap G} \| \beta_*(x) \| \leqslant \sup_{x \in \mathscr{E} \cap \mathscr{G}} \| \beta(x) \| + \varepsilon.$$

По теореме 1, существует матрица Тёплица B, для которой

$$B \supseteq A, \quad \| B(x_m) - \beta_*(x_m) \| = 0, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} \| B(x) \| = \sup_{x \in \mathscr{E} \cap G} \| \beta_*(x) \|, \quad \| B(y_n) - \beta_*(y_n) \| = 0, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

При $x = x_m$ функционал $l(x) = 0$, поэтому последовательность $B(x_m)$ сходится к пределу a_m вслед за последовательностью $\beta_*(x_m)$. При $x = y_n$ функционал $l(x) \neq 0$ и последовательности $B(y_n)$ и $\beta_*(y_n)$ расходятся. Достаточность условия 4° доказана. При этом, по построению матрицы B и в силу продолжения β на G, имеем:

$$\sup_{x \in \mathscr{E}} \| B(x) \| = \sup_{x \in \mathscr{E} \cap G} \| \beta_*(x) \| \leqslant \sup_{x \in \mathscr{E} \cap G} \| \beta(x) \| + \varepsilon.$$

Условие 6° доказано. Условие 7° доказывается в примере 1 § 5, а условие 2° — в примере 2 § 5.

§ 3. Преобразование и суммирование конечного числа последовательностей матрицей, более сильной, чем заданная

Если задано конечное число последовательностей, то условия § 2, естественно, упрощаются. Происходит это потому, что конечномерное линейное пространство имеет одну единственную топологию, если в ней разделяется любая пара точек. В этой топологии всякий аддитивный функционал ограничен и, следовательно, линеен.

Пусть ограниченные последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы как векторы в фактор-группе $(R / \mathfrak{A}_0)$, т. е. существуют не все равные нулю числа $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^m$ такие, что последовательность

$$\lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots + \lambda^m x_m \tag{*}$$

входит в нуль фактор-группы $(R / \mathfrak{A}_0)$. Этому факту можно придать несколько тривиально эквивалентных формулировок:

а) существуют такие, не все равные нулю, числа $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^m$, что последовательность (*) суммируется к нулю матрицей A;

б) существуют такие, не все равные нулю, числа $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^m$, что последовательность

$$\lambda^1 A(x_1) + \lambda^2 A(x_2) + \ldots + \lambda^m A(x_m)$$

сходится к нулю, или, что то же самое, образы $\{x_\mu\}$ в преобразовании матрицей A, т. е. $\{A(x_\mu)\}$ линейно зависимы как векторы R_2.

Иногда нам будет удобно выражать это же обстоятельство другими словами: среди последовательностей $\{x_\mu\}$ в фактор-группе $(R / \mathfrak{A}_0)$

имеется линейная зависимость

$$\lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots + \lambda^m x_m = O_{\mathfrak{A}_0} \quad (O_{\mathfrak{A}_0} \in \mathfrak{A}_0).$$

Сформулируем частные случаи теорем 1 и 2, когда задано конечное число последовательностей.

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть даны матрица Тёплица A и два множества ограниченных последовательностей:*

$$e = x_0,\ x_1, \ldots, x_m,$$
$$e = z_0,\ z_1, \ldots, z_m.$$

Для того чтобы существовала матрица Тёплица $B \supseteq A$, переводящая последовательности $\{x_\mu\}$ в последовательности $\{z_\mu\}$ (с точностью до последовательностей, сходящихся к нулю), необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное соотношение между последовательностями $\{x_\mu\}$ как векторами фактор-группы $(R / \mathfrak{A}_0)$ выполнялось бы и для последовательностей $\{z_\mu\}$ как векторов R_2 *.

ТЕОРЕМА 2′. *Для того чтобы существовала матрица Тёплица $B \supseteq A$ суммирующая ограниченные последовательности $e = x_0, x_1, \ldots, x_m$ к пределам $1 = a_0, a_1, \ldots, a_m$, необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное соотношение между $\{x_\mu\}$ как векторами фактор-группы $(R / \mathfrak{A}_0)$ выполнялось и между числами $\{a_\mu\}$.*

Для того чтобы матрица B, кроме того, могла не суммировать ограниченных последовательностей $y_1, y_2, \ldots, y_n$, необходимо и достаточно, чтобы каждая последовательность y_ν была линейно независима от последовательностей $\{x_\mu\}$ в фактор-группе $(R / \mathfrak{A}_0)$.

§ 4. Преобразование и суммирование конечного или счетного числа последовательностей матрицей Тёплица

Эта задача получается из § 3 как частный случай при $A = E$. Окрестности $\mathscr{E}$ матрицы E суть сферы R_2. Таким образом, мы получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1″. *Пусть даны два равномощных и не более чем счетных множества ограниченных последовательностей*

$$e = x_0, x_1, \ldots,$$
$$e = z_0, z_1, \ldots.$$

Для того чтобы существовала матрица Тёплица B, переводящая x_m в z_m (с точностью до последовательности, сходящейся к нулю) ($m = 0, 1, \ldots$), необходимо и достаточно, чтобы оператор β, заданный на $\{x_m\}$ равенствами $\beta(x_m) = z_m$ и продолженный по аддитивности на $\mathscr{G}$ (линейную оболочку $\{x_m\}$), был линейным оператором при нормировках $x \in \mathscr{G}$ и $z \in \beta(\mathscr{G})$, равных $\|x\|$ и $\|z\|$.

* Это значит: если для некоторых $\{\lambda^\mu\}$ $\sum_{\mu=0}^{m} \lambda^\mu x_\mu \in \mathfrak{A}_0$, то $\sum_{\mu=0}^{m} \lambda^\mu z_\mu$ сходится к нулю. В частности, если последовательности $\{x_\mu\}$ линейно независимы, то в этом и только в этом случае последовательности $\{z_\mu\}$ могут быть любыми.

Если достаточное условие выполнено, то норма оператора β *(на* $\mathcal{G}$*) равна минимуму (достижимому) норм матрицы* B.

ТЕОРЕМА 2″. *Для существования матрицы Тёплица* B, *суммирующей ограниченные последовательности* $e = x_0, x_1, \ldots$ *к пределам* $1 = a_0, a_1, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы функционал* β, *принимающий в точках* x_m *значения* a_m *и продолженный по аддитивности на* $\mathcal{G}$ *(линейную оболочку* $\{x_m\}$*), был линейным функционалом (норма на* $\mathcal{G}$ *принята равной* $\|x\|$*). Если это условие выполнено, то норма функционала* β *(на* $\mathcal{G}$*) равна минимуму (достижимому) норм матриц* B.

Для того чтобы матрица B, *кроме того, могла не суммировать ограниченных последовательностей* $y_1, y_2, \ldots$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одна последовательность* y_n *не входила в замыкание* $\mathcal{G}$ *(по* $\|x\|$*).*

Если оба достаточных условия выполнены, но норма функционала β *на* $\mathcal{G}$ *равна нижней грани (может быть, недостижимой) норм матриц* B.

Доказательства требует только последний абзац. Оно приведено в примере 1 § 5.

Отметим, наконец, частные случаи этих теорем, когда задано конечное число последовательностей.

ТЕОРЕМА 1‴. *Для существования матрицы Тёплица* B, *преобразующей ограниченные последовательности* $e = x_0, x_1, \ldots, x_m$ *в ограниченные последовательности* $e = z_0, z_1, \ldots, z_m$, *необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное соотношение между последовательностями* $\{x_\mu\}$ *как векторами* R_2 *выполнялось и для последовательностей* $\{z_\mu\}$ *как векторов* R_2.

ТЕОРЕМА 2‴. *Для существования матрицы Тёплица* B, *суммирующей ограниченные последовательности* $e = x_0, x_1, \ldots, x_m$ *к пределам* $1 = a_0, a_1, \ldots, a_m$, *необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное соотношение между последовательностями* $\{x_\mu\}$ *в* R_2 *выполнялось и для чисел* $\{a_\mu\}$. *Если это условие выполнено, то норма (в* R_2*) функционала* β, *определенного на* $\mathcal{G}$ *(линейной оболочке* $\{x_\mu\}$*) и принимающего в точках* x_μ *значения* a_μ, *равна минимуму (достижимому) норм матриц* B.

Для того чтобы матрица B, *кроме того, могла не суммировать ограниченных последовательностей* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одна из последовательностей* y_ν *не являлась линейной комбинацией последовательностей* $\{x_\mu\}$ *в* R_2.

Если оба достаточных условия выполнены, то норма в R_2 *функционала* β *на* $\mathcal{G}$ *есть нижняя грань (может быть, недостижимая) норм матриц Тёплица* B, *удовлетворяющих теореме.*

Доказательства требует только последний абзац. Оно приведено в примере 1 § 5.

§ 5. Примеры

Пример 1. Пусть

$$e = x_0 = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\},$$
$$x_1 = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots\},$$
$$y_1 = \{0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots\}.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует матрица Тёплица

$$B_\varepsilon = \left\| \begin{matrix} +\varepsilon, & -\varepsilon, & 1, & 0, & 0, & 0, \dots \\ 0, & 0, & 0, & +\varepsilon, & -\varepsilon, & 1, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|$$

с нормой $\| B_\varepsilon \| = | B_\varepsilon | = 1 + 2\varepsilon$, которая суммирует x_0 к пределу, равному 1, x_1 — к 1, но не суммирует y_1.

Всякая матрица Тёплица B, суммирующая x_1 к 1 и имеющая норму, равную 1, просуммирует и последовательность y_1. Действительно, для такой матрицы

$$B^\tau (x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{3k}^\tau x_1^k \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 1,$$

$$| B^\tau | = \sum_{k=1}^{\infty} | b_k^\tau | \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 1,$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} | b_{3k-1}^n | \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 0$$

и, значит,

$$B^\tau (y_1) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{3k}^\tau + \sum_{k=1}^{\infty} b_{3k-1}^\tau \xrightarrow[\tau \to \infty]{} 1.$$

Пример 2. Существуют матрица Тёплица A, счетное множество ограниченных последовательностей $x_0, x_1, \dots$ и аддитивный функционал β, определенный на $\mathcal{G}$ (линейной оболочке $\{x_0, x_1, \dots\}$), такие, что

а) функционал β линеен в естественной нормировке фактор-пространства $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$;

б) функционал β не ограничен по $\mathfrak{A}$-топологии.

Построение. В силу примера 1 из работы (³), существует последовательность матриц Тёплица $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ и последовательностей $x_1, x_2, \dots$ таких, что

$$| A_n | = 1, \quad | x_n | = 1, \quad \| A_1 (x_n) \| \leqslant 1 : n, \quad A_n^\infty (x_n) = 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Для построения нужного нам примера положим $A = A_1$, $\beta (x_n) = 1$ и продолжим β по аддитивности на $\mathcal{G}$. Покажем, что A, β, $\mathcal{G}$ обладают нужными свойствами.

1°. В естественной нормировке фактор-пространства $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$ норма β не превосходит 1. Действительно, пусть y имеет в $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$-нормировке норму $\leqslant 1$. Тогда $y = z + v$, где $\| z \| \leqslant 1$ и $\| A (v) \| = 0$. Пусть, далее, $y \in \mathcal{G}$ и фиксирован до конца рассуждения; тогда y представляется в виде суммы некоторого фиксированного числа $1 + m$ членов:

$$y = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu x_\nu.$$

Обозначим через $\mathcal{G}_n$ линейную оболочку первых $1+n$ последовательностей $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Имеем: $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}$. На $\mathcal{G}_n$ функционал $\beta(x)$ совпадает с функционалом $A_n^\infty(x)$, поэтому

$$|\beta(y)| = |A_m^\infty(y)| \leqslant |A_m^\infty(z)| + |A_m^\infty(v)|.$$

Но $|A_m^\infty(z)| \leqslant |A_m| \, \| z \|$, а $A_m^\infty(v) = 0$, ибо $A_m \supset A_1 = A$, и последовательность $A(v)$ сходится к нулю. Значит, $|\beta(y)| \leqslant \| z \| \leqslant 1$ и норма β в $(R_2 / \mathfrak{A}_0)$ не превосходит единицы.

2°. Функционал $\beta(x)$ $(x \in \mathcal{G})$ не ограничен в $\mathfrak{A}$-топологии, потому что не существует окрестности $\mathcal{E}$ матрицы A, на которой $|\beta(x)|$ ограничен константой, меньшей единицы. Действительно, в любую окрестность $\mathcal{E}$ войдут все точки $\{x_n\}$, начиная с некоторой.

Пример 3. В условиях примера 2 функционал β можно заменить оператором β_*.

Доказательство. Очевидно, достаточно ввести оператор

$$\beta_*(e) = e\beta(x) = \{\beta(x), \beta(x), \ldots\}.$$

При этом в любой точке, где определен β, будем иметь:

$$\| \beta_*(x) \| = |\beta(x)|.$$

Пример 4. Существуют матрица Тёплица A, счетное множество ограниченных последовательностей $\{x_0, x_1, \ldots\}$ и аддитивный оператор β, определенный на $\mathcal{G}$ (линейной оболочке $\{x_0, x_1, \ldots\}$), такие, что оператор β линеен (ограничен) в $\mathfrak{A}$-топологии, но не ограничен в A-нормировке.

Построение. В силу примера из работы ([1]) [§ 2, п. 2)], существуют две равносильные матрицы Тёплица A и B и счетное число последовательностей $\{x_0, x_1, \ldots\}$ такие, что

$$\| x_n \| \leqslant 1, \quad \| A(x_n) \| \leqslant 1 : n, \quad \| B(x_n) \| = 1 : \sqrt{n};$$

тогда для $y_n = n x_n$ будет:

$$\| y_n \| \leqslant n, \qquad \| A(y_n) \| \leqslant 1, \qquad \| B(y_n) \| = \sqrt{n}.$$

Оператор $\beta(x)$ положим равным $B(x)$. Тогда оператор $B(x)$ не будет ограничен в A-нормировке, ибо $\| \beta(y_n) \| \to \infty$, а все точки y_n имеют A-норму $\| A(y_n) \| \leqslant 1$.

Оператор $\beta(x)$ ограничен в $\mathfrak{A}$-топологии. Действительно, матрицы A и B равносильны, поэтому $\mathfrak{A}$- и $\mathfrak{B}$-топологии совпадают. Но в $\mathfrak{B}$-топологии оператор β ограничен. Например, на окрестности $\mathcal{E} = \{\| B(x) \| \leqslant 1\}$ заведомо $\| \beta(x) \| \leqslant 1$.

Институт
электронных управляющих машин
Ак. наук СССР

Поступило
4. XI. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брудно А. Л., Топология полей Тёплица, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 771—780.

[2] Agnew R. P., Convergence fields of methods of summability, Ann. of Math., 46 (1945), 93—101.

Erdos P. and Rosenbloom P. C., Toeplitz Methods which sum a given sequence, Bull. of the Amer. Math. Soc., 52 № 6 (1946), 463—464.

[3] Брудно А. Л., Суммирование ограниченных последовательностей, Матем. сборн., 16 (58): 2 (1945), 191—247.

[4] Брудно А. Л., Нормы полей, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 1 (1953), 11—14.

[5] Брудно А. Л., Относительные нормы, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 2 (1953), 197—200.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 411—442

А. Х. ТУРЕЦКИЙ

О КЛАССАХ НАСЫЩЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ C

В работе доказываются теоремы о классах насыщения в пространстве C. С помощью этих теорем определяются классы насыщения в пространстве C для многих известных методов суммирования.

1. Настоящая работа посвящена проблеме Фавара отыскания классов насыщения для методов суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций. Проблема насыщения была впервые поставлена Фаваром в 1937 г. в работе ([1]), где она сформулирована следующим образом: «Задан метод γ суммирования рядов Фурье, требуется определить класс функций, для которых этот метод является наилучшим». В обзорных работах ([2]), ([3]), а также в статье ([4]) Фавар дает определение насыщенного метода и класса насыщения для методов суммирования биортогональных рядов в пространстве Банаха. Так как в этой работе мы занимаемся определением классов насыщения в пространстве C, то мы будем пользоваться определением насыщенного метода суммирования и класса насыщения в следующей форме.

Пусть задан метод суммирования γ, определенный последовательностью функций $\gamma_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, заданных на некотором множестве изменения параметра ξ с точкой сгущения ω, которая может быть и бесконечностью, т. е. каждой непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$ с рядом Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

приводится в соответствие ряд

$$F(x, \xi) = F(x, \xi, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(\xi) (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

который мы предполагаем сходящимся равномерно относительно x, по крайней мере для значений ξ из окрестности ω (эта окрестность, вообще говоря, зависит от f).

Пусть существует положительная функция $\varphi_\gamma(\xi)$, монотонно сходящаяся к нулю при $\xi \to \omega$, такая, что для любой непрерывной 2π-периодической функции $f(x)$, отличной от тригонометрического полинома порядка ν (ν — фиксированное натуральное число или нуль),

$$\max_x |f(x) - F(x, \xi)| > a\varphi_\gamma(\xi).$$

где $a > 0$ — константа, зависящая от f, и пусть, кроме того, существуют функции $f(x)$ (отличные от тригонометрических полиномов порядка ν), для которых

$$\max_x |f(x) - F(x, \xi)| < b\,\varphi_\gamma(\xi),$$

где $b > 0$ — другая константа, также зависящая от f. Тогда будем говорить, что метод суммирования γ является *насыщенным порядка* ν *с приближением насыщения порядка* $O(\varphi_\gamma(\xi))$. *Классом насыщения порядка* ν, *относящимся к методу* γ, назовем множество непрерывных 2π-периодических функций, отличных от тригонометрических полиномов порядка ν, для которых

$$\max_x |f(x) - F(x, \xi)| = O(\varphi_\gamma(\xi)).$$

В случае $\nu = 0$ мы будем говорить о насыщенном методе и классе насыщения (опуская слова «порядка нуль»).

В решении проблемы определения классов насыщения уже получено много результатов. Алексич ([5]), ([6]) определил классы насыщения для метода суммирования Фейера в пространствах C и $L_p (1 \leqslant p < +\infty)$. Заманский ([7]), ([8]) определил классы насыщения в пространстве C для наиболее употребительных методов суммирования. Бутцер ([9]) изложил (без доказательства) теоремы, в которых определяются классы насыщения для метода Абеля — Пуассона суммирования рядов Фурье в пространстве $L_p(-\pi, +\pi)$ и процессов приближения сингулярными интегралами Гаусса — Вейерштрасса и Пуассона в пространстве $L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$. Фавар ([4]) дал некоторый общий метод для определения классов насыщения и применил его к методам суммирования Чезаро в пространствах C и $L_p (p \geqslant 1)$. Альянчич ([10]), ([11]), пользуясь методом Фавара ([4]), определил класс насыщения метода Рисса в пространстве C и метода Гёльдера натурального порядка в пространствах C и L_p $(p \geqslant 1)$. Ф. И. Харшиладзе ([12]) доказал одну общую теорему, на основании которой им были определены классы насыщения некоторых методов суммирования в пространствах C и L_p. Суноути и Ватари ([13]), видимо, независимо от Харшиладзе, доказали частный случай его общей теоремы, на основании которого ими были определены классы насыщения некоторых методов в пространствах C и L_p; впрочем, большинство их результатов получено другими авторами независимо от них. Автором ([14]) — ([19]) были также получены некоторые результаты, касающиеся решения проблемы в пространстве C.

2. Следующая теорема позволяет определить класс насыщения во многих случаях; из нее, в частности, следуют почти все известные до сих пор результаты о классах насыщения в пространстве C.

Эта теорема (без доказательства) опубликована в работе ([18]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть для заданного метода суммирования* γ, *определенного последовательностью функций* $\gamma_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *заданных на некотором множестве изменения параметра* ξ *с точкой сгущения* ω, *существуют:*

1) *положительная функция* $\varphi_\gamma(\xi)$, *монотонно сходящаяся к нулю при* $\xi \to \omega$,

2) *натуральное число* p *и константы* $d_0 \neq 0, d_1, \ldots, d_p$ *такие, что для всякого фиксированного натурального* k

$$\lim_{\xi \to \omega} \frac{1-\gamma_k(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} = d_0 k^p + \cdots + d_p. \tag{3}$$

Тогда метод суммирования γ *является насыщенным с приближением насыщения порядка* $O(\varphi_\gamma(\xi))$. *Из соотношения*

$$\max_x |f(x) - F(x, \xi, f)| = O(\varphi_\gamma(\xi)) \tag{4}$$

следует, что при четном p *функция* $f(x)$ *имеет производную порядка* $p-1$, *удовлетворяющую условию Липшица порядка единицы:*

$$f^{(p-1)}(x) \in \mathrm{Lip}\, 1, \tag{5}$$

а при нечетном p *этим свойством обладает функция* $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}^{(p-1)}(x) \in \mathrm{Lip}\, 1, \tag{6}$$

где $\tilde{f}(x)$ *обозначает функцию, тригонометрически сопряженную с* $f(x)$, *т. е.*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx). \tag{7}$$

Если, кроме условия (3), *метод суммирования* γ *удовлетворяет еще условию: существует константа* $K > 0$ *такая, что*

$$\begin{gathered} |F(x, \xi, f)| \leqslant KM, \\ M = \max_x |f(x)|, \end{gathered} \tag{8}$$

то справедливо и обратное утверждение: из (5) *при четном* p, *или из* (6) *при нечетном* p *следует соотношение* (4).

Таким образом, если метод суммирования γ *удовлетворяет условиям* (3) *и* (8), *то класс насыщения для этого метода есть множество функций, удовлетворяющих* (5) *или* (6), *смотря по тому, будет ли число* p *четным или нечетным.*

Замечание. Заманский (7) доказал, что условие (5) равносильно тому, что для всех вещественных x и достаточно малых неотрицательных h

$$|\Delta_h^p f(x)| = O(h^p), \tag{9}$$

где $\Delta_h^p f(x)$ — конечная разность функции $f(x)$ порядка p, определенная равенством

$$\Delta_h^p f(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f[x + (p-2k)h]. \tag{10}$$

Это обстоятельство мы используем при доказательстве теоремы.

Доказательство теоремы 1. Тот факт, что метод суммирования γ является насыщенным с приближением насыщения порядка $O(\varphi_\gamma(\xi))$, вытекает из следующего утверждения.

Если для заданного метода суммирования γ существует положительная функция $\varphi_\gamma(\xi)$, монотонно стремящаяся к нулю при $\xi \to \omega$, и функция от k $c_k \neq 0$, такая, что для всякого фиксированного натурального k

$$\lim_{\xi \to \omega} \frac{1-\gamma_k(\xi)}{\varphi_\gamma(\xi)} = c_k, \tag{11}$$

то метод суммирования γ является насыщенным с приближением насыщения порядка $O(\varphi_\gamma(\xi))$.

Это утверждение является частным случаем одной более общей теоремы Фавара ([4]). Впрочем, оно было доказано нами в работе ([14]) независимо от Фавара следующим образом. Пусть для некоторой последовательности $\xi_n \to \omega$ и функции $f(x)$

$$\max_x |f(x) - F(x, \xi_n, f)| = o(\varphi_\gamma(\xi_n));$$

тогда из равенства

$$[1-\gamma_k(\xi_n)]\, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x, \xi_n, f)] \cos kx\, dx,$$

где k — любое фиксированное натуральное число, мы получаем:

$$|1-\gamma_k(\xi_n)|\,|a_k| = o(\varphi_\gamma(\xi_n)).$$

Отсюда и из (11) находим;

$$|a_k| \sim \frac{o(\varphi_\gamma(\xi_n))}{|c_k|\, \varphi_\gamma(\xi_n)}.$$

Значит, $a_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$. Аналогично, $b_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны, например для функции $f(x) = \cos x$ мы имеем

$$F(x, \xi, f) = \gamma_1(\xi) \cos x$$

и, учитывая (11),

$$|f(x) - F(x, \xi, f)| = |1-\gamma_1(\xi)|\,|\cos x| < b\, \varphi_\gamma(\xi).$$

Доказательство первой половины теоремы — необходимости — может быть получено из упомянутой выше теоремы Ф. И. Харшиладзе ([12]), использующей идеи работы Фавара ([4]). Нами эта половина теоремы для случая $d_1 = \cdots = d_p = 0$ была доказана раньше, до появления у нас работы Фавара, и изложена в работе ([14]). Хотя наше доказательство несколько длинно, но по идее оно просто и, на наш взгляд, не лишено интереса. Мы изложим здесь это доказательство для общего случая, ограничиваясь предположением, что p четное, так как для нечетного p доказательство аналогично.

Пусть дано соотношение (4), которое перепишем в виде

$$|f(x) - F(x, \xi, f)| \leqslant A\varphi_\gamma(\xi), \tag{4'}$$

где $A > 0$ — константа.

Из (4′) и равенства

$$[1-\gamma_k(\xi)]\, a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x, \xi)] \cos kx\, dx \tag{12}$$

получаем:

$$|a_k| \leqslant \frac{2A\varphi_\gamma(\xi)}{|1-\gamma_k(\xi)|},$$

откуда, перейдя к пределу при $\xi \to \omega$ и учитывая (3), выводим:

$$|a_k| \leqslant \frac{2A}{|d_0 k^p + \dots + d_p|} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Точно такое же неравенство можно получить для коэффициентов b_k $(k = 1, 2, \dots)$. Значит, ряд Фурье (1) функции $f(x)$ и ряд (7) сходятся равномерно.

В дальнейшем вместо p будем писать $2p$.

Используя равенство (10) и тождество

$$2\sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu C_{2p}^{p+\nu} \cos 2\nu x + C_{2p}^{p} = 2^{2p} \sin^{2p} x, \tag{13}$$

нетрудно получить равенство

$$\Delta_h^{2p} f(x) = (-1)^p\, 2^{2p} \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2p} kh\, (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Обозначим через $S_{n,\,2p}(x, h)$ n-ю частную сумму последнего ряда:

$$S_{n,\,2p}(x, h) = (-1)^p 2^{2p} \sum_{k=1}^{n} \sin^{2p} kh\, (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Подставив сюда значения коэффициентов a_k и b_k из (12) (и соответствующей формулы для b_k), находим:

$$S_{n,\,2p}(x, h) = \frac{(-1)^p 2^{2p}}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [f(x+u) - F(x+u, \xi)] \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^{2p} kh \cos ku}{1-\gamma_k(\xi)}\, du.$$

Учитывая (4′), получаем оценку:

$$|S_{n,\,2p}(x, h)| \leqslant \frac{A 2^{2p+1}}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_\gamma(\xi)}{1-\gamma_k(\xi)} \sin^{2p} kh \cos ku \right| du.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $\xi \to \omega$. Приняв во внимание (3), получим:

$$|S_{n,\,2p}(x, h)| \leqslant \frac{A 2^{2p+1}}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^{2p} kh \cos ku}{d_0 k^{2p} + \dots + d_{2p}} \right| du.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$, найдем:

$$|\Delta_h^{2p} f(x)| \leqslant \frac{A 2^{2p+1}}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^{2p} kh \cos ku}{d_0 k^{2p} + \dots + d_{2p}} \right| du.$$

Обозначим для краткости

$$I_h = \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2p} \sin^{2p} kh \cos ku}{d_0 k^{2p} + \cdots + d_{2p}} \right| du; \tag{14}$$

тогда имеем:

$$|\Delta_h^{2p} f(x)| \leqslant \frac{2A}{\pi} I_h. \tag{15}$$

Делением легко получить равенство

$$\frac{1}{d_0 k^{2p} + \cdots + d_{2p}} = \frac{1}{d_0 k^{2p}} - \frac{d_1}{d_0^2 k^{2p+1}} + \frac{1}{k^{2p+2}} \frac{c_0 + \frac{c_1}{k} + \cdots + \frac{c_{2p-1}}{k^{2p-1}}}{d_0 + \frac{d_1}{k} + \cdots + \frac{d_{2p}}{k^{2p}}},$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{2p-1}$ весьма просто выражаются через коэффициенты $d_0, d_1, \ldots, d_{2p}$. Таким образом,

$$I_h \leqslant \frac{1}{|d_0|} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2p} \sin^{2p} kh \cos ku}{k^{2p}} \right| du + \left| \frac{d_1}{d_0^2} \right| \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2p} \sin^{2p} kh \cos ku}{k^{2p+1}} \right| du +$$

$$+ \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2p} \sin^{2p} kh \cos ku}{k^{2p+2}} \frac{c_0 + \frac{c_1}{k} + \cdots + \frac{c_{2p-1}}{k^{2p-1}}}{d_0 + \frac{d_1}{k} + \cdots + \frac{d_{2p}}{k^{2p}}} \right| du = \frac{1}{|d_0|} I_1 + \left| \frac{d_1}{d_0^2} \right| I_2 + I_3. \tag{16}$$

Оценим интеграл I_3. Очевидно, вторая дробь, стоящая под знаком суммы, ограничена для всех натуральных k:

$$\left| \frac{c_0 + \frac{c_1}{k} + \cdots + \frac{c_{2p-1}}{k^{2p-1}}}{d_0 + \frac{d_1}{k} + \cdots + \frac{d_{2p}}{k^{2p}}} \right| \leqslant M,$$

где $M > 0$ — константа. Значит,

$$I_3 \leqslant M \int_0^\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2p} k^{2p} h^{2p}}{k^{2p+2}} du = \frac{\pi^3}{3} M 2^{2p-1} h^{2p}. \tag{17}$$

Оценим интеграл I_1. Используя (13), получаем:

$$I_1 = \int_0^\pi \left| \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu C_{2p}^{p+\nu} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(u+2\nu h)}{k^{2p}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(u-2\nu h)}{k^{2p}} \right] + C_{2p}^{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^{2p}} \right| du.$$

Учитывая формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ku}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p-1} (2\pi)^{2p}}{2\,(2p)!} B_{2p}\left(\frac{u}{2\pi}\right),$$

справедливую для значений u из промежутка $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ ($B_{2p}(x)$ — полином Бернулли степени $2p$), перепишем I_1 в виде:

$$I_1 = \frac{(2\pi)^{2p}}{2\,(2p)!}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\int_{2sh}^{2(s+1)h}\left|\sum_{\nu=1}^{s}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}\left[B_{2p}\left(\frac{u+2\nu h}{2\pi}\right)+B_{2p}\left(\frac{u-2\nu h}{2\pi}\right)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=s+1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}\left[B_{2p}\left(\frac{2\nu h+u}{2\pi}\right)+B_{2p}\left(\frac{2\nu h-u}{2\pi}\right)\right]+C_{2p}^{p}B_{2p}\left(\frac{u}{2\pi}\right)\right|du+$$

$$\left.+\int_{2ph}^{2\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}C_{p}^{p+\nu}\left[B_{2p}\left(\frac{u+2\nu h}{2\pi}\right)+B_{2p}\left(\frac{u-2\nu h}{2\pi}\right)\right]+C_{2p}^{p}B_{2p}\left(\frac{u}{2\pi}\right)\right|du\right\}.$$

Используем теперь формулу

$$B_{2p}(\alpha+\beta)+B_{2p}(\alpha-\beta)=2\sum_{k=0}^{p}C_{2p}^{2k}\alpha^{2k}\beta^{2p-2k}-$$

$$-2\sum_{k=1}^{p}kC_{2p}^{2k}\alpha^{2k-1}\beta^{2p-2k}+2\sum_{k=1}^{p}C_{2p}^{2k}\beta^{2p-2k}\sum_{r=1}^{k}C_{2k}^{2r}\alpha^{2k-2r}$$

(B_{2p} — числа Бернулли), которую нетрудно получить на основании свойств полиномов и чисел Бернулли, и тождества

$$2\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}+C_{2p}^{p}=0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}\nu^{2l}=0$$

$$(l=1,\ldots,p-1),$$

получаемые вычислением производной порядка $2l$ равенства (13) в точке $x=0$. Тогда наш интеграл примет вид:

$$I_1=\frac{2^{2p-1}\pi}{(2p)!}\left\{\sum_{s=0}^{p-1}\int_{2sh}^{2(s+1)h}\left|\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}(\nu h)^{2p}-\right.\right.$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{s}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}\sum_{k=1}^{p}kC_{2p}^{2k}\left(\frac{u}{2}\right)^{2k-1}(\nu h)^{2p-2k}-$$

$$-2\sum_{\nu=s+1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}\sum_{k=0}^{p-1}(p-k)\,C_{2p}^{2k}\left(\frac{u}{2}\right)^{2k}(\nu h)^{2p-2k-1}-$$

$$\left.\left.-p\,C_{2p}^{p}\left(\frac{u}{2}\right)^{2p-1}\right|du+\frac{\pi-ph}{\pi}\left|\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}C_{2p}^{p+\nu}(\nu h)^{2p}\right|\right\}.$$

Отсюда следует оценка

$$I_1\leqslant C_p' h^{2p}, \tag{18}$$

где константа C_p' зависит только от p.

Оценим интеграл I_2. Обозначив

$$\varphi(u)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^{2p}kh\cos ku}{h^{2p}k^{2p+1}},$$

получим:

$$\varphi'(u) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2p}\sin ku.$$

Легко заметить, что $\varphi'(u)$ получается применением $2p-1$ раз операции усреднения к функции

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kh}{kh}\sin ku$$

[см. ([20]), стр. 137, 187]. Последняя функция неотрицательна для значений $0 \leqslant u$, $h \leqslant \pi$, так как, воспользовавшись равенством

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k} = -\lg\left(2\sin\frac{x}{2}\right) \quad (0 < x < 2\pi),$$

легко получить, что

$$\psi(u) = \frac{1}{2h}\lg\frac{\sin\frac{h+u}{2}}{\sin\frac{h-u}{2}}, \qquad 0 \leqslant u < h,$$

$$\psi(u) = \frac{1}{2h}\lg\frac{\sin\frac{u+h}{2}}{\sin\frac{u-h}{2}}, \qquad h < u \leqslant \pi.$$

Следовательно, $\varphi'(u) > 0$ для тех же значений u и h, а, значит, $\varphi(u)$ имеет в $(0, \pi)$ только один нуль. Обозначив его через u_0, получаем:

$$I_2 = \int_0^{u_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2p}\sin^{2p}kh\cos ku}{k^{2p+1}}\,du - \int_{u_0}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2p}\sin^{2p}kh\cos ku}{k^{2p+1}}\,du =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2p+1}\sin^{2p}kh\sin ku_0}{k^{2p+2}} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2p+1}k^{2p}h^{2p}}{k^{2p+2}} = \frac{1}{3}\pi^2 2^{2p}h^{2p}. \tag{19}$$

Учитывая (15), (16), (17), (18) и (19), находим:

$$|\Delta_h^{2p} f(x)| = O(h^{2p}).$$

Прежде чем перейти к доказательству второй половины теоремы, докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Если*

$$f^{(r-1)}(x) \in \mathrm{Lip}\,1 \tag{20}$$

и $T_n(x)$ — *тригонометрический полином порядка* n *такой, что для всех вещественных* x

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{A}{n^r}, \tag{21}$$

где $A > 0$ — *константа, то равномерно относительно* x

$$|T_n^{(r)}(x)| = O(1). \tag{22}$$

Для доказательства леммы воспользуемся следующим утверждением, доказанным Заманским ([7]):

Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1$ *и* $P_n(x)$ — *тригонометрический полином порядка* n *такой, что для всех вещественных* x

$$|f(x) - P_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то величина $|P_n'(x)|$ *равномерно ограничена.*

Используем метод С. Н. Бернштейна. Из (21) получаем:

$$|T_{2^k}(x) - T_{2^{k-1}}(x)| \leqslant |T_{2^k}(x) - f(x)| + |f(x) - T_{2^{k-1}}(x)| \leqslant \frac{(2^r+1)A}{2^{kr}},$$

$$f(x) = T_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [T_{2^k}(x) - T_{2^{k-1}}(x)].$$

Применяя неравенство С. Н. Бернштейна, находим:

$$|T_{2^k}^{(r-1)}(x) - T_{2^{k-1}}^{(r-1)}(x)| \leqslant \frac{(2^r+1)A}{2^k}. \tag{23}$$

Следовательно,

$$f^{(r-1)}(x) = T_1^{(r-1)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [T_{2^k}^{(r-1)}(x) - T_{2^{k-1}}^{(r-1)}(x)],$$

откуда, учитывая (23), получаем:

$$|f^{(r-1)}(x) - T_{2^m}^{(r-1)}(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} [T_{2^k}^{(r-1)}(x) - T_{2^{k-1}}^{(r-1)}(x)]\right| \leqslant \frac{(2^r+1)A}{2^m}. \tag{24}$$

Пусть n — любое натуральное число, и пусть натуральное m таково, что $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$. Тогда, учитывая (24), имеем:

$$|f^{(r-1)}(x) - T_n^{(r-1)}(x)| \leqslant |f^{(r-1)}(x) - T_{2^m}^{(r-1)}(x)| + |T_{2^m}^{(r-1)}(x) - T_n^{(r-1)}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(2^r+1)A}{2^m} + |T_{2^m}^{(r-1)}(x) - T_n^{(r-1)}(x)|.$$

Снова применяя (21), находим:

$$|T_{2^m}(x) - T_n(x)| \leqslant |T_{2^m}(x) - f(x)| + |f(x) - T_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A}{2^{mr}} + \frac{A}{n^r} < \frac{(2^r+1)A}{n^r}.$$

Отсюда, на основании неравенства С. Н. Бернштейна, получаем:

$$|T_{2^m}^{(r-1)}(x) - T_n^{(r-1)}(x)| \leqslant \frac{(2^r+1)A}{n}.$$

Значит,

$$|f^{(r-1)}(x) - T_n^{(r-1)}(x)| < \frac{3A(2^r+1)}{n}.$$

Таким образом, функция $f^{(r-1)}(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f^{(r-1)}(x) \in \mathrm{Lip}\,1, \quad |f^{(r-1)}(x) - P_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $P_n(x) = T_n^{(r-1)}(x)$, и, следовательно, в силу цитированного утверждения Заманского, величина

$$|P_n'(x)| = |T_n^{(r)}(x)|$$

равномерно ограничена, т. е. справедливо (22). Лемма доказана.

Вторую половину теоремы также докажем только для четного p.

Итак, пусть

$$|\Delta_h^{2p} f(x)| = O(h^{2p}), \tag{25}$$

что равносильно условию

$$f^{(2p-1)}(x) \in \mathrm{Lip}\, 1. \tag{26}$$

В этом случае, как известно,

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

где $E_n(f)$ обозначает наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n. Обозначим тригонометрический полином наилучшего приближения порядка n через

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Мы имеем:

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant \frac{A}{n^{2p}}, \tag{27}$$

где $A > 0$ — константа.

Далее,

$$|f(x) - F(x, \xi, f)| \leqslant |f(x) - T_n(x)| + |T_n(x) - F(x, \xi, T_n)| + \\ + |F(x, \xi, T_n) - F(x, \xi, f)|. \tag{28}$$

В силу (8) и (27),

$$|F(x, \xi, T_n) - F(x, \xi, f)| = |F(x, \xi, T_n - f)| \leqslant \frac{KA}{n^{2p}}. \tag{29}$$

По определению функции F, имеем:

$$F(x, \xi, T_n) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(\xi)(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Значит, учитывая (3), при $\xi \to \omega$ получаем:

$$T_n(x) - F(x, \xi, T_n) = \sum_{k=1}^{n} [1 - \gamma_k(\xi)](\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \sim$$

$$\sim \varphi_\gamma(\xi) \sum_{k=1}^{n} (d_0 k^{2p} + \ldots + d_{2p})(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^{2p}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = (-1)^p\, T_n^{(2p)}(x),$$

а из условий (26) и (27), в силу леммы 1, следует, что величина $|T_n^{(2p)}(x)|$ равномерно ограничена, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{2p}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right| \leqslant M.$$

Используем теперь следующую теорему Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна ([21]):

Если функция

$$\varphi(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

удовлетворяет условию $|\varphi^{(r)}(x)| \leqslant 1$, *то*

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \left|\sum_{k=m}^{\infty} (b_k \cos kx - a_k \sin kx)\right| \leqslant \frac{4}{\pi m^r} \widetilde{K}_r,$$

где

$$\widetilde{K}_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Применим эту теорему в частном случае $r = 1$, $m = 1$, полагая

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{2p-1}(-\beta_k \cos kx + \alpha_k \sin kx).$$

Имеем:

$$|\varphi'(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} k^{2p}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right| \leqslant M.$$

Следовательно,

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} k^{2p-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right| \leqslant \frac{4M}{\pi} \widetilde{K}_1.$$

Таким же образом найдем, что все суммы

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{\nu}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)\right| \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 2p)$$

равномерно ограничены. Значит, существует константа $C > 0$ такая, что для значений ξ, достаточно близких к ω,

$$|T_n(x) - F(x, \xi, T_n)| \leqslant C\varphi_\gamma(\xi).$$

Из (27), (28), (29) и последнего неравенства выводим:

$$|f(x)-F(x,\xi,f)|\leqslant\frac{A}{n^{2p}}+C\varphi_\gamma(\xi)+\frac{KA}{n^{2p}};$$

перейдя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, мы, наконец, получаем:

$$|f(x)-F(x,\xi,f)|\leqslant C\varphi_\gamma(\xi).$$

Теорема доказана.

Прежде чем перейти к рассмотрению частных случаев теоремы 1, заметим, что, как это хорошо известно, требование (8) выполняется при соблюдении следующего условия. Ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\xi)\cos kt$$

сходится равномерно относительно t, по крайней мере, для значений ξ, близких к ω, и существует положительная константа L такая, что для всех таких ξ выполняется неравенство

$$\int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\xi)\cos kt\right|dt\leqslant L. \tag{30}$$

Условие (30), в свою очередь, выполняется, если имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\xi)\cos kt\geqslant 0. \tag{31}$$

3. Рассмотрим частные случаи теоремы 1.

1) Метод суммирования Абеля — Пуассона.

$$\gamma_k(r)=r^k\quad(k=0,1,2,\ldots);\quad r\to 1-0.$$

Как известно, ядро этого метода неотрицательно, и при фиксированном k и $r\to 1$

$$1-\gamma_k(r)\sim k(1-r).$$

Следовательно, этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O(1-r)$. Класс насыщения есть множество функций $f(x)$, у которых сопряженная функция $\tilde{f}(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка единицы: $\tilde{f}(x)\in\mathrm{Lip}\,1$. Этот результат получен нами раньше [см. ([14])] другим методом [см. также ([4])].

2) Метод суммирования Фейера.

$$1-\gamma_k(n)=\begin{cases}1-\dfrac{k}{n} & (k=1,\ldots,n-1),\\ 0 & (k\geqslant n).\end{cases}$$

Как известно, ядро этого метода неотрицательно. Следовательно этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $Oe\left(\frac{1}{n}\right)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае. Этот результат был получен Алексичем ([5]), ([6]) и Заманским ([7]) [см. так же ([4])].

3) Метод суммирования Чезаро (C, r) при любом $r>0$.

$$\gamma_k(n)=\begin{cases}\sum\limits_{\nu=k}^{n}\frac{A_{n-\nu}^{r-1}}{A_n^r} & (k=1,\ldots,n),\\ 0 & (k>n),\end{cases}$$

где

$$A_n^r=\frac{(r+1)\ldots(r+n)}{n!}\sim\frac{n^r}{\Gamma(r+1)}.$$

Известно, что ядро этого метода удовлетворяет условию (30) [см. (22), стр. 54].

Мы имеем:

$$\sum_{\nu=k}^{n}A_{n-\nu}^{r-1}=\sum_{\nu=0}^{n-k}A_\nu^{r-1}=\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{r-1}-\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_\nu^{r-1}.$$

Но [см. (22), стр. 48]

$$\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu^{r-1}=A_n^r,$$

поэтому

$$\sum_{\nu=k}^{n}A_{n-\nu}^{r-1}=A_n^r-\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_\nu^{r-1}.$$

Следовательно,

$$1-\gamma_k(n)=\frac{1}{A_n^r}\sum_{\nu=n-k+1}^{n}A_\nu^{r-1}\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

При фиксированном k и $n\to\infty$ для $n-k+1\leqslant\nu\leqslant n$ имеем:

$$A_\nu^{r-1}\sim\frac{n^{r-1}}{\Gamma(r)}.$$

Значит,

$$1-\gamma_k(n)\sim\frac{rk}{n}.$$

Таким образом, метод Чезаро (C, r) при любом $r>0$ является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Класс насыщения — тот же, что и в двух предыдущих случаях.

В частном случае натуральных r этот результат был получен Заманским (7) [см. также (4)].

4) Метод суммирования Гёльдера H^r при любом $r\geqslant 1$.

Этот метод при любом $r>0$ определяется следующим образом [см. (23)]. Пусть дан ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k, \tag{32}$$

и пусть

$$s_k = \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{33}$$

— его частные суммы. Тогда суммами Гёльдера порядка $r > 0$ ряда (32) называют суммы

$$H_n^r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k \Delta^{n-k} \frac{1}{(k+1)^r},$$

где

$$\Delta^{n-k} \frac{1}{(k+1)^r} = \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p C_{n-k}^p}{(k+p+1)^r}. \tag{34}$$

Найдем выражение H_n^r через члены ряда (32):

$$H_n^r = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^{n-k} \frac{1}{(k+1)^r} \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{\nu=k}^{n} C_n^\nu \Delta^{n-\nu} \frac{1}{(\nu+1)^r} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) A_k,$$

где

$$\gamma_k(n) = \sum_{\nu=k}^{n} C_n^\nu \Delta^{n-\nu} \frac{1}{(\nu+1)^r}.$$

Дадим для множителей $\gamma_k(n)$ другое выражение. Используя (34), получаем:

$$\gamma_k(n) = \sum_{\nu=k}^{n} C_n^\nu \sum_{p=0}^{n-\nu} \frac{(-1)^p C_{n-\nu}^p}{(\nu+p+1)^r} =$$

$$= \sum_{\nu=k}^{n} C_n^\nu \sum_{l=\nu}^{n} \frac{(-1)^{l-\nu} C_{n-\nu}^{l-\nu}}{(l+1)^r} = \sum_{l=k}^{n} \frac{(-1)^l}{(l+1)^r} \sum_{\nu=k}^{l} (-1)^\nu C_n^\nu C_{n-\nu}^{l-\nu}. \tag{35}$$

Но

$$C_n^\nu C_{n-\nu}^{l-\nu} = C_n^l C_l^\nu,$$

следовательно, $\gamma_0(n) = 1$,

$$\gamma_k(n) = \sum_{l=k}^{n} \frac{(-1)^l C_n^l}{(l+1)^r} \sum_{\nu=k}^{l} (-1)^\nu C^\nu = \sum_{l=k}^{n} \frac{(-1)^{l+k} C_n^l C_{l-1}^{k-1}}{(l+1)^r} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

так как

$$\sum_{\nu=k}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu = (-1)^k C_{l-1}^{k-1} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{\nu=0}^{l} (-1)^\nu C_l^\nu = 0 \quad (l \geqslant 1).$$

Учитывая, что

$$C_n^l C_{l-1}^{k-1} = \frac{n}{l} C_{n-1}^{k-1} C_{n-k}^{n-l},$$

получаем:

$$\gamma_k(n) = nC_{n-1}^{k-1} \sum_{l=k}^{n} \frac{(-1)^{l+k} C_{n-k}^{n-l}}{l(l+1)^r} =$$

$$= nC_{n-1}^{k-1} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p C_{n-k}^p}{(p+1)(p+k+1)^r} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{35'}$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.

$$1 - \gamma_k(n) = \frac{k \lg^{r-1} n}{n\Gamma(r)} (1 + \varepsilon_{n,k}^r), \tag{36}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n,k}^r = 0$ *при фиксированных* k *и* r.

При доказательстве ограничимся случаем $r > 1$, хотя лемма верна при любом $r > 0$ (как известно, при $r = 1$ метод Гёльдера совпадает с методом Фейера).

Докажем сначала формулу

$$1 - \gamma_k(n) = \frac{nC_{n-1}^{k-1}}{\Gamma(r)} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx \int_0^x \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du = \frac{nC^{k-1}}{\Gamma(r)} I. \tag{36'}$$

Действительно, мы имеем:

$$I = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx \int_0^x \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du =$$

$$= \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du \int_u^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du \int_u^1 \sum_{p=0}^{n-k} (-1)^p C_{n-k}^p x^{p+k-1} dx =$$

$$= \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p C_{n-k}^p}{p+k} \int_0^1 (1 - u^{p+k}) \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du.$$

В силу формулы [см. ([24]), стр. 214]

$$\int_0^1 u^{p-1} \left(\lg \frac{1}{u}\right)^q du = \frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}} \quad (p > 0, \quad q > -1), \tag{37}$$

находим:

$$I = \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p C_{n-k}^p}{p+k} \left[\Gamma(r) - \frac{\Gamma(r)}{(p+k+1)^r}\right].$$

Но

$$\sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p C_{n-k}^p}{p+k} = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-k} (-1)^p C_{n-k}^p x^{p+k-1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k} dx = B(k, n-k+1) = \frac{1}{nC_{n-1}^{k-1}}.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство и учитывая (35′), получим (36′).

Преобразуем интеграл I с помощью подстановки $x = \frac{t}{n}$:

$$I = \frac{1}{n^k} \int_0^n t^{k-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \int_0^{\frac{t}{n}} \left(\lg \frac{1}{u}\right)^{r-1} du.$$

Положив $u = \frac{v}{n}$, найдем:

$$I = \frac{\lg^{r-1} n}{n^{k+1}} \int_0^n t^{k-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \int_0^t \left(1 - \frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv.$$

Таким образом, формулу (36′) можно переписать в виде:

$$1 - \gamma_k(n) = \frac{C_{n-1}^{k-1} \lg^{r-1} n}{n^k \Gamma(r)} \int_0^n t^{k-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \int_0^t \left(1 - \frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv =$$

$$= \frac{C_{n-1}^{k-1} \lg^{r-1} n}{n^k \Gamma(r)} I_1. \qquad (38)$$

Докажем нужные для дальнейшего неравенства.

I. $0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2 e^{1-t}}{2n}$ при $0 \leqslant t \leqslant n$. (39)

Действительно, переписав правую часть неравенства в виде

$$\psi(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n + \frac{et^2}{2n} - 1 \geqslant 0,$$

получаем:

$$\psi'(t) = \frac{te^t}{n} \left[e^{1-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\right] \geqslant 0 \quad \text{при } 0 < t \leqslant n.$$

Последнее неравенство (а также левую часть неравенства (39)) проще всего доказать так. При $t = n$ оно очевидно. При $t < n$ оно равносильно неравенству

$$1 - t \geqslant (n-1) \lg \left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

или неравенству

$$1 - t \geqslant (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{kn^k},$$

или, наконец, неравенству

$$1 - \frac{t}{n} + (n-1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{kn^k} \geqslant 0,$$

что очевидно.

Итак, $\psi(t)$ возрастает с возрастанием t на промежутке $0 \leqslant t \leqslant n$, и так как $\psi(0) = 0$, то $\psi(t) \geqslant 0$ для указанных значений t. Неравенст-

во (39) доказано.

$$\text{II.}\quad 0\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k}-1\leqslant\frac{kt}{n(1-\alpha)^{k+1}}\quad\text{при } 0\leqslant t\leqslant\alpha n, \tag{40}$$

где k — натуральное число, $0<\alpha<1$, α фиксировано.

Действительно, переписав правую часть неравенства в виде

$$\psi(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k}-1-\frac{kt}{n(1-\alpha)^{k+1}}\leqslant 0,$$

получаем:

$$\psi'(t)=\frac{k}{n}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k-1}-(1-\alpha)^{-k-1}\right].$$

Отсюда видно, что $\psi'(t)$ возрастает с возрастанием t, значит, $\psi'(t)\leqslant\leqslant\psi'(\alpha n)=0$. Следовательно, $\psi(t)$ убывает, и так как $\psi(0)=0$, то $\psi(t)\leqslant 0$ для рассматриваемых значений t.

$$\text{III.}\quad 0\leqslant\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}-1\leqslant\frac{r-1}{v\lg n}\quad\text{при } 0\leqslant v\leqslant 1,\quad n>e^{r-2}. \tag{41}$$

Левая часть этого неравенства очевидна, а правую перепишем в виде

$$\psi(v)=\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}-1-\frac{r-1}{v\lg n}\leqslant 0.$$

Имеем:

$$\psi'(v)=\frac{r-1}{v^2\lg n}\left[1-v\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2}\right]=\frac{r-1}{v^2\lg n}\varphi(v).$$

Далее,

$$\varphi'(v)=\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-3}\frac{r-2+\lg v-\lg n}{\lg n},$$

откуда видно, что $\varphi'(v)\leqslant 0$, $\varphi(v)$ убывает при возрастании v от 0 до 1 а так как $\varphi(1)=0$, то $\varphi(v)\leqslant 0$. Таким образом, $\psi'(v)\leqslant 0$, $\psi(v)$ убывает, а так как $\psi(1)\leqslant 0$, то $\psi(v)\leqslant 0$.

$$\text{IV.}\ 0\leqslant 1-\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}\leqslant\frac{(r-1)v}{\lg n}\quad\text{при } 1\leqslant v\leqslant\alpha n,\quad 0<\alpha<e^{r-2}. \tag{42}$$

Левая часть неравенства очевидна, а правую перепишем в виде

$$\psi(v)=\frac{(r-1)v}{\lg n}+\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}-1\geqslant 0.$$

Имеем:

$$\psi'(v)=\frac{r-1}{\lg n}\left[1-\frac{1}{v}\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2}\right],$$

$$\psi''(v)=\frac{r-1}{v^2\lg n}\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-3}\frac{\lg n-\lg v+r-2}{\lg n}.$$

Легко видеть, что $\psi''(v)>0$, а так как $\psi'(1)=0$, то $\psi'(v)\geqslant 0$; в силу того, что

$$\psi(1)=\frac{r-1}{\lg n}>0,$$

мы получаем:

$$\psi(v) \geqslant 0.$$

Вернемся к доказательству леммы 2. Установим, что при фиксированных k и α

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha n}^{n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv = 0. \tag{43}$$

Действительно, для промежутка $0 \leqslant t \leqslant n$ очевидно, что

$$\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant \int_0^n\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv.$$

Подстановкой $v = nu$ приведем последний интеграл к виду

$$n\lg^{1-r} n\int_0^1\left(\lg\frac{1}{u}\right)^{r-1} du = n\Gamma(r)\lg^{1-r} n.$$

Таким образом,

$$\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant n\Gamma(r)\lg^{1-r} n. \tag{44}$$

На основании этого неравенства получаем:

$$\int_{\alpha n}^{n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant$$

$$\leqslant n\Gamma(r)\lg^{1-r} n\int_{\alpha n}^{n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \leqslant n^{k+1}\Gamma(r)\lg^{1-r} n\,(1-\alpha)^{n-k},$$

откуда следует равенство (43).

Докажем теперь, что при фиксированных k, $0<\alpha<1$, $r>1$

$$\int_0^{\alpha n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv =$$

$$= \int_0^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv + \varepsilon_n, \tag{45}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Действительно, используя (39) и (44), имеем:

$$0 \leqslant \int_0^{\alpha n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k} e^{-t}\,dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv -$$

$$-\int_0^{\alpha n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{2n}\int_0^{\alpha n} t^{k+1}e^{-t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k} dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{2}\Gamma(r)\lg^{1-r} n \int_0^{\alpha n} t^{k+1} e^{-t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e}{2}\frac{\Gamma(r)}{\lg^{r-1} n}(1-\alpha)^{-k}\int_0^{\alpha n} t^{k+1} e^{-t}\, dt = \varepsilon_n', \quad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n' = 0.$$

Значит,

$$\int_0^{\alpha n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv =$$

$$= \int_0^{\alpha n} t^{k-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k} e^{-t}\int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv + \varepsilon_n'. \tag{46}$$

Далее, используя (40) и (44), получаем:

$$0 \leqslant \int_0^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-k} dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv -$$

$$- \int_0^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\, dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant \frac{k}{n(1-\alpha)^{k+1}} \int_0^{\alpha n} t^k e^{-t} \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k\Gamma(r)}{(1-\alpha)^{k+1}\lg^{r-1} n}\int_0^{\alpha n} t^k e^{-t}\, dt = \varepsilon_n'',$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n'' = 0$. **Отсюда и из (46) получаем (45).**

Покажем теперь, что

$$I_2 = \int_0^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\, dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv = k! + \delta_n, \quad \lim_{n\to\infty}\delta_n = 0. \tag{47}$$

Разобьем интеграл I_2 **на сумму интегралов по схеме**

$$\int_0^{\alpha n} dt \int_0^t f(t, v)\, dv = \int_0^1 dt \int_0^t f\, dv + \int_1^{\alpha n} dt \int_0^1 f\, dv + \int_1^{\alpha n} dt \int_1^t f\, dv.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv = t\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1} + \frac{r-1}{\lg n}\int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2} dv.$$

Подставив выражение этого интеграла в первый и второй члены предыдущего равенства, получим:

$$I_2 = \int_0^1 t^k e^{-t}\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1} dt + \frac{r-1}{\lg n}\int_0^1 t^{k-1} e^{-t}\, dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2} dv +$$

$$+ \int_1^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\, dt + \frac{r-1}{\lg n}\int_1^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\, dt \int_0^1 \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2} dv +$$

$$+ \int_1^{\alpha n} t^{k-1} e^{-t}\, dt \int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv.$$

Считая, что $1 < r \leqslant 2$, найдем:

$$\frac{r-1}{\lg n}\int_0^1 t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_0^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2}dv \leqslant \frac{r-1}{\lg n}\int_0^1 t^k e^{-t}\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-2}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r-1}{\lg n}\int_0^1 t^k e^{-t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lg n}\right),$$

$$\frac{r-1}{\lg n}\int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_0^1\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-2}dv \leqslant \frac{r-1}{\lg n}\int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lg n}\right).$$

Следовательно,

$$I_2 = \int_0^1 t^k e^{-t}\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1}dt + \int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt +$$

$$+\int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_1^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}dv + O\left(\frac{1}{\lg n}\right). \tag{48}$$

Применяя неравенства (41) и (42), получаем оценки:

$$0 \leqslant \int_0^1 t^k e^{-t}\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1}dt - \int_0^1 t^k e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^k e^{-t}\left[\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1}-1\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r-1}{\lg n}\int_0^1 t^{k-1}e^{-t}\,dt = O\left(\frac{1}{\lg n}\right),$$

$$0 \leqslant \int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_1^t dv - \int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\int_1^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}dv =$$

$$= \int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_1^t\left[1-\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}\right]dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r-1}{\lg n}\int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_1^t v\,dv = O\left(\frac{1}{\lg n}\right).$$

Значит,

$$\int_0^1 t^k e^{-t}\left(1-\frac{\lg t}{\lg n}\right)^{r-1}dt = \int_0^1 t^k e^{-t}\,dt + O\left(\frac{1}{\lg n}\right),$$

$$\int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt\int_1^t\left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1}dv = \int_1^{\alpha n} t^k e^{-t}\,dt - \int_1^{\alpha n} t^{k-1}e^{-t}\,dt + O\left(\frac{1}{\lg n}\right).$$

Таким образом, на основании (48) получаем:

$$I_2 = \int_0^{\alpha n} t^k e^{-t}\,dt + O\left(\frac{1}{\lg n}\right). \tag{49}$$

Если $r>2$, то интегрирование по частям интеграла

$$\int_0^t \left(1-\frac{\lg v}{\lg n}\right)^{r-1} dv$$

надо повторить $[r]$ раз, в результате чего мы снова получим формулу (49). Так как

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\alpha n} t^k e^{-t}\,dt=\int_0^{\infty} t^k e^{-t}\,dt=k!,$$

то из (49) следует (47).

Используя известное равенство

$$C_{n-1}^{k-1}=\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

верное при фиксированном k, и учитывая (43), (45) и (47), мы из (38) получаем (36). Лемма 2 доказана.

Докажем, что ядро метода Гёльдера H^r при $r\geqslant 1$ неотрицательно. Для этого дважды применим к сумме

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(n)\cos kt$$

преобразование Абеля, заменив в первый раз $\cos kt$ по формуле

$$\cos kt=\frac{\sin(2k+1)\frac{t}{2}-\sin(2k-1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}},$$

а во второй раз заменив $\sin(2k+1)\frac{t}{2}$ по формуле

$$\sin(2k+1)\frac{t}{2}=\frac{\sin^2(k+1)\frac{t}{2}-\sin^2\frac{kt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Мы получим:

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(n)\cos kt=\sum_{k=1}^{n-1}[\gamma_{k-1}(n)-2\gamma_k(n)+\gamma_{k+1}(n)]\frac{\sin^2\frac{kt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}+$$
$$+[\gamma_{n-1}(n)-2\gamma_n(n)]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}+\gamma_n(n)\frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\sum_{k=1}^{n+1}b_k(n)\frac{\sin^2\frac{kt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}, \qquad (50)$$

где

$$\left.\begin{aligned}b_k(n)&=\gamma_{k-1}(n)-2\gamma_k(n)+\gamma_{k+1}(n)\ \text{при}\ k=1,\ldots,n-1,\\ b_n(n)&=\gamma_{n-1}(n)-2\gamma_n(n),\\ b_{n-1}(n)&=\gamma_n(n).\end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Используя в рассматриваемом нами случае метода Гёльдера формулу (35), мы для $b_k(n)$ получим следующую формулу:

$$b_k(n)=\frac{C_{n+1}^k}{n+1}\sum_{p=0}^{n+1-k}\frac{(-1)^p C_{n+1-k}^p}{(k+p)^{r-1}} \qquad (k=1,\ldots,n+1).$$

Найдем для $b_k(n)$ представление в виде интеграла. Умножив тождество

$$(1-x)^{n+1-k} = \sum_{p=0}^{n+1-k} (-1)^p C_{n+1-k}^p x^p$$

на $x^{k-1}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r-2}$ и проинтегрировав в пределах от 0 до 1, получим, используя (37):

$$\int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r-2} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k}\,dx =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1-k} (-1)^p C_{n+1-k}^p \int_0^1 x^{k+p-1}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r-2} dx = \sum_{p=0}^{n+1-k} (-1)^p C_{n+1-k}^p \frac{\Gamma(r-1)}{(k+p)^{r-1}},$$

откуда следует, что

$$b_k(n) = \frac{C_{n+1}^k}{(n+1)\,\Gamma(r-1)} \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{r-2} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k}\,dx > 0.$$

В силу (50), отсюда заключаем, что ядро метода Гёльдера при $r>1$ неотрицательно. Таким образом, метод суммирования Гёльдера H^r при любом вещественном $r \geqslant 1$ является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{\lg^{r-1} n}{n}\right)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущих случаях.

В частном случае натуральных r класс насыщения этого метода был найден Альянчичем ([10]), ([11]) [см. также ([14]), ([16])].

5) М е т о д (БР, ν) Б е р н ш т е й н а — Р о г о з и н с к о г о; ν — л ю б о е н а т у р а л ь н о е ч и с л о.

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \left(\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)^{\nu} & \text{при } k=1,\ldots,n, \\ 0 & \text{при } k>n. \end{cases}$$

Известно [см. ([25]), стр. 272, и ([26]), стр. 194—196], что при $\nu=1$ сумма Бернштейна — Рогозинского $B_n^*(x,f)$ обладает свойством (8):

$$|B_n^*(x,f)| \leqslant 2\pi M, \quad M = \max_x |f(x)|.$$

Следовательно, при любом данном натуральном ν сумма Бернштейна — Рогозинского $F_\nu(x,n,f)$ также обладает свойством (8):

$$|F_\nu(x,n,f)| \leqslant (2\pi)^\nu M.$$

Далее, при фиксированных k, ν и $n\to\infty$ имеем:

$$1-\gamma_k(n) \sim \frac{\nu\pi^2 k^2}{8n^2}.$$

Значит, этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Класс насыщения есть множество функций $f(x)$, имеющих производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка единицы: $f'(x) \in \mathrm{Lip}\,1$.

Этот результат был найден Харшиладзе ([12]).

6) Метод типических средних.

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p & \text{при } k = 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{при } k \geqslant n, \end{cases}$$

p — заданное натуральное число. Докажем, что ядро этого метода удовлетворяет условию (30). Применяя к этому ядру равенства (50) и (51), получим:

$$b_k(n) = -\frac{(k-1)^p}{n^p} + \frac{2k^p}{n^p} - \frac{(k+1)^p}{n^p} < 0 \quad (k = 1, \ldots, n-2),$$

$$b_{n-1}(n) = \frac{2(n-1)^p}{n^p} - \frac{(n-2)^p}{n^p} - 1 < 0,$$

$$b_n(n) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^p > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(n) \cos kt - b_n(n) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} < 0.$$

Далее, имеем:

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(n) \cos kt \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(n) \cos kt - b_n(n) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt + \int_0^\pi b_n(n) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt =$$

$$= \int_0^\pi \left[b_n(n) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(n) \cos kt \right] dt +$$

$$+ \int_0^\pi b_n(n) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = b_n(n) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt - \frac{\pi}{2} < b_n(n) \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt.$$

Интегрируя тождество

$$\frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} = n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos kt,$$

получаем:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = n\pi.$$

Следовательно,

$$\int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(n) \cos kt \right| dt < \pi n b_n(n) < \pi p,$$

ибо

$$b_n(n) < \frac{p}{n}.$$

Наше утверждение доказано.

Таким образом, этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Классом насыщения является в случае четного p множество функций $f(x)$, у которых $f^{(p-1)}(x) \in \text{Lip}\, 1$, а в случае нечетного p — множество функций $f(x)$, у которых $\tilde{f}^{(p-1)}(x) \in \text{Lip}\, 1$.

Этот результат был получен Заманским (8) [см. также (12)].

7) Частный случай метода Рисса $R^{(r,\lambda)}$.

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{n+r-1}}\right) & \text{при } k = 1, \ldots, n-1, \\ 0 & \text{при } k \geqslant n, \end{cases}$$

где $\lambda_n = n^p$, p — натуральное.

Учитывая результаты случая 6) и рассуждая так же, как в случае 5), убеждаемся, что ядро этого метода удовлетворяет условию (30). Далее, при фиксированных k, r и $n \to \infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(n) \sim \frac{rk^p}{n^p}.$$

Следовательно, этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае.

Этот результат был получен Альянчичем (10).

8) Частный случай метода Вороного (W, p_n).

Метод суммирования Вороного (W, p_n), как известно [см. (23), стр. 88 и след.], состоит в следующем. Предполагая, что

$$p_n \geqslant 0,$$
$$p_0 > 0,$$
$$P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n,$$

мы для данного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ с частными суммами $s_k = \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu$ $(k=0,1,2,\ldots)$ образуем последовательность средних

$$t_n = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, s_k,$$

или

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{\nu=k}^{n} \frac{p_{n-\nu}}{P_n} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) A_k,$$

где

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=k}^{n} p_{n-\nu}, & k = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим частный случай этого метода при $p_{n-\nu}=\nu+1$. В этом случае

$$\gamma_k(n)=\begin{cases}\dfrac{(n+k+2)(n-k+1)}{(n+2)(n+1)} & \text{при } k=0, 1, \ldots, n,\\ 0 & \text{при } k>n.\end{cases}$$

При фиксированном k и $n\to\infty$ имеем:

$$1-\gamma_k(n)\sim\frac{k^2+k}{n^2}.$$

Докажем, что ядро этого метода удовлетворяет условию (30). Применяя к этому ядру неравенства (50) и (51), получим:

$$b_k(n)=-\frac{2}{(n+1)(n+2)}<0, \quad k=1, \ldots, n,$$

$$b_{n+1}(n)=\frac{2}{n+1}>0.$$

Значит,

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(n)\cos kt-b_{n+1}(n)\frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}<0,$$

откуда следует, что

$$\int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k(n)\cos kt\right|dt\leqslant b_{n+1}(n)\int_0^\pi\frac{\sin^2\frac{(n+1)t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, рассматриваемый метод суммирования является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Класс насыщения есть множество функций $f(x)$, у которых $f'(x)\in\operatorname{Lip}1$.

9) Метод Гаусса — Вейерштрасса — Абеля $(A, 2)$. Сингулярным интегралом Гаусса — Вейерштрасса для функции $f(x)$ называется интеграл

$$W(x)=W(x, \xi, f)=\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)e^{-\frac{t^2}{\xi}}dt, \quad \xi>0.$$

Легко видеть, что если $f(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция с рядом Фурье (1), то $W(x)$ также есть непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой имеет вид:

$$W(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{\xi k^2}{4}}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Таким образом, для этого метода суммирования

$$\gamma_k(\xi)=e^{-\frac{\xi k^2}{4}} \quad (k=1, 2, \ldots).$$

При любом фиксированном натуральном k и $\xi\to 0$ имеем:

$$1-\gamma_k(\xi)\sim\frac{1}{4}k^2\xi.$$

Ядро этого метода, т. е. сумма ряда

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\xi k^2}{4}} \cos kt$$

есть эллиптическая функция $\frac{1}{2}\vartheta_3\left(\frac{t}{2}\right)$ со значением $q=e^{-\frac{\xi}{4}}$, так как

$$\vartheta_3(u)=1+2\sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\cos 2ku, \quad |q|<1.$$

Но известно, что функция $\vartheta_3(u)$ неотрицательна для вещественных u и значений q из интервала $(-1, 1)$, что видно из представления этой функции в виде бесконечного произведения

$$\vartheta_3(u)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2u+q^{2(2n-1)})(1-q^{2n})$$

[см. ([24]), стр. 318].

Таким образом, этот метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O(\xi)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае.

10) Метод Римана (R, r), r — любое натуральное число.

$$\gamma_k(\alpha)=\left(\frac{\sin k\alpha}{k\alpha}\right)^r \text{ при } k=1, 2, 3, \ldots.$$

При фиксированном k и $\alpha\to 0$ имеем:

$$1-\gamma_k(\alpha)\sim\frac{1}{6}rk^2\alpha^2.$$

Ядро этого метода неотрицательно, так как оно получается применением $r-1$ раз операции усреднения к неотрицательной функции

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\alpha}{k\alpha}\cos kt$$

(на это обстоятельство обратил мое внимание А. Ф. Тиман), равной $\frac{\pi}{2\alpha}$ при $0<t\leqslant\alpha<\pi$ и равной нулю при $0\leqslant\alpha\leqslant t\leqslant\pi$.

Следовательно, метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O(\alpha^2)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае.

Частный случай при $r=1$ был рассмотрен Харшиладзе ([12]).

11) Метод, определяемый интегралом Валле Пуссена. Интеграл Валле Пуссена имеет вид:

$$v_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

Известно, что если $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция с рядом Фурье (1), то $v_n(x)$ есть тригонометрический полином

порядка n:

$$v_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k(n)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \dfrac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} & \text{при } k = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{при } k > n \end{cases}$$

[см. ([25]), стр. 277—278].

При фиксированном k и $n \to \infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(n) \sim \frac{k^2}{n},$$

а ядро этого метода неотрицательно. Значит, метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае.

12) Метод, определяемый интегралом Джексона. Интеграл Джексона имеет вид:

$$u_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin n \dfrac{t-x}{2}}{\sin \dfrac{t-x}{2}} \right]^4 dt.$$

Известно, что если $f(x)$ — непрерывная 2π-периодическая функция с рядом Фурье (1), то $u_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка $2n-2$:

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} \gamma_k(n)(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n(2n^2+1)} \left[\dfrac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!} - \dfrac{4(n-k+1)!}{(n-k-2)!} \right] & \text{при } k = 1, \ldots, n-2, \\ \dfrac{1}{2n(2n^2+1)} \dfrac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!} & \text{при } k = n-1, \ldots, 2n-2, \\ 0 & \text{при } k > 2n-2. \end{cases}$$

При фиксированном k и $n \to \infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(n) \sim \frac{3k^2}{2n^2},$$

а ядро этого метода неотрицательно. Значит, метод является насыщенным с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Класс насыщения — тот же, что в предыдущем случае.

13) Метод Джексона — Валле Пуссена. Как известно, этот метод определяется множителями

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3k^2}{2n^2} + \dfrac{3k^3}{4n^3} & \text{при } k = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{1}{4}\left(2 - \dfrac{k}{n}\right) & \text{при } k = n, \ldots, 2n, \\ 0 & \text{при } k \geqslant 2n. \end{cases}$$

а ядро его неотрицательно [см. ([20]), стр, 133]. При фиксированном k и $n \to \infty$ имеем:

$$1-\gamma_k(n) \sim \frac{3k^2}{2n^2}.$$

Значит, этот метод является насыщенным; порядок приближения насыщения и класс насыщения — те же, что и в предыдущем случае.

4. Теорема 1 трактует случай, когда при фиксированном k и $\xi \to \omega$

$$1-\gamma_k(\xi) \sim P(k)\,\varphi(\xi),$$

где $P(k)$ есть функция только от k, а $\varphi(\xi)$ — функция только от ξ. Но имеются методы суммирования, для которых подобное соотношение не выполняется. В некоторых случаях может быть с пользой применена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть задан метод суммирования* γ, *определенный последовательностью функций* $\gamma_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots)$, *заданных по крайней мере для значений* $\xi \to +\infty$, *и пусть существуют вещественные числа* r, $\alpha > 0$ *и* $0 < a < 1$ *такие, что при любом фиксированном натуральном* k *и* $\xi \to \infty$

$$1-\gamma_k(\xi) \sim c_k\,\xi^{\alpha(k-r-1)}\,a^{\xi}, \tag{52}$$

где $c_k \neq 0$ — *константа, зависящая только от* k. *Тогда при любом целом* $\nu \geqslant 0$ *этот метод является насыщенным порядка* ν *с приближением насыщения порядка* $O(\xi^{\alpha(\nu-r)}\,a^{\xi})$.

Класс насыщения порядка ν *для этого метода совпадает с множеством тригонометрических полиномов порядка* $\nu+1$, *т. е. для того чтобы*

$$|f(x)-F(x, \xi, f)| = O(\xi^{\alpha(\nu-r)}\,a^{\xi}), \tag{53}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ *была тригонометрическим полиномом порядка* $\nu+1$.

Доказательство. Докажем сперва, что заданный метод является насыщенным порядка ν с приближением насыщения порядка $O(\xi^{\alpha(\nu-r)}a^{\xi})$.

Предположим, что для некоторой неограниченно возрастающей последовательности чисел ξ_n и некоторой функции $f(x)$

$$|f(x)-F(x, \xi_n, f)| = o(\xi_n^{\alpha(\nu-r)}a^{\xi_n});$$

тогда из равенства

$$[1-\gamma_k(\xi)]\,a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x, \xi, f)]\cos kx\,dx \tag{54}$$

получаем:

$$|1-\gamma_k(\xi_n)|\,|a_k| = o(\xi_n^{\alpha(\nu-r)}a^{\xi_n}),$$

откуда, учитывая (52), имеем:

$$|a_k| \sim \frac{o(\xi_n^{\alpha(\nu-r)}\,a^{\xi_n})}{|c_k|\,\xi_n^{\alpha(k-r-1)}\,a^{\xi_n}}.$$

Следовательно, $a_k = 0$ для $k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$. Аналогично, $b_k = 0$ для $k = \nu + 1, \nu + 2, \ldots$.

С другой стороны, например для функции $f(x) = \cos(\nu + 1)x$, мы имеем:

$$F(x, \xi) = \gamma_{\nu+1}(\xi) \cos(\nu + 1)x,$$
$$f(x) - F(x, \xi) = [1 - \gamma_{\nu+1}(\xi)] \cos(\nu + 1)x.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x) - F(x, \xi)| \leqslant |1 - \gamma_{\nu+1}(\xi)| \sim |c_{\nu+1}| \xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi} = O(\xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi}).$$

Докажем теперь, что класс насыщения совпадает с множеством тригонометрических полиномов порядка $\nu + 1$.

Пусть дано соотношение (53), которое запишем в виде

$$|f(x) - F(x, \xi)| \leqslant A \xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi},$$

где $A > 0$ — константа. Тогда, как и выше, из (54), учитывая (52), получаем:

$$|a_k| \leqslant \frac{2A\xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi}}{|1 - \gamma_k(\xi)|} \sim \frac{2A}{|c_k|} \xi^{\alpha(\nu-k+1)}.$$

Следовательно, $a_k = 0$ для $k = \nu + 2, \nu + 3, \ldots$. Аналогично, $b_k = 0$ для $k = \nu + 2, \nu + 3, \ldots$, т. е. $f(x)$ — тригонометрический полином порядка $\nu + 1$.

Наоборот, пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

тогда

$$f(x) - F(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\nu+1} [1 - \gamma_k(\xi)] (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Обозначив

$$M = \max_{1 \leqslant k \leqslant \nu+1} \max_{x} |a_k \cos kx + b_k \sin kx|,$$

получим:

$$|f(x) - F(x, \xi)| \leqslant M \sum_{k=1}^{\nu+1} |1 - \gamma_k(\xi)| \sim M \sum_{k=1}^{\nu+1} |c_k| \xi^{\alpha(k-r-1)} a^{\xi} \sim$$
$$\sim M |c_{\nu+1}| \xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi} = O(\xi^{\alpha(\nu-r)} a^{\xi}).$$

Теорема 2, на наш взгляд, интересна тем, что выделенные в ней методы суммирования имеют наименьший класс насыщения.

5. Частные случаи теоремы 2.

1) Метод Эйлера (E, q). Этот метод определяется следующим образом [см. ([23])]. Суммами Эйлера ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ с частными суммами $s_k = \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются суммы

$$t_n = \frac{1}{(1+q)^n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} s_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $q > 0$ — данное число, или

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) A_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+q)^n} \sum\limits_{\nu=k}^{n} C_n^\nu q^{n-\nu} & (k = 0, 1, \ldots, n), \\ 0 & (k > n). \end{cases}$$

При фиксированном k и $n \to \infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{q^{k-1}(k-1)!} \left(\frac{q}{q+1}\right)^n.$$

Следовательно, при любом заданном целом $\nu \geqslant 0$ метод суммирования Эйлера (E, q) является насыщенным порядка ν с приближением насыщения порядка $O\left[n^\nu \left(\frac{q}{q+1}\right)^n\right]$. Класс насыщения порядка ν для этого метода совпадает с множеством тригонометрических полиномов порядка $\nu + 1$, т. е. для того чтобы

$$|f(x) - Q_n(x, f)| = O\left[n^\nu \left(\frac{q}{q+1}\right)^n\right],$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была тригонометрическим полиномом порядка $\nu + 1$.

2) Метод Хаттона (Hu, r). Этот метод определяется следующим образом [см. ([23])]. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ и $s_k = \sum\limits_{\nu=0}^{k} A_\nu$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — его частичные суммы. Определим суммы s_n^r для $r = 1, 2, \ldots$ формулой

$$s_n^r = \frac{1}{2}(s_{n-1}^{r-1} + s_n^{r-1}) \quad (n \geqslant 0)$$

при условиях

$$s_{-1}^r = 0 \quad (r \geqslant 0), \qquad s_n^0 = s_n \quad (n \geqslant 0).$$

Методом математической индукции легко доказать формулу

$$s_n^r = \frac{1}{2^r} \sum_{\nu=0}^{r} C_r^\nu s_{n-r+\nu} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

при условиях

$$s_{-1} = s_{-2} = \ldots = s_{-r} = 0.$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$s_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} A_k + \frac{1}{2^r} \sum_{k=n-r+1}^{n} A_k \sum_{\nu=k-n+r}^{r} C_r^\nu,$$

или, обозначив $n - r = l$, $s_n^{n-l} = S_n^l$, в виде

$$S_n^l = \sum_{k}^{l} A_k + \frac{1}{2^{n-l}} \sum_{k=l+1}^{n} A_k \sum_{\nu=k-l}^{n-l} C_{n-l}^\nu = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(n) A_k.$$

где

$$\gamma_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, 1, \ldots, l, \\ \dfrac{1}{2^{n-l}} \sum\limits_{\nu=k-l}^{n-l} C_{n-l}^{\nu} & \text{при } k = l+1, \ldots, n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

При фиксированных k и l, $k > l$, и $n \to \infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(n) = \frac{1}{2^{n-l}} \sum_{\nu=0}^{k-l-1} C_{n-l}^{\nu} \sim \frac{2^l}{(k-l-1)!} \frac{n^{k-l-1}}{2^n}.$$

Следовательно, при любом заданном натуральном $\nu > l$ метод Хаттона $(Hu, n-l)$ является насыщенным порядка ν с приближением насыщения порядка $O\left(\frac{n^{\nu-l}}{2^n}\right)$. Класс насыщения порядка $\nu > l$ для этого метода — тот же, что в предыдущем случае.

3) Экспоненциальный метод суммирования Бореля (B). Этот метод определяется так [см. ([23])]. Для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ с частными суммами $s_k = \sum\limits_{\nu=0}^{k} A_\nu$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ образуем ряд

$$t(\xi) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} s_n,$$

или

$$t(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\xi) A_k,$$

где $\gamma_k(\xi) = e^{-\xi} \sum\limits_{\nu=k}^{\infty} \frac{\xi^\nu}{\nu!}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

При фиксированном k и $\xi \to +\infty$ имеем:

$$1 - \gamma_k(\xi) = e^{-\xi} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\xi^\nu}{\nu!} \sim \frac{1}{(k-1)!} \xi^{k-1} e^{-\xi}.$$

Таким образом, при любом заданном целом $\nu \geqslant 0$ экспоненциальный метод суммирования Бореля (B) является насыщенным порядка ν с приближением насыщения порядка $O(\xi^\nu e^{-\xi})$. Класс насыщения порядка ν для этого метода — тот же, что в предыдущем случае.

4) Обобщенный метод Бореля (B', α). Для этого метода имеем:

$$\gamma_k(\xi) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \int_0^\xi e^{-u} u^{k\alpha} du, \quad \alpha > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

При фиксированных k, α и $\xi \to +\infty$ получаем:

$$1 - \gamma_k(\xi) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \xi^{k\alpha} e^{-\xi}.$$

Следовательно, при любом заданном целом $\nu \geqslant 0$ обобщенный метод суммирования Бореля (B', α) является насыщенным порядка ν с приближением насыщения порядка $O(\xi^{\alpha(\nu+1)} e^{-\xi})$. Класс насыщения — тот же, что и в предыдущем случае.

Поступило
17.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, Bull. des sci. mathem., 61 (1937), 243—256.

[2] F a v a r d J., Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Colloque d'Analyse harmonique (Publications du Centre National de la Recherche Scientifique), Paris (1949), 97—110.

[3] F a v a r d J., Sur l'approximation dans les espaces vectoriels, Annali di Matematica, serie Quarta, 29 (1949), 259—291.

[4] F a v a r d J., Sur la saturation des procédés de sommation, Journ. mathem. pures et appl., 36, № 4 (1957), 359—372.

[5] A l e x i t s G., A Fourier — sor Cesàro — közepeivel való approximáció nagyságrendjéröl, Mat. Fiz. Lapok, 48 (1941).

[6] A l e x i t s G., Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér, Acta mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, 3, №№ 1, 2 (1952), 29—43.

[7] Z a m a n s k y M., Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et application à quelques problèmes d'approximation, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3), 66 (1949), 19—93.

[8] Z a m a n s k y M., Classes de saturation de procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) 67 (1950), 161—198.

[9] B u t z e r P. L., Sur la théorie de demigroupes et classes de saturation de certains intégrales singulières, C. R. Acad. Sci., Paris, 243, № 20 (1956), 1473—1475.

[10] A l j a n č i ć S., Classe de saturation des procédés de sommation de Hölder et de Riesz, C. R. Acad. sci., 246, № 18 (1958), 2567—2569.

[11] A l j a n č i ć S., Meilleure approximation et classes de saturation du procédé de Hö[illegible]er dans les espaces C et L^p, Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 12 (1958), 109 [illegible]4.

[12] Х а р ш и л а д з е Ф. И., Классы насыщения для некоторых процессов сум[illegible]рования, Доклады Ак. наук СССР, 122, № 3 (1958), 352—355.

[13] S u n o u c h i G e n - i c h i r o, Watari chinami, On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions, Proc. Japan Acad., 34, № 8 (1958), 477—481.

[14] Т у р е ц к и й А. Х., Исследования по теории приближения функций, Диссертация, Минск, 1958.

[15] Т у р е ц к и й А. Х., Классы насыщения различных порядков. Класс насыщения для метода суммирования Валле Пуссена, Доклады Ак. наук БССР, 2, № 10 (1958), 395—402.

[16] Т у р е ц к и й А. Х., О классе насыщения для метода Гёльдера суммирования рядов Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 6 (1958), 980—983.

[17] Т у р е ц к и й А. Х., Методы суммирования рядов Фурье, классы насыщения которых суть тригонометрические полиномы, Доклады Ак. наук БССР, 3, № 4 (1959), 136—142.

[18] Т у р е ц к и й А. Х., О кла[illegible]ах насыщения в пространстве C, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 1 (1959), 30—32.

[19] Т у р е ц к и й А. Х., О классах насыщения для некоторых методов суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 6 (1959), 1207—1209.

[20] А х и е з е р Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947.

[21] А х и е з е р Н. И. и К р е й н М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 3 (1937), 107—112.

[22] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[23] Х а р д и Г., Расходящиеся ряды, ИЛ., Москва, 1951.

[24] Р ы ж и к М. М. и Г р а д ш т е й н И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

[25] Н а т а н с о н И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

[26] Г о н ч а р о в В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, ГИТТЛ, 1954.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 443—476

Е. Н. МОЧУЛЬСКИЙ

РАСЩЕПЛЯЮЩИЕ ЭНДОМОРФИЗМЫ СТРУКТУР

Настоящая статья посвящена общей теории расщепляющих эндоморфизмов структур, которая является дальнейшим развитием как общей теории однородно расщепляющих эндоморфизмов структур, изложенной в работе (1) и нашедшей свое приложение к прямым разложениям структур [см. (2)], так и теории эндоморфизмов связанных с прямыми разложениями структур, разработанной в статьях (3) и (4).

В § 1 настоящей работы вводятся основные понятия и доказывается ряд вспомогательных теорем, которые используются в последующих параграфах. При этом понятие гомоморфизма, которое дается в § 1, отличается от определения, введенного в работе (1) *. В этом же параграфе доказывается теорема 1, полностью решающая вопрос, поставленный и оставшийся открытым в работе (1).

В § 2 приводится несколько видов расщепляющих эндоморфизмов и устанавливается некоторая связь между ними. В частности, вводится понятие η-расщепляющего эндоморфизма, позволившее найти необходимое и достаточное условия для того, чтобы эндоморфизм был однородно расщепляющим.

В § 3 находятся условия, при которых эндоморфизм структуры является одним из расщепляющих эндоморфизмов, указанных в § 2. В этом же параграфе доказывается теорема, из которой, в частности, следуют все результаты раздела II п. 3 работы (1).

В § 4 результаты, полученные в предыдущих параграфах, используются для эндоморфизмов связанных с прямыми разложениями структур и устанавливаются дополнительные связи между некоторыми видами расщепляющих эндоморфизмов.

Заметим, что многие результаты работы (5), полученные при несколько другом, чем в настоящей работе, определении гомоморфизма и обобщающие некоторые результаты из теории эндоморфизмов векторных пространств [см. (6)], содержатся в первых трех параграфах данной работы.

§ 1. Всюду в дальнейшем под словами «структура S» мы будем понимать полную и модулярную структуру. Однако нам часто придется рассматривать структуры с дополнительными ограничениями.

Введем следующие обозначения: обозначим через S^* структуру S, в которой выполнено условие

(*): если x и y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — элементы структуры S, причем

---

* См. замечание на стр. 449.

$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots$, то

$$x \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x y_i$$

[см. ([9])].

Обозначим через S^{**} структуру S, в которой выполнено условие (**): если x и y_i, $i = 1, 2, \ldots$, — элементы структуры S, причем $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots$ и $x y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то

$$x \sum_{i=1}^{\infty} y_i = 0$$

[см. ([7])].

Обозначим через S^{***} структуру S, в которой выполнено условие (***): если x и $\{y_\alpha\}$ — элементы структуры S, причем элементы y_α образуют возрастающую цепочку, то

$$x \sum_{\alpha} y_\alpha = \sum_{\alpha} x y_\alpha$$

[см. ([1])].

Пусть a, $b \in S$, где $b \leqslant a$. Обозначим через a/b множество всех элементов $x \in S$, удовлетворяющих условию $b \leqslant x \leqslant a$. Очевидно, что a/b образует подструктуру структуры S, которую будем называть фактор-структурой. В дальнейшем фактор-структуру $a/0$ будем также обозначать через S_a. Через 1 и 0 будем обозначать соответственно единицу и ноль структуры S, а через $1'$ и $0'$ — единицу и ноль структуры S'.

Определение 1*. Однозначное отображение η структуры S на структуру S' называется гомоморфизмом, если при этом выполняются следующие условия:

1) $(x + y)\eta = x\eta + y\eta$.

2) Если $z' \in S'$, то в структуре S существует элемент z такой, что $z\eta = z'$.

3) Если x, $y \in S$ и $x\eta = y\eta$, то в структуре S существуют элементы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ такие, что $\bar{x}\eta = \bar{y}\eta = 0'$ и $x + \bar{x} = y + \bar{y}$.

4) Существует максимальный среди элементов структуры S, отображающихся при η в ноль структуры S'.

ЛЕММА 1. *Если η — гомоморфное отображение структуры S на структуру S' и если для элементов $x, y \in S$ выполняется соотношение $x \leqslant y$, то и $x\eta \leqslant y\eta$.*

В самом деле, так как $x \leqslant y$, то $x + y = y$. Следовательно, $x\eta + y\eta = y\eta$, т. е. $x\eta \leqslant y\eta$.

Определение 2. Максимальный элемент структуры S, который при гомоморфном отображении η структуры S на S' отображается в ноль S', называется *ядром гомоморфизма* η. Будем обозначать его через $k(\eta)$. Очевидно, это будет сумма всех элементов структуры S, которые при гомоморфизме η отображаются в ноль структуры S'.

ЛЕММА 2. *Если η — гомоморфное отображение структуры S на S', то $x\eta = y\eta$ тогда и только тогда, когда $x + k(\eta) = y + k(\eta)$.*

* Это определение не требует полноты структуры.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 1 работы (1).

З а м е ч а н и е. Если η индуцирует гомоморфное отображение структуры S на структуру S', то он индуцирует и гомоморфное отображение подструктуры S_x на подструктуру S'_y, где $y = x\eta$, ядром которого, очевидно, является элемент $xk(\eta)$.

В самом деле, при гомоморфизме η структуры S на S', в силу леммы 1, каждому элементу $x_1 \in S_x$ будет соответствовать элемент $x_1\eta \in S'_y$. Покажем теперь, что и, обратно, для каждого элемента $y' \in S'_y$ существует по крайней мере один элемент $x_2 \in S_x$ такой, что $x_2\eta = y'$. Действительно, при гомоморфизме η структуры S на S' существует по крайней мере один элемент $z \in S$ такой, что $z\eta = y'$. Но тогда

$$(x + z)\eta = x\eta + z\eta = x\eta = y.$$

Следовательно, $(x + z)\eta = x\eta$, что, в силу леммы 2, дает:

$$k(\eta) + x + z = k(\eta) + x.$$

Из последнего равенства будем иметь:

$$k(\eta) + z \leqslant k(\eta) + x,$$

откуда, согласно модулярному закону, получаем:

$$k(\eta) + z = k(\eta) + x[k(\eta) + z].$$

Из этого равенства и условия 1), а также из определений 1, 2 следует, что

$$z\eta = \{x[k(\eta) + z]\}\eta = y'.$$

Таким образом, в структуре S_x мы нашли элемент $x_2 = x[k(\eta) + z]$ такой, что $x_2\eta = y'$. Тем самым условие 2) определения 1 для отображения η структуры S_x на S'_y выполняется. Условие 1) определения 1 выполняется в силу того, что оно имеет место при гомоморфизме η структуры S на S'. Покажем, что выполняется и условие 3) определения 1. Действительно, пусть для $x_1, x_2 \in S_x$ имеет место равенство $x_1\eta = x_2\eta$. Тогда, согласно лемме 2,

$$x_1 + k(\eta) = x_2 + k(\eta);$$

отсюда, так как $x_1 \leqslant x$ и $x_2 \leqslant x$, в силу модулярного закона получаем:

$$x_1 + xk(\eta) = x_2 + xk(\eta).$$

Очевидно, последнее равенство и доказывает справедливость условия 3) определения 1 для отображения η структуры S_x на S'_y. Тем самым мы показали, что η есть гомоморфное отображение структуры S_x на S'_y, где $y = x\eta$, ядром которого, очевидно, является элемент $xk(\eta)$.

О п р е д е л е н и е 3. Взаимно однозначное соответствие между структурами S и S', сохраняющее существующие в этих структурах отношения порядка для элементов, называется *изоморфизмом* этих структур.

ЛЕММА 3. *Если η — гомоморфное отображение структуры S на S', то*

$$1/k(\eta) \simeq 1'/0'.$$

Доказательство. Пусть η индуцирует гомоморфизм структуры S на S'. При этом гомоморфизме каждому элементу из $1/k(\eta)$ ставится в соответствие элемент из S'. Покажем теперь, что и, обратно, для каждого элемента $x' \in S'$ существует в $1/k(\eta)$ такой элемент x, что $x\eta = x'$. Действительно, при гомоморфизме η структуры S на структуру S', согласно условию 2) определения 1, для элемента $x' \in S'$ найдется в S такой элемент y, что $y\eta = x'$; но тогда и $(y + k(\eta))\eta = x'$. Отсюда и из того, что $(y + k(\eta)) \in 1/k(\eta)$, и следует наше утверждение. Пусть $x, y \in 1/k(\eta)$. Если $x\eta = y\eta$, то $x = y$. В самом деле, если $x\eta = y\eta$, то, согласно лемме 2, имеем:

$$x + k(\eta) = y + k(\eta);$$

но так как $x \geqslant k(\eta)$ и $y \geqslant k(\eta)$, то $x = y$. Таким образом, мы показали, что гомоморфизм η индуцирует взаимно однозначное соответствие между $1/k(\eta)$ и $1'/0'$, которое, в силу леммы 1, сохраняет порядок элементов. Следовательно, гомоморфизм η индуцирует изоморфное отображение $1/k(\eta)$ на $1'/0'$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Гомоморфизм η структуры S на S' тогда и только тогда будет изоморфизмом, если $k(\eta) = 0$.*

Следствие 2. *Если η есть гомоморфное отображение структуры S на структуру S' и $x_\alpha \in 1/k(\eta)$, где α пробегает некоторое множество индексов, то*

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta, \quad \left(\prod_\alpha x_\alpha\right)\eta = \prod_\alpha x_\alpha \eta.$$

Доказательство. Так как $x_\alpha \leqslant \sum\limits_\alpha x_\alpha$, то, согласно лемме 1, имеем:

$$x_\alpha \eta \leqslant \left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta$$

и поэтому

$$\sum_\alpha x_\alpha \eta \leqslant \left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta.$$

Но $\sum\limits_\alpha x_\alpha \eta \in S'$; следовательно, на основании леммы 3, в факторе $1/k(\eta)$ найдется элемент z такой, что

$$z\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta.$$

Таким образом,

$$\left(z + \sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = z\eta + \left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta.$$

Отсюда, в силу леммы 3, получаем:

$$z + \sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha x_\alpha,$$

что дает:

$$z \leqslant \sum_\alpha x_\alpha.$$

Аналогично можно показать, что для любого α $x_\alpha \leqslant z$ и поэтому

$$\sum_\alpha x_\alpha \leqslant z.$$

Итак, из соотношений $z \leqslant \sum_\alpha x_\alpha$ и $\sum_\alpha x_\alpha = z$ выводим:

$$z = \sum_\alpha x_\alpha.$$

Но тогда

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta.$$

Второе равенство следствия доказывается аналогично.

ЛЕММА 3′. *Если* η *есть гомоморфное отображение структуры* S *на* S', *то*

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta.$$

Доказательство. Так как

$$k(\eta) + \sum_\alpha x_\alpha = \sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha],$$

то

$$\left[k(\eta) + \sum_\alpha x_\alpha\right]\eta = \left\{\sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha]\right\}\eta$$

и потому

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha]\,\eta.$$

Далее, так как для любого α $[k(\eta) + x_\alpha] \in 1/k(\eta)$, то, по следствию 2, из леммы 3 будем иметь:

$$\left\{\sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha]\right\}\eta = \sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha]\,\eta.$$

Но

$$[k(\eta) + x_\alpha]\,\eta = x_\alpha \eta,$$

поэтому

$$\left\{\sum_\alpha [k(\eta) + x_\alpha]\right\}\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta.$$

Таким образом,

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если в определении 1 предположить, что структуры S и S' полные, а требования 1) и 4) заменить условием

$$\left(\sum_\alpha x_\alpha\right)\eta = \sum_\alpha x_\alpha \eta,$$

то мы получим другое определение гомоморфизма, которое, как легко проверить, учитывая лемму 3′, эквивалентно в полных структурах определению 1. Утверждение, доказанное в замечании на стр. 447, содержится в определении гомоморфизма, данном в работе ([1]). Этим оно отличается от определения гомоморфизма, приводимого в настоящем замечании.

Определение 4. Изоморфное отображение η структуры S на себя называется *автоморфизмом* структуры S.

Определение 5. Гомоморфное отображение структуры S на некоторую свою подструктуру S_a называется *эндоморфизмом* структуры S.

В дальнейшем вместо выражений «эндоморфизм η структуры S индуцирует изоморфное отображение подструктуры S_x на подструктуру S_y, где $y = x\eta$», или, в случае, когда $y = x$, «эндоморфизм η структуры S индуцирует автоморфизм подструктуры S_x», мы будем говорить соответственно: «эндоморфизм η структуры S индуцирует изоморфное отображение элемента x на элемент $y = x\eta$» и «эндоморфизм η структуры S индуцирует автоморфизм элемента x».

Определение 6. *Произведением эндоморфизмов* структуры S, взятых в конечном числе, называется результат их последовательного применения.

ЛЕММА 4. *Если η есть произведение конечного множества эндоморфизмов структуры S, то $1/k(\eta) \simeq 1\eta/0$, где $k(\eta)$ — максимальный элемент структуры S, который отображается при η в ноль*.*

Доказательство. Пусть $\eta = \prod_{i=1}^{n} \eta_i$, где η_i — эндоморфизмы структуры S. Обозначим через $\overline{\eta}_l$ произведение $\prod_{i=1}^{l} \eta_i$, т. е. положим

$$\overline{\eta}_l = \prod_{i=1}^{l} \eta_i.$$

Для $l = 1$ справедливость нашего утверждения следует из леммы 3.

Предположим теперь, что лемма уже доказана для $l = m$, где $m < n$, т. е. что

$$1/k(\overline{\eta}_m) \simeq 1\overline{\eta}_m/0.$$

Тогда, согласно лемме 3, для эндоморфизма η_{m+1} будем иметь:

$$1\overline{\eta}_m/1\overline{\eta}_m k(\eta_{m+1}) \simeq 1\overline{\eta}_{m+1}/0,$$

где

$$\overline{\eta}_{m+1} = \overline{\eta}_m \eta_{m+1}.$$

Так как $1/k(\overline{\eta}_m) \simeq 1\overline{\eta}_m/0$, то существует, и притом единственный, элемент $x \in 1/k(\overline{\eta}_m)$ такой, что

$$x\overline{\eta}_m = 1\overline{\eta}_m\, k(\eta_{m+1}).$$

Отсюда получаем:

$$x\overline{\eta}_{m+1} = 0$$

и, значит, $x \leqslant k(\overline{\eta}_{m+1})$. Следовательно,

$$1\overline{\eta}_m k(\eta_{m+1}) = x\overline{\eta}_m \leqslant k(\overline{\eta}_{m+1})\overline{\eta}_m \leqslant 1\overline{\eta}_m,$$

т. е.

$$1\overline{\eta}_m k(\eta_{m+1}) \leqslant k(\overline{\eta}_{m+1})\overline{\eta}_m \leqslant 1\overline{\eta}_m.$$

---

* Мы не можем говорить о ядре $k(\eta)$ эндоморфизма η, так как еще неизвестно, что произведение эндоморфизмов структуры (взятых в конечном числе) есть эндоморфизм структуры.

Но так как
$$[k(\overline{\eta}_{m+1})\,\overline{\eta}_m]\,\eta_{m+1}=0,$$
то
$$k(\overline{\eta}_{m+1})\overline{\eta}_m\leqslant 1\overline{\eta}_m\,k(\eta_{m+1}).$$
Таким образом, имеем:
$$k(\overline{\eta}_{m+1})\,\overline{\eta}_m=1\overline{\eta}_m\,k(\eta_{m+1})=x\overline{\eta}_m.$$
Отсюда, в силу изоморфизма $1/k(\overline{\eta}_m)\simeq 1\overline{\eta}_m/0$, получаем:
$$x=k(\overline{\eta}_{m+1}).$$
Теперь легко заметить, что
$$1/k(\overline{\eta}_{m+1})\simeq 1\overline{\eta}_m/1\overline{\eta}_m\,k(\eta_{m+1})$$
и поэтому
$$1/k(\overline{\eta}_{m+1})\simeq 1\overline{\eta}_{m+1}/0.$$

Следовательно, лемма доказана и для $l=m+1$, а потому, в силу индукции, и для любого натурального числа.

Следствие 1. *Произведение конечного множества эндоморфизмов структуры S есть также эндоморфизм структуры S.*

Действительно, если η есть произведение конечного множества эндоморфизмов структуры S, то, очевидно, $1\eta\leqslant 1$ и, как легко проверить, для η выполняются условия 1), 2) и 4) определения 1. Покажем, что и условие 3) определения 1 выполняется для эндоморфизма η. В самом деле, пусть $x\eta=y\eta$. Тогда
$$[x+k(\eta)]\,\eta=[y+k(\eta)]\,\eta.$$
Но, согласно лемме 4, $1/k(\eta)\simeq 1\eta/0$, и так как
$$k(\eta)\leqslant x+k(\eta)\leqslant 1$$
и
$$k(\eta)\leqslant y+k(\eta)\leqslant 1,$$
то
$$x+k(\eta)=y+k(\eta),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Если эндоморфизм η_1 структуры S индуцирует изоморфное отображение элемента x на элемент y, а эндоморфизм η_2 индуцирует изоморфное отображение y на элемент x, то эндоморфизм $\eta=\eta_1\eta_2$ индуцирует автоморфизм элемента x.*

Если η — эндоморфизм структуры S, то η^i, $i=1, 2, \ldots$, также является эндоморфизмом структуры S, ядро которого есть $k(\eta^i)$, $i=1,2\ldots$. Очевидно, что
$$k(\eta)\leqslant k(\eta^2)\leqslant\ldots\leqslant k(\eta^i)\leqslant\ldots.$$

Определение 7. Назовем элемент $r(\eta)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}k(\eta^i)$ *радикалом* эндоморфизма η структуры S.

Определение 8. Пусть η — эндоморфизм структуры S. Назовем элемент $x\in S$ *η-допустимым*, если $x\eta\leqslant x$.

Легко заметить, что если η — эндоморфизм структуры S^*, то он индуцирует эндоморфизм подструктуры S_x, где x — η-допустимый элемент S^*, ядро которого есть $xk(\eta)$, а радикал — $xr(\eta)$. Очевидно, что множество всех η-допустимых элементов структуры S образует подструктуру структуры S. Мы ее будем обозначать через $S(\eta)$.

ЛЕММА 5. *Пусть* η — *эндоморфизм структуры* S. *Если существует такое целое положительное число* i, *что* $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$, *то*

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = k(\eta^{i+2}) = \ldots = r(\eta).$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Тогда

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+2}).$$

Действительно, так как

$$k(\eta^{i+2})\,\eta^{i+2} = 0,$$

то

$$[k(\eta^{i+2})\,\eta]\,\eta^{i+1} = 0$$

и поэтому

$$k(\eta^{i+2})\,\eta \leqslant k(\eta^{i+1}) = k(\eta^i);$$

следовательно,

$$k(\eta^{i+2})\,\eta^{i+1} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$k(\eta^{i+2}) \leqslant k(\eta^{i+1})$$

и, значит,

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = k(\eta^{i+2}).$$

Предположим, что наше предположение доказано для $j-1$, т. е. что

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = \ldots = k(\eta^{i+j-1}).$$

Тогда из равенства

$$[k(\eta^{i+j})\,\eta]\,\eta^{i+j-1} = 0$$

следует:

$$k(\eta^{i+j})\,\eta \leqslant k(\eta^{i+j-1}) = k(\eta^i).$$

Поэтому

$$k(\eta^{i+j})\,\eta^{i+1} = 0$$

и, значит,

$$k(\eta^{i+j}) \leqslant k(\eta^{i+1}) = k(\eta^i).$$

Отсюда получаем:

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+j}),$$

т. е. наше утверждение доказано и для j. Тем самым равенство

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+l})$$

справедливо для любого натурального l, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 6. *Если* η — *эндоморфизм структуры* S, *то* $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$ *тогда и только тогда, когда* $1\eta^i k(\eta^i) = 0$.

Доказательство. В самом деле, пусть $1\eta^i k(\eta^i) = 0$. Тогда эндоморфизм η индуцирует изоморфное отображение элемента $1\eta^i$ на элемент $1\eta^{i+1}$, так как $(1\eta^i)\,\eta = 1\eta^{i+1}$ и $k(\eta)\,1\eta^i = 0$. Поскольку эндомор-

физм η^i индуцирует изоморфное отображение $1/k(\eta^i)$ на $1\eta^i/0$, существует такой элемент $x \in 1\eta^i/0$, что

$$k(\eta^{i+1})\,\eta^i = x$$

и потому

$$k(\eta^{i+1})\,\eta^{i+1} = x\eta = 0.$$

Следовательно, $x = 0$. Но тогда и $k(\eta^{i+1})\,\eta^i = 0$. Отсюда получаем:

$$k(\eta^{i+1}) \leqslant k(\eta^i).$$

Но $k(\eta^i) \leqslant k(\eta^{i+1})$ и, значит,

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}).$$

Обратно, пусть $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$. Тогда, так как эндоморфизм η^i индуцирует изоморфное отображение $1/k(\eta^i)$ на $1\eta^i/0$, найдется такой элемент $y \in 1/k(\eta^i)$, что

$$y\eta^i = 1\eta^i k(\eta^i) \leqslant 1\eta^i.$$

Отсюда имеем:

$$y\eta^{2i} = 0$$

и потому, согласно лемме 5,

$$y \leqslant k(\eta^i).$$

Следовательно, $y\eta^i = 0$. Но

$$y\eta^i = 1\eta^i k(\eta^i)$$

и, значит,

$$1\eta^i k(\eta^i) = 0.$$

ЛЕММА 7. *Пусть* η — *эндоморфизм структуры* S. *Если элемент* x *структуры* S *удовлетворяет условиям* $x\eta = x$ *и* $xk(\eta^i) = xk(\eta^{i+1})$, *то* $xk(\eta^i) = 0$.

Доказательство. Так как $x\eta = x$, то найдется такой элемент $y \leqslant x$, что

$$y\eta = xk(\eta^i).$$

Отсюда получаем: $y\eta^{i+1} = 0$. Следовательно,

$$y \leqslant xk(\eta^{i+1}) = xk(\eta^i)$$

и потому $y\eta^i = 0$. Но так как $y\eta = xk(\eta^i)$, то

$$[xk(\eta^i)]\,\eta^{i-1} = 0$$

и, значит,

$$xk(\eta^i) \leqslant k(\eta^{i-1}).$$

Отсюда следует, что

$$xk(\eta^i) \leqslant xk(\eta^{i-1});$$

но

$$xk(\eta^{i-1}) \leqslant xk(\eta^i),$$

поэтому

$$xk(\eta^{i-1}) = xk(\eta^i).$$

Предположим, что мы уже доказали, что

$$xk(\eta^2) = xk(\eta^3) = \ldots = xk(\eta^i).$$

Тогда, как и выше, можно доказать, что

$$xk(\eta) = xk(\eta^2).$$

Предположим теперь, что при $x\eta = x$

$$z\eta = xk(\eta) = xk(\eta^2),$$

где $z \leqslant x$. Тогда $z\eta^2 = 0$ и потому $z \leqslant k(\eta)$. Отсюда следует, что $z\eta = 0$ и, значит,

$$xk(\eta) = xk(\eta^2) = 0.$$

Таким образом, мы получили:

$$xk(\eta^i) = xk(\eta^{i+1}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8. *Если* η — *эндоморфизм структуры* S *и* $x\eta = x$, $xk(\eta^i) = xk(\eta^{i+1})$, *то*

$$0 = xk(\eta) = xk(\eta^2) = \ldots = xk(\eta^i) = xk(\eta^{i+1}) = \ldots.$$

Справедливость этой леммы следует из определения элемента $xk(\eta^i)$ и лемм 5 и 7.

ЛЕММА 9. *Если* η — *эндоморфизм структуры* S^{**} *и* $x\eta = x$, $xk(\eta^i) = xk(\eta^{i+1})$, *то* $xr(\eta) = 0$.

Согласно лемме 8, имеем:

$$0 = xk(\eta) = xk(\eta^2) = \cdots = xk(\eta^i) = \cdots.$$

Но тогда, на основании свойства (**), будем иметь:

$$xr(\eta) = x\sum_{i=1}^{\infty} k(\eta^i) = 0,$$

т. е.

$$xr(\eta) = 0.$$

ЛЕММА 10. *Пусть* η — *эндоморфизм структуры* S *и* x — η-*допустимый элемент этой структуры. Если существуют такие целые положительные числа* i *и* j, *что* $xk(\eta^i) = 0$, $x\eta^j = x\eta^{j+1}$, *то* $x\eta = x$.

Действительно, из равенства $xk(\eta^i) = 0$ следует:

$$0 = xk(\eta) = \cdots = xk(\eta^{i-1}) = xk(\eta^i).$$

Отсюда, согласно определению элементов $xk(\eta^l)$ и в силу леммы 5, получаем:

$$0 = xk(\eta) = \cdots = xk(\eta^{i-1}) = xk(\eta^i) = \cdots.$$

Из равенства $x\eta^j = x\eta^{j+1}$, на основании леммы 2, имеем:

$$x + k(\eta^j) = k(\eta^j) + x\eta.$$

Так как $x\eta \leqslant x$, то, умножая обе части последнего равенства на x, получим:

$$x = xk(\eta^j) + x\eta.$$

Но $xk(\eta^j) = 0$; поэтому $x\eta = x$.

ЛЕММА 11. *Если эндоморфизм η структуры S индуцирует изоморфное отображение элемента x_1 на элемент y_1, а элемента x_2 — на элемент y_2, причем $y_1 \cdot y_2 = 0$, то эндоморфизм η индуцирует изоморфное отображение элемента $x = x_1 + x_2$ на элемент $y = y_1 + y_2$; при этом $x_1 \cdot x_2 = 0$.*

Доказательство. Действительно, $x\eta = x_1\eta + x_2\eta = y_1 + y_2 = y$, т. е. $x\eta = y$. Пусть для элемента $x' \leqslant x$ выполняется равенство $x'\eta = 0$; тогда из соотношений

$$[(x' + x_1) x_2] \eta \leqslant x_1\eta x_2\eta = y_1 \cdot y_2 = 0$$

следует равенство

$$[(x' + x_1) x_2] \eta = 0.$$

Так как η индуцирует изоморфное отображение элемента x_2 на y_2, то

$$(x' + x_1) x_2 = 0.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства x_1 и применяя модулярный закон, мы получим:

$$x' + x_1 = x_1.$$

Следовательно, $x' \leqslant x_1$. Так как $x'\eta = 0$ и η индуцирует изоморфное отображение элемента x_1 на y_1, то $x' = 0$. Покажем теперь, что $x_1 \cdot x_2 = 0$. В самом деле, из соотношений

$$(x_1x_2)\eta \leqslant x_1\eta\, x_2\eta = y_1y_2 = 0$$

следует:

$$(x_1x_2)\eta = 0$$

и, в силу того, что η индуцирует изоморфное отображение элемента x_1 на y_1, получаем: $x_1 \cdot x_2 = 0$.

Следствие. *Если эндоморфизм η структуры S индуцирует автоморфизм элементов x_1 и x_2, причем $x_1 \cdot x_2 = 0$, то он индуцирует автоморфизм элемента $x = x_1 + x_2$.*

ЛЕММА 12. *Пусть η_1, η_2 — два эндоморфизма структуры S, обладающие свойством $\eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = \eta$, и пусть элемент $c \in S$ удовлетворяет условиям:*

a) *эндоморфизм η индуцирует автоморфизм c,*

b) *если эндоморфизм η индуцирует автоморфизм $c' \in S$, то $c' \leqslant c$.*

Тогда каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 индуцирует автоморфизм элемента c.

Доказательство. Пусть $c\eta_1 = c'$. Тогда $c'\eta_2 = c$. Отсюда, согласно лемме 3, получаем: $c/ck(\eta_1) \simeq c'/0$ и $c'/c'k(\eta_2) \simeq c/0$. Из соотношения $c/ck(\eta_1) \simeq c'/0$ следует существование такого элемента $x \in c/ck(\eta_1)$, что

$$x\eta_1 = c'k(\eta_2).$$

Поэтому $x\eta_1\eta_2 = 0$. Но так как эндоморфизм $\eta = \eta_1\eta_2$ индуцирует автоморфизм элемента c, то $x = 0$ и, значит,

$$ck(\eta_1) = c'k(\eta_2) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что эндоморфизм η_1 индуцирует изоморфное отображение элемента c на элемент c', а эндоморфизм η_2 — изоморфное отображение элемента c' на c. Пусть теперь $c\eta_2 = c''$. Тогда $c''\eta_1 = c$. Аналогично предыдущему можно показать, что эндоморфизм η_2 индуцирует изоморфное отображение элемента c на c'', а эндоморфизм η_1 — изоморфное отображение элемента c'' на элемент c. Таким образом, мы доказали, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента c' и автоморфизм элемента c''. Следовательно, согласно условию b) леммы, мы имеем: $c' \leqslant c$ и $c'' \leqslant c$. Из этих неравенств получаем соответственно:

$$c = c'\eta_2 \leqslant c\eta_2 = c'', \quad c = c''\eta_1 \leqslant c\eta_1 = c',$$

т. е. $c \leqslant c''$ и $c = c'$. В силу сказанного выше, $c' = c$ и $c'' = c$, т. е.

$$c\eta_1 = c, \quad c\eta_2 = c.$$

Из этих равенств и вышеприведенных рассуждений и следует справедливость леммы.

Определение 9. Пусть η — эндоморфизм структуры S. Элемент $x \in S$ называется η-*афтоморфическим*, если $x\eta \leqslant x$ и из $y\eta \leqslant y \leqslant x$ следует $y = y\eta$. В дальнейшем мы также будем говорить, что эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента x.

Очевидно, что если эндоморфизм η структуры S индуцирует η-автоморфизм элемента x, то он индуцирует и автоморфизм этого элемента. Понятие η-автоморфического элемента было введено впервые Хостинским в работе ([1]).

ЛЕММА 13. *Сумма $x = x_1 + x_2$ двух η-автоморфических элементов x_1 и x_2 есть также η-автоморфический элемент.*

Доказательство. Действительно, так как $x_1\eta = x_1$, $x_2\eta = x_2$, то

$$x\eta = (x_1 + x_2)\eta = x_1\eta + x_2\eta = x_1 + x_2 = x,$$

т. е. $x\eta = x$. Пусть теперь $x'\eta \leqslant x' \leqslant x$; тогда, согласно модулярному закону, имеем:

$$x' + x_1 = x_1 + (x' + x_1)x_2.$$

Отсюда получаем:

$$x'\eta + x_1\eta = x_1\eta + [(x' + x_1)x_2]\eta$$

или

$$x'\eta + x_1 = x_1 + [(x' + x_1)x_2]\eta.$$

так как эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента x_2, то из

$$[(x' + x_1)x_2]\eta \leqslant (x' + x_1)x_2 \leqslant x_2$$

следует

$$[(x' + x_1)x_2]\eta = (x' + x_1)x_2\,.$$

поэтому

$$x'\eta + x_1 = x_1 + (x' + x_1)x_2 = (x_1 + x_2)(x' + x_1) = x' + x_1.$$

т. е.

$$x'\eta + x_1 = x_1 + x'.$$

Умножая обе части последнего равенства на x', будем иметь:

$$x'\eta + x_1x' = x'.$$

Но эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента x_1 и поэтому из соотношений

$$(x_1x')\,\eta \leqslant x_1x' \leqslant x_1$$

вытекает равенство

$$(x_1x')\,\eta = x_1x'.$$

Таким образом,

$$x'\eta + x_1x' = x'\eta + (x,\, x')\,\eta = (x' + x_1x')\,\eta = x'\eta,$$

т. е.

$$x'\eta + x_1x' = x'\eta.$$

Следовательно, из равенства

$$x'\eta + x_1x' = x'$$

имеем

$$x'\eta = x',$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Сумма конечного множества η-автоморфических элементов структуры S есть η-автоморфический элемент.*

Так как произведение двух η-автоморфических элементов, очевидно, есть также η-автоморфический элемент, то множество всех η-автоморфических элементов структуры S образует подструктуру структуры S.

ЛЕММА 14. *Пусть η — эндоморфизм структуры S^*. Тогда сумма счетного множества η-автоморфических элементов структуры S^* есть η-автоморфический элемент.*

Доказательство. Пусть дано счетное множество η-автоморфических элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ структуры S^*. Тогда элементы

$$y_1 = x_1,\; y_2 = x_1 + x_2, \ldots, y_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \ldots,$$

образующие возрастающую цепочку

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_k \leqslant \cdots,$$

будут, согласно следствию из леммы 13, также η-автоморфическими. Покажем, что их сумма есть η-автоморфический элемент. Если

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i,$$

то $y = y\eta$. Пусть теперь $x\eta \leqslant x \leqslant y$; тогда

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} xy_i.$$

Отсюда следует:

$$x\eta = \sum_{i=1}^{\infty} (xy_i)\,\eta.$$

Но так как η индуцирует η-автоморфизм элемента y_i, то из

$$(xy_i)\,\eta \leqslant xy_i \leqslant y_i$$

следует

$$(xy_i)\,\eta = xy_i.$$

Поэтому

$$x\eta = \sum_{i=1}^{\infty} (xy_i)\,\eta = \sum_{i=1}^{\infty} xy_i = x\sum_{i=1}^{\infty} y_i = xy = x,$$

т. е. мы получили, что $x = x\eta$. Этим лемма доказана.

В работе (1) было установлено, что сумма произвольного множества η-автоморфических элементов структуры S^{***} тогда и только тогда будет η-автоморфическим элементом, если сумма любых двух η-автоморфических элементов есть η-автоморфический элемент. Из этого утверждения и леммы 13 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Сумма произвольного множества η-автоморфических элементов структуры S^{***} есть η-автоморфический элемент.*

Замечание. В разделе II п. 4 работы (1) были указаны необходимые и достаточные условия для однородного расщепления эндоморфизма η структуры S^{***} в предположении, что сумма любого множества η-автоморфических элементов структуры есть η-автоморфический элемент. Последнее условие, как следует из теоремы 1, является лишним в структуре S^{***}.

ЛЕММА 15. *Если эндоморфизм η структуры S индуцирует автоморфизм элемента x_1 и η-автоморфизм элемента x_2, то он индуцирует автоморфизм элемента $x = x_1 + x_2$.*

Действительно, мы имеем:

$$x\eta = (x_1 + x_2)\,\eta = x_1\eta + x_2\eta = x_1 + x_2 = x_1,$$

т. е.

$$x = x\eta.$$

Пусть теперь для $x' \leqslant x$ выполняется равенство $x'\eta = 0$. Покажем, что $x' = 0$. В самом деле, согласно модулярному закону,

$$x' + x_1 = x_1 + (x' + x_1)\,x_2,$$

и, следовательно,

$$x'\eta + x_1\eta = x_1\eta + [(x' + x_1)\,x_2]\,\eta$$

или

$$x_1 = x_1 + [(x' + x_1)\,x_2]\,\eta.$$

Так как эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента x_2, то из соотношений

$$[(x' + x_1)\,x_2]\,\eta \leqslant x_2x_1 \leqslant (x' + x_1)\,x_2 \leqslant x_2$$

получим:

$$[(x' + x_1)\,x_2]\,\eta = (x' + x_1)\,x_2.$$

Поэтому

$$x_1 = x_1 + [(x' + x_1)\,x_2]\,\eta = x_1 + (x' + x_1)\,x_2,$$

т. е.

$$x_1 = x_1 + (x' + x_1)\,x_2.$$

Отсюда, согласно модулярному закону, будем иметь:

$$x_1 = x_1 + x'.$$

Следовательно, $x' \leqslant x_1$. А так как эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента x_1, то из соотношений $x' \leqslant x_1$ и $x'\eta = 0$ следует, что $x' = 0$.

ЛЕММА 16. *Пусть η — эндоморфизм структуры S. Если среди максимальных элементов структуры S, отображающихся при η изоморфно на себя, есть η-автоморфический, то он будет единственным максимальным элементом структуры S, изоморфно отображающимся при η на себя.*

Доказательство. Пусть среди максимальных элементов структуры S, изоморфно отображающихся при η на себя, есть η-автоморфический элемент c, и пусть c' — любой элемент структуры S, изоморфно отображающийся при η на себя. Тогда, согласно лемме 15, эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $\bar{c} = c + c'$. Согласно определению элемента c, имеем: $\bar{c} = c$, т. е. $c = c + c'$ и, следовательно, $c' \leqslant c$.

В связи с леммой 16 интересно отметить следующие результаты из теории групп.

ЛЕММА 17. *Пусть η — эндоморфизм группы G. Всякая периодическая абелева подгруппа H группы G, все примарные компоненты которой удовлетворяют условию минимальности и которая изоморфно отображается при η на себя, есть η-автоморфическая подгруппа группы G, т. е. подгруппа, изоморфно отображающаяся при η на себя и такая, что для всякой подгруппы $H' \subseteqq H$, для которой $H'\eta \subseteqq H'$, выполняется соотношение $H'\eta = H'$.*

Действительно, пусть эндоморфизм η группы G индуцирует изоморфное отображение подгруппы H на себя, и пусть для $H' \subseteqq H$ выполняется соотношение $H'\eta \subseteqq H'$. Тогда $H'\eta = H'$, так как в противном случае в одной из примарных компонент группы H существовала бы бесконечная убывающая цепочка подгрупп.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть η есть эндоморфизм группы G. Если среди максимальных нормальных делителей группы G, отображающихся при η изоморфно на себя, есть периодическая абелева подгруппа H, все примарные компоненты которой удовлетворяют условию минимальности, то H будет единственным максимальным нормальным делителем группы G, отображающимся при η изоморфно на себя.*

Справедливость этой теоремы следует из лемм 17 и 16.

ЛЕММА 18. *Пусть η_1 и η_2 — эндоморфизмы структуры S, удовлетворяющие условиям:*

a) $\eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = \eta$;

b) *всякий элемент структуры S, допустимый относительно одного из этих эндоморфизмов, является допустимым и относительно другого.*

Тогда если среди максимальных элементов структуры S, отображающихся при η изоморфно на себя, есть η-автоморфический элемент c, то элемент c является η_1-автоморфическим и η_2-автоморфическим.

Доказательство. Если эндоморфизм $\eta = \eta_1\eta_2$ индуцирует автоморфизм элемента c', то, по лемме 16, $c' \leqslant c$. Отсюда и из леммы 12

следует, что каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 индуцирует автоморфизм элемента c. Если теперь $x\eta_1 \leqslant x \leqslant c$, то и $x\eta_2 \leqslant x \leqslant c$ и поэтому

$$x\eta \leqslant x\eta_1 \leqslant x \leqslant c$$

и

$$x\eta \leqslant x\eta_2 \leqslant x \leqslant c.$$

Так как элемент c есть η-автоморфический, то $x = x\eta$ и, следовательно, из предыдущих неравенств получаем: $x = x\eta_1$ и $x = x\eta_2$. Этим лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся еще два понятия, введенные в работе ([8]).

Определение 10. Если η — эндоморфизм структуры S, то η-допустимый элемент q этой структуры называется *минимальным η-допустимым над r*, если из $r < s \leqslant q$, где s — η-допустимый, следует $s = q$.

Определение 11. Будем говорить, что элементы a_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, структуры S образуют *η-цепь Леви*, если $a_0 = 0$ и каждый элемент a_i для $i > 0$ есть сумма минимальных η-допустимых над a_{i-1} элементов.

ЛЕММА 19. *Если эндоморфизмы η_1 и η_2 структуры S удовлетворяют условиям* a) *и* b) *леммы* 18, *то всякий минимальный η_1-допустимый над r элемент является минимальным η_2-допустимым над r и обратно.*

Справедливость леммы следует из свойств a) и b) эндоморфизмов η_1 и η_2 и определения 10.

ЛЕММА 20. *Если эндоморфизмы η_1 и η_2 структуры S удовлетворяют условиям* a) *и* b) *леммы* 18, *то всякая η_1-цепь Леви * является и η_2-цепью Леви и обратно.*

Справедливость леммы следует из леммы 19 и определения 11.

ЛЕММА 21. *Если эндоморфизм η структуры S^{**} индуцирует автоморфизм каждого элемента цепочки $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_i \leqslant \ldots$, то η индуцирует автоморфизм и элемента $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$.*

Действительно, согласно определению 4 и условию леммы, имеем:

$$y\eta = \sum_{i=1}^{\infty} y_i\eta = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = y,$$

т. е. $y = y\eta$. Пусть для $x \leqslant y$ выполняется равенство $x\eta = 0$. Тогда, поскольку η индуцирует автоморфизм элемента y_i, $i = 1, 2, 3 \ldots$, из $(xy_i)\eta = 0$ следует $xy_i = 0$ для $i = 1, 2, 3 \ldots$ Отсюда и из условия (**) получаем: $xy = 0$. Но $xy = x$ и потому $x = 0$. Лемма доказана.

§ 2. Определение 12. Назовем эндоморфизм η структуры S *расщепляющим*, если существует такой элемент $c \in S$, что

a) $c\eta = c$,

b) $1 = r(\eta) + c$.

Элемент c, удовлетворяющий условиям a) и b) этого определения, называется *дополнением* эндоморфизма η. Из определения 12 следует, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента c.

---

* См. ([8]).

Определение 13. Эндоморфизм η структуры S называется *однородно расщепляющим*, если он индуцирует расщепляющий эндоморфизм в любой подструктуре S_x, где x — η-допустимый элемент структуры S.

Как понятие расщепляющего, так и однородно расщепляющего эндоморфизма лупы было введено Р. Бэром ([10]). Перенесение понятия однородно расщепляющего эндоморфизма в структуры было сделано Хостинским ([1]).

Определение 14. Эндоморфизм η структуры S называется *A-расщепляющим*, если существует такой элемент $c \in S$, что

a) эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента c;

b) если η индуцирует автоморфизм элемента $c' \in S$, то $c' \leqslant c$;

c) $1 = r(\eta) + c$.

Определение 15. Эндоморфизм η структуры S называется *η-расщепляющим*, если существует такой элемент $c \in S$, что

a) эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента c;

b) $1 = r(\eta) + c$.

ТЕОРЕМА 3. *Если эндоморфизм η структуры S является однородно расщепляющим, то он есть η-расщепляющий.*

Доказательство. Пусть эндоморфизм η структуры S есть однородно расщепляющий. Тогда $1 = r(\eta) + c$, где $c\eta = c$, и также для любого η-допустимого элемента y структуры S имеем:

$$y = r_y(\eta) + u, \quad u\eta = u$$

(через $r_y(\eta)$ обозначен радикал эндоморфизма, который индуцирует η в S_y). Если $y \leqslant c$, то $r_y(\eta) = 0$ и поэтому $y = u$. Следовательно, $y\eta = u\eta = u = y$, т. е. $y = y\eta$. Последнее равенство и доказывает η-автоморфизм элемента c.

ТЕОРЕМА 4. *Если эндоморфизм η структуры S^* является η-расщепляющим, то он есть однородно расщепляющий.*

Доказательство. Пусть эндоморфизм η структуры S^* есть η-расщепляющий. Тогда $1 = r(\eta) + c$, где c — η-автоморфический элемент структуры S^*. Пусть x — произвольный η-допустимый элемент структуры. Тогда, поскольку эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента c, из соотношений

$$[c(x + k(\eta^i))]\,\eta \leqslant c(x + k(\eta^i)) \leqslant c$$

следует равенство

$$[c(x + k(\eta^i))]\,\eta = c(x + k(\eta^i))$$

и, значит,

$$[c(x + k(\eta^i))]\,\eta^i = c(x + k(\eta^i)).$$

Но так как

$$cx \leqslant c(x + k(\eta^i))$$

и

$$[c(x + k(\eta^i))]\,\eta^i \leqslant cx,$$

то

$$c(x + k(\eta^i)) = cx.$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c(x + k(\eta^i)) = c\sum_{i=1}^{\infty}(x + k(\eta^i)) = c\left(x + \sum_{i=1}^{\infty} k(\eta^i)\right) = c[x + r(\eta)] = cx.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства $r(\eta)$ и применяя модулярный закон, получаем:

$$x + r(\eta) = cx + r(\eta).$$

Отсюда, на основании модулярного закона, имеем:

$$x = xr(\eta) + cx,$$

где

$$(cx)\,\eta = cx.$$

В самом деле, так как эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента c, то из $(cx)\,\eta \leqslant cx \leqslant c$ следует: $(cx)\,\eta = cx$. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Эндоморфизм η структуры S^* тогда и только тогда будет однородно расщепляющим, если он η-расщепляющий.*

ЛЕММА 22. *Если эндоморфизм η структуры S^{**} — η-расщепляющий и индуцирует автоморфизм элемента $c' \in S^{**}$, то он индуцирует η-автоморфизм элемента c'.*

Доказательство. Согласно условию леммы, $1 = r(\eta) + c$, где c — η-автоморфический элемент. Если η индуцирует автоморфизм элемента c', то, на основании леммы 15, получим, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $c + c'$. Следовательно,

$$c + c' = r(\eta)\cdot(c + c') + c.$$

Очевидно, что $r(\eta)\cdot(c + c') = 0$ и поэтому $c + c' = c$, т. е. $c' \leqslant c$. Отсюда и следует наше утверждение, так как η индуцирует η-автоморфизм элемента c и автоморфизм элемента c'.

Следствие 1. *Если эндоморфизм η структуры S^{**} есть η-расщепляющий, то сумма любого множества η-автоморфических элементов есть η-автоморфический элемент.*

Следствие 2. *Если эндоморфизм η структуры S^{**} есть η-расщепляющий, то он является и A-расщепляющим.*

ТЕОРЕМА 6. *Если эндоморфизм η структуры S^{**} есть η-расщепляющий, то дополнение c эндоморфизма η определено однозначно и равно сумме всех η-автоморфических элементов структуры S^{**}.*

Первое утверждение теоремы следует из леммы 22. Докажем второе утверждение. Пусть

$$c' = \sum_{\alpha} c_{\alpha}$$

есть сумма всех η-автоморфических элементов c_{α} структуры S^{**}. Тогда $c \leqslant c'$, но, по лемме 22, $c_{\alpha} \leqslant c$ и поэтому

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} \leqslant c,$$

т. е. $c' \leqslant c$. Следовательно,

$$c = c' = \sum_{\alpha} c_{\alpha}.$$

Следствие. *Пусть эндоморфизм η структуры S^* есть η-расщепляющий и c — его дополнение в структуре S^*. Тогда если x — произвольный η-допустимый элемент S^*, то cx есть однозначно определенное дополнение эндоморфизма, который η индуцирует в S^*, и равно сумме всех η-автоморфических элементов структуры S^*.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теорем 4 и 6.

Определение 16.

A) Будем говорить, что элемент x структуры S удовлетворяет условию A), если из того, что для некоторой пары элементов y и z $(z \leqslant y \leqslant x)$ $y/0 \simeq y/z$, следует $z = 0$.

B) Будем говорить, что элемент x структуры S удовлетворяет условию B), если из того, что для некоторой пары элементов y и z $(z \leqslant y \leqslant x)$ $y/0 \simeq z/0$, следует $y = z$.

Определение 17. Пусть η есть эндоморфизм структуры S. Назовем фактор-структуру x/y структуры S η-автоморфической, если $x\eta = x$, $y\eta = y$ и из $y \leqslant z\eta \leqslant z \leqslant x$ следует $z = z\eta$.

ЛЕММА 23. *Если каждая из фактор-структур $x_1/0$ и x_2/x_1 есть η-автоморфическая, то и фактор-структура $x_2/0$ есть η-автоморфическая.*

Доказательство. Действительно, пусть $x \in x_2/0$ и $x\eta \leqslant x$. Тогда

$$x_1 \leqslant x_1 + x \leqslant x_2$$

и

$$0 \leqslant x_1 x \leqslant x_1,$$

следовательно,

$$0 \leqslant (x_1 x)\,\eta \leqslant x_1 (x\eta) \leqslant x_1 x \leqslant x_1$$

и

$$x_1 \leqslant (x_1 + x)\,\eta \leqslant x_1 + x \leqslant x_2.$$

Отсюда, согласно условию леммы, имеем:

$$x_1 (x\eta) = x_1 x,$$

$$x_1 + x\eta = x_1 + x.$$

Так как $x\eta \leqslant x$, то, в силу модулярного закона, получим: $x = x\eta$. Лемма доказана.

Определение 18. Назовем ряд

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant \cdots \leqslant x_n = y$$

подструктуры S_y η-автоморфическим, если каждый его фактор x_i/x_{i-1} есть η-автоморфический.

ЛЕММА 24. *Пусть η есть эндоморфизм структуры S. Если подструктура S_y структуры S обладает η-автоморфическим рядом, то η индуцирует η-автоморфизм элемента y.*

Справедливость этой леммы, очевидно, следует из леммы 23.

§ 3. ТЕОРЕМА 7. *Если для эндоморфизма η структуры S существует такое целое положительное число i, что η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$, то эндоморфизм η есть A-расщепляющий.*

Доказательство. Согласно условию теоремы, $1\eta^i = 1\eta^{i+1}$ и поэтому

$$1\eta^i = (1\eta^i)\,\eta^i.$$

Отсюда и из леммы 2 имеем:

$$1 = k(\eta^i) + 1\eta^i.$$

Так как эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$, то

$$1\eta^i \cdot k(\eta^i) = 0.$$

Отсюда, в силу лемм 6 и 5, следует, что

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = \ldots = r(\eta).$$

Таким образом,

$$1 = r(\eta) + c,$$

где $c = 1\eta^i \cdot A$-расщепляемость эндоморфизма η следует из того, что если эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $c' \in S$, то из неравенства $c' \leqslant 1$ получаем $c' \leqslant 1\eta^i = c$.

ТЕОРЕМА 8. *Если для эндоморфизма η структуры S существует такое целое положительное число i, что $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$, то эндоморфизм η тогда и только тогда будет A-расщепляющим, если найдется такое целое положительное число j, что $1\eta^j = 1\eta^{j+1}$.*

Доказательство. Пусть существуют целые и положительные числа i и j такие, что выполняются равенства

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$$

и

$$1\eta^j = 1\eta^{j+1}.$$

Отсюда, в силу леммы 5, имеем:

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}) = k(\eta^{i+2}) = \ldots = r(\eta),$$

а в силу леммы 7

$$1\eta^j k(\eta^i) = \eta^j k(\eta^{i+1}) = 0.$$

Так как $1\eta^j = 1\eta^{j+1}$, то $1\eta^j = (1\eta^j)\,\eta^j$ и потому, в силу леммы 2,

$$1 = k(\eta^j) + 1\eta^j.$$

Легко заметить, что как для $j \leqslant i$, так и для $j > i$

$$1\eta^j k(\eta^j) = 0$$

и, следовательно,

$$1 = k(\eta^j) + 1\eta^j.$$

Если $j < i$, то

$$k(\eta^j) \leqslant k(\eta^i)$$

и поэтому, умножая последнее равенство на $k(\eta^i)$, получим:

$$k(\eta^i) = k(\eta^j) + 1\eta^j k(\eta^i).$$

Очевидно, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^j$, поэтому

$$1\eta^j k(\eta^i) = 0.$$

Таким образом,

$$k(\eta^i) = k(\eta^j),$$

и, следовательно,

$$1 = r(\eta) + c,$$

где

$$c = 1\eta^j.$$

Доказательство A-расщепляемости эндоморфизма η проводится так же, как в предыдущей теореме.

Докажем обратное утверждение. Если

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$$

и

$$1 = r(\eta) + c,$$

где $c\eta = c$, то, по лемме 5,

$$r(\eta) = k(\eta^i),$$

и поэтому

$$1 = k(\eta^i) + c.$$

Отсюда получаем:

$$1\eta^i = 1\eta^{i+1}.$$

Следствие. *Если i есть наименьшее целое положительное число, для которого $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$, то равенство $1\eta^j = 1\eta^{j+1}$ может выполняться лишь при $j \geqslant i$.*

ЛЕММА 25. *Пусть η_1 и η_2 — эндоморфизмы структуры S, удовлетворяющие условию $\eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = \eta$. Если для эндоморфизма η_1 существует такое целое положительное число i, что эндоморфизм η_1 индуцирует автоморфизм элемента $1\eta_1^i$, то $1\eta^i = 1\eta_1^i \cdot 1\eta_2^i$.*

Действительно, пусть условия леммы выполнены. Тогда, на основании теоремы 7, имеем:

$$1 = k(\eta_1^i) + 1\eta_1^i.$$

Отсюда находим:

$$1\eta_2^i = k(\eta_1^i)\,\eta_2^i + 1\eta_1^i\,\eta_2^i = k(\eta_1^i)\,\eta_2^i + 1\eta^i,$$

т. е.

$$1\eta_2^i = k(\eta_1^i)\,\eta_2^i + 1\eta^i.$$

Так как $k(\eta_1^i)\,\eta_2^i \leqslant k(\eta_1^i)$ и $1\eta^i \leqslant 1\eta_1^i$, то, умножая обе части последнего равенства на $1\eta_1^i$, мы получим:

$$1\eta_1^i \cdot 1\eta_2^i = 1\eta^i.$$

ТЕОРЕМА 9. *Пусть η_1 и η_2 — эндоморфизмы структуры S, удовлетворяющие условию $\eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = \eta$. Если для эндоморфизмов η_1 и η_2 существуют такие целые положительные числа соответственно i и j, что эндоморфизм η_1 индуцирует автоморфизм элемента $1\eta_1^i$, а эндомор-*

физм η_2 — *автоморфизм элемента* $1\eta_2^j$, *то эндоморфизм* η *индуцирует автоморфизм элемента* $1\eta^l$, *где* $l = \max(i, j)$, *и* $k(\eta^l) = k(\eta_1^l) + k(\eta_2^l)$.

Доказательство. Согласно условию теоремы, имеем:

$$1\eta_1^i = 1\eta_1^{i+1}$$

и

$$1\eta_2^j = 1\eta_2^{j+1}.$$

Очевидно, эти равенства можно переписать в виде

$$1\eta_1^l = 1\eta_1^{l+1}$$

и

$$1\eta_2^l = 1\eta_2^{l+1},$$

где $l = \max(i, j)$. Отсюда получаем:

$$1\eta_1^l \cdot 1\eta_2^l = 1\eta_1^{l+1} \cdot 1\eta_2^{l+1},$$

откуда, на основании леммы 25, будем иметь:

$$1\eta^l = 1\eta^{l+1}.$$

Легко видеть, что

$$(1\eta^l)\,\eta_1 = 1\eta^l$$

и

$$(1\eta^l)\,\eta_2 = 1\eta^l.$$

Но так как $1\eta^l \leqslant 1\eta_1^l$ и $1\eta^l \leqslant 1\eta_2^l$, то, согласно условию теоремы, получим, что каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^l$; поэтому эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^l$. Таким образом, мы доказали первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Умножая равенства

$$1 = k(\eta_1^l) + 1\eta_1^l$$

и

$$1\eta_1^l = k(\eta_2^l)\,\eta_1^l + 1\eta^l$$

на $k(\eta^l)$, получим:

$$k(\eta^l) = k(\eta_1^l) + k(\eta^l) \cdot 1\eta_1^l$$

и

$$k(\eta^l) \cdot 1\eta_1^l = k(\eta_2^l)\,\eta_1^l.$$

Следовательно,

$$k(\eta^l) = k(\eta_1^l) + k(\eta^l) \cdot 1\eta_1^l = k(\eta_1^l) + k(\eta_2^l)\,\eta_1^l,$$

т. е.

$$k(\eta^l) = k(\eta_1^l) + k(\eta_2^l).$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства $k(\eta_2^l)$, учитывая при этом, что $k(\eta_2^l) \leqslant k(\eta^l)$ и $k(\eta_2^l)\,\eta_1^l \leqslant k(\eta_2^l)$, получим:

$$k(\eta^l) = k(\eta_1^l) + k(\eta_2^l).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 9, то эндоморфизм* η *есть A-расщепляющий.*

ТЕОРЕМА 10. *Если для эндоморфизма* η *структуры* S *существует такое целое положительное число* i, *что* $1\eta^i = 1\eta^{i+1}$, *и если подструктура* $S_u(\eta)$, *где* $u = 1\eta$, *удовлетворяет условию* A), *то эндоморфизм* η *является A-расщепляющим.*

Доказательство. Пусть существует такое целое положительное число i, что $1\eta^i = 1\eta^{i+1}$. Тогда эндоморфизм η индуцирует изоморфное отображение $1\eta^i/1\eta^i \cdot k(\eta)$ на $1\eta^i/0$ и поэтому, в силу условия A), имеем:

$$1\eta^i \cdot k(\eta) = 0.$$

Следовательно, эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$. Теперь справедливость нашей теоремы следует из теоремы 7.

Приведем несколько критериев для η-расщепляемости эндоморфизма η структуры S и, следовательно, для однородной расщепляемости этого эндоморфизма.

ТЕОРЕМА 11. *Если для эндоморфизма* η *структуры* S *существует такое целое положительное число* i, *что эндоморфизм* η *индуцирует* η-*автоморфизм элемента* $1\eta^i$, *то* η *есть* η-*расщепляющий эндоморфизм структуры* S.

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство теоремы 7. При этом следует только учесть, что элемент $1\eta^i$ является η-автоморфическим.

ТЕОРЕМА 12. *Если для эндоморфизма* η *структуры* S *существует такое целое положительное число* i, *что* $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$, *то* η *тогда и только тогда будет* η-*расщепляющим, если для любого* η-*допустимого элемента* $x \in S$ *существует такое целое положительное число* $h = h(x)$, *что* $x\eta^h = x\eta^{h+1}$.

Доказательство. Пусть для некоторого целого положительного числа i

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}),$$

и пусть для любого η-допустимого элемента $x \in S$ существует такое целое положительное число $h = h(x)$, что

$$x\eta^h = x\eta^{h+1}$$

Тогда, так как единица структуры S есть η-допустимый элемент, существует такое целое положительное число j, что

$$1\eta^j = 1\eta^{j+1}.$$

Согласно лемме 7,

$$1\eta^j k(\eta^i) = 0.$$

Отсюда следует, что, независимо от того, будет ли $j < i$ или $j \geqslant i$, эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^j$. Покажем, что η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^j$. Действительно, пусть

$$y\eta \leqslant y \leqslant 1\eta^j .$$

Тогда существует такое число l, что

$$y\eta^{l}=y\eta^{l+1}$$

и поэтому

$$y\eta^{l}=(y\eta^{l})\,\eta^{l}.$$

Отсюда, в силу леммы 2, имеем:

$$y+k(\eta^{l})=k(\eta^{l})+y\eta^{l}$$

и, следовательно,

$$y=yk(\eta^{l})+y\eta^{l}.$$

Но так как эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^{j}$, то $yk(\eta^{l})=0$. Значит, $y=y\eta^{l}$. Отсюда получаем:

$$y\eta=y\eta^{l+1}=y\eta^{l}=y,$$

т. е. $y=y\eta$. Таким образом, мы показали, что эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^{j}$; следовательно, по теореме 11, η есть η-расщепляющий эндоморфизм структуры S.

Обратно, пусть $k(\eta^{i})=k(\eta^{i+1})$ и пусть эндоморфизм η есть η-расщепляющий, т. е. $1=r(\eta)+c$, где c есть η-автоморфический элемент. Согласно лемме 5, $r(\eta)=k(\eta^{i})$ и потому

$$1=k(\eta^{i})+c.$$

Отсюда следует, что

$$1\eta^{i}=1\eta^{i+1}=c.$$

Далее, для любого η-допустимого элемента $x\in S$ имеем:

$$x\eta^{i+1}\leqslant x\eta^{i}\leqslant 1\eta^{i}.$$

Так как элемент $1\eta^{i}$ является η-автоморфическим, то

$$x\eta^{i}=x\eta^{i+1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 12 следует, что числа $h=h(x)$, упоминаемые в формулировке теоремы, удовлетворяют условию $h=h(x)\leqslant h(1)$. Теорема 12 является усилением теоремы 3 раздела II работы (1). Весьма частным случаем теоремы 12 является теорема 4 раздела II работы (1).

ТЕОРЕМА 13. *Если для эндоморфизма* η *структуры* S *существует такое целое положительное число* i, *что* $k(\eta^{i})=k(\eta^{i+1})$, *и если элемент* $1/k(\eta^{i})$ *удовлетворяет условию* B), *то эндоморфизм* η *есть* η*-расщепляющий.*

Доказательство. Так как эндоморфизм η^{i} индуцирует изоморфное отображение $1/k(\eta^{i})$ на $1\eta^{i}/0$, то, очевидно, и $1\eta^{i}/0$ удовлетворяет условию B). Далее, так как $k(\eta^{i})=k(\eta^{i+1})$, то, по лемме 6, имеем:

$$1\eta^{i}\cdot k(\eta^{i})=0$$

и потому эндоморфизм η индуцирует изоморфное отображение элемента $1\eta^{i}$ на $1\eta^{i+1}$. Отсюда, на основании условия B), следует:

$$1\eta^{i}=1\eta^{i+1}.$$

Пусть теперь $x\eta \leqslant x \leqslant 1\eta^i$. Легко заметить, что эндоморфизм η индуцирует изоморфное отображение элемента x на элемент $x\eta$. Поэтому, на основании условия В), которому удовлетворяет элемент $1\eta^i$, будем иметь: $x = x\eta$. Таким образом, мы показали, что эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^i$. Следовательно, согласно теореме 11, η является η-расщепляющим эндоморфизмом структуры S.

Следствие. *Если η — эндоморфизм структуры S и если подструктура $Su(\eta)$, где $u = 1\eta$, удовлетворяет условию максимальности и условию* В), *то η есть η-расщепляющий эндоморфизм структуры S.*

ТЕОРЕМА 14. *Пусть η—эндоморфизм структуры S. Если подструктура $Su(\eta)$, где $u = 1\eta$, удовлетворяет условию минимальности и условию* А), *то η является η-расщепляющим эндоморфизмом структуры S.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность элементов

$$1 \geqslant 1\eta \geqslant 1\eta^2 \geqslant \ldots \geqslant 1\eta^i \geqslant \ldots.$$

Так как подструктура $Su(\eta)$, где $u = 1\eta$, удовлетворяет условию минимальности, то найдется такое целое положительное число i, что

$$1\eta^i = 1\eta^{i+1} = \ldots.$$

Из соотношения $1\eta^i / 1\eta^i \cdot k(\eta^i) \simeq 1\eta^i / 0$ и условия А) следует, что

$$1\eta^i \cdot k(\eta^i) = 0.$$

Отсюда вытекает, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$. Пусть теперь $x\eta \leqslant x \leqslant 1\eta^i$. Тогда рассмотрим убывающую последовательность элементов:

$$x \geqslant x\eta \geqslant x\eta^2 \geqslant \ldots \geqslant x\eta^{(l)} \geqslant \ldots.$$

В силу условий минимальности найдется такое целое положительное число l, что

$$x\eta^l = x\eta^{l+1} = \ldots.$$

Отсюда имеем:

$$x\eta^l = (x\eta^l)\eta^l,$$

и в силу леммы 2 получаем:

$$x + k(\eta^l) = k(\eta^l) + x\eta^l.$$

Умножая обе части последнего равенства на x и применяя модулярный закон, будем иметь:

$$x = xk(\eta^l) + x\eta^l.$$

Но эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$, поэтому $xk(\eta^l) = 0$ и, значит, $x = x\eta^l$. Отсюда имеем:

$$x\eta = x\eta^{l+1} = x\eta^l = x,$$

т. е. $x = x\eta$. Таким образом, мы показали, что эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^i$. Следовательно, согласно теореме 11, η является η-расщепляющим эндоморфизмом структуры S.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть η — эндоморфизм структуры S. Если подструктура $Su(\eta)$, где $u = 1\eta$, обладает главным рядом, то η есть η-расщепляющий эндоморфизм структуры S.*

Справедливость этой теоремы вытекает из теоремы 14 и следствия из теоремы 13.

ТЕОРЕМА 16. *Если для эндоморфизма η структуры S^{***} существует такое целое положительное число i, что $1\eta^i$ есть элемент какой-либо η-цепи Леви, то эндоморфизм η является η-расщепляющим.*

Доказательство. Пусть $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_l \leqslant \ldots$ *есть η-цепь Леви, и пусть* $1\eta^i = a_l$. Согласно лемме 5 работы (8),

$$a_l = a_l\eta^l + a_l k(\eta^l) \text{ и } (a_l\eta^l)\eta = a_l\eta^l.$$

Из только что сказанного следует, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $a_l\eta^l$. Следовательно, эндоморфизм η индуцирует автоморфизм и элемента $1\eta^{i+l}$, так как очевидно, что

$$1\eta^{i+l} = a_l\eta^l.$$

Покажем теперь, что η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^{i+l} = a_l\eta^l$. Пусть

$$x\eta \leqslant x \leqslant a_l\eta^l.$$

Рассмотрим цепочку элементов

$$0 = a_0x \leqslant a_1x \leqslant \ldots \leqslant a_{l-1}x \leqslant a_lx \leqslant x.$$

Так как

$$a_{j-1} \leqslant a_{j-1} + a_jx \leqslant a_j, \quad j = 1, 2, \ldots l,$$

то, по лемме 2 работы (8), элемент $a_{j-1} + a_jx$ есть сумма минимальных η-допустимых над a_{j-1} элементов. Отсюда и из соотношения

$$a_{j-1} + a_jx/a_{j-1} \simeq a_jx/a_{j-1}x, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

следует, что

$$0 = a_0x \leqslant a_1x \leqslant a_2x \leqslant \ldots \leqslant a_{l-1}x \leqslant a_lx = x$$

есть η-цепь Леви. Поэтому, по лемме 5 работы (8),

$$x = x\eta^l + xk\ (\eta^l),$$

где

$$(x\eta^l)\ \eta = x\eta^l.$$

Но так как эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $a_l\eta^l$, то $xk(\eta^l) = 0$ и, следовательно, $x = x\eta^l$. Отсюда вытекает, что

$$x\eta = x\eta^{l+1} = x\eta^l = x,$$

т. е. $x = x\eta$. Таким образом, мы показали, что эндоморфизм η индуцирует η-автоморфизм элемента $1\eta^{i+l}$; следовательно, согласно теореме 11, η является η-расщепляющим эндоморфизмом структуры S.

§ 4. Определение 19. Если

$$1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \tag{1}$$

— два произвольных прямых разложения единицы модулярной структуры S, то отображение, ставящее в соответствие всякому элементу $x \in S$ его компоненту в прямом слагаемом a_i, $i=1,2$, или b_j, $j=1,2$, будем называть *эндоморфизмом разложения* структуры S и обозначать соответственно через φ_i, $i=1, 2$, и θ_j, $j=1, 2$. Будем говорить, что φ_1, φ_2 и θ_1, θ_2 образуют пары дополнительных эндоморфизмов разложения соответственно первого и второго прямых разложений (1) единицы структуры S.

Легко заметить, что φ_1, φ_2 и θ_1, θ_2 удовлетворяют определению 5. Это следует из определения 19 настоящей работы и лемм 2, 3, 4, 5 работы ([4]). Следовательно, произведение эндоморфизмов разложения, взятых в конечном числе, согласно следствию 1 из леммы 4, есть также эндоморфизм структуры S.

ЛЕММА 26. *Пусть* $x \leqslant a_1$. *Если* $x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant x$, *то и* $x\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant x$.

Действительно, так как структура S модулярна, то

$$x\theta_1 + x\theta_2 = (x + b_2)\ (x + b_1) = x\theta_1 + x.$$

Отсюда, по лемме 2 работы ([4]), имеем:

$$x\theta_1\varphi_1 + x\theta_2\varphi_1 = x\theta_1\varphi_1 + x\varphi_1.$$

Но $x\varphi_1 = x$, поэтому

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1 + x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1\theta_1\varphi_1 + x.$$

Согласно условию леммы, $x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant x$. Следовательно,

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1 + x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x.$$

Отсюда получаем:

$$x\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant x,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 27. *Пусть* $1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ — *два произвольных прямых разложения единицы структуры* S. *Тогда*:

a) $a_1 \cdot r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) = n_1$,

$a_1 \cdot r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1) = n_{12}$, $\quad a_1 \cdot r\,(\varphi_1\theta_2\varphi_1) = n_{11}$*;

b) $r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) = a_1 r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\varepsilon_2\varphi_1) + a_2$,

$r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1) = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + a_2$,

$r\,(\varphi_1\theta_2\varphi_1) = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + a_2$;

c) $r\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + r\,(\varphi_1\theta_2\varphi_1)$.

Доказательство. a) Положим

$$\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1, \quad \eta_1 = \varphi_1\theta_1\varphi_1, \quad \eta_2 = \varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Так как

$$r\ (\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} k\ (\eta^i),$$

---

* Определение элементов n_{11} и n_{12} см. в работе ([4]).

то, по лемме 2 работы ([4]), имеем:

$$r(\eta)\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} k(\eta^i)\varphi_1.$$

Но $a_2 \leqslant k(\eta)$; следовательно,

$$a_1 r(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 k(\eta^i) = \sum_{i=1}^{\infty} n_1^{(i)} = n_1.$$

Равенство $a_1 k(\eta^i) = n_1^{(i)}$ следует из определения элементов $a_1 k(\eta^i)$ и $n_1^{(i)}$. Таким образом,

$$a_1 r(\eta) = n_1.$$

Остальные равенства доказываются аналогично.

b) Равенства этого пункта очевидны.

c) Так как $n_1 = n_{12} + n_{11}$ [см. ([7])], то, согласно a), имеем:

$$a_1 r(\eta) = a_1 r(\eta_1) + a_1 r(\eta_2).$$

Отсюда следует:

$$a_1 r(\eta) + a_2 = [a_1 r(\eta_1) + a_2] + [a_1 r(\eta_2) + a_2]$$

или, так как $a_2 \leqslant r(\eta_1)$ и $a_2 \leqslant r(\eta_2)$,

$$r(\eta) = r(\eta_1) + r(\eta_2).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 28. *Тогда и только тогда*

$$1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c,$$

где $c\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = c$, *когда*

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c.$$

Действительно, если $1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c$, где $c\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = c$, то в силу того, что $c \leqslant a_1$, и в силу модулярного закона, имеем:

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c.$$

Обратно, пусть выполняется последнее равенство. Тогда

$$1 = [a_1 \cdot r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + a_2] + c =$$

$$= (a_1 + a_2) r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c,$$

т. е.

$$1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c.$$

Этим лемма доказана.

ЛЕММА 29. *В структуре* S^* *элемент* n_{12} *является* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-*автоморфическим, а элемент* n_{11} — $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-*автоморфическим.*

Доказательство. Согласно лемме 12 работы ([4]), $n_{12} = n_{12}\varphi_1\theta_2\varphi_1$. Пусть для $x \leqslant n_{12}$ выполняется неравенство

$$x\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant x;$$

тогда, по лемме 26, и

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant x.$$

Далее, имеем:

$$x = xn_{12} = \sum_{i=1}^{\infty} xn_{12}^{(i)};$$

Следовательно,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} xn_{12}^{(i)}.$$

Отсюда, на основании леммы 2 работы (4), получаем:

$$x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} [xn_{12}^{(i)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Покажем теперь, что для любого целого положительного числа i выполняется равенство

$$[xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 = xn_{12}^{(i)}.$$

Так как

$$[xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant xn_{12}^{(1)},$$

то, по лемме 26, имеем:

$$xn_{12}^{(1)} = [xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 + [xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1;$$

но $[xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0$. Поэтому

$$xn_{12}^{(1)} = [xn_{12}^{(1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Пусть для некоторого числа i уже доказано равенство

$$xn_{12}^{(i)} = [xn_{12}^{(i)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

По лемме 26 очевидно, что

$$xn_{12}^{(i+1)} = [xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 + [xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1,$$

откуда, ввиду неравенств

$$[xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant xn_{12}^{(i)}$$

и

$$[xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant xn_{12}^{(i+1)},$$

следует, что

$$xn_{12}^{(i+1)} \leqslant [xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 + xn_{12}^{(i)} = [xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 +$$

$$+ [xn_{12}^{(i)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 = [xn_{12}^{(i+1)}]\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant xn_{12}^{(i+1)}.$$

Таким образом, мы получили:

$$xn_{12}^{(i+1)} = [xn_{12}^{(i+1)}]\, \varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Следовательно, равенство

$$xn_{12}^{(i)} = [xn_{12}^{(i)}]\, \varphi_1\theta_2\varphi_1$$

справедливо для любого натурального i, и мы имеем:

$$x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} [xn_{12}^{(i)}]\, \varphi_1\theta_2\varphi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} xn_{12}^{(i)} = x \sum_{i=1}^{\infty} n_{12}^{(i)} = x \cdot n_{12} = x,$$

т. е.

$$x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x.$$

Это и завершает доказательство того, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента n_{12}. Аналогично доказывается $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфичность элемента n_{11}.

Из леммы 12 работы ([4]) и леммы 29 вытекает

Следствие. *В структуре S для любого натурального i элемент $n_{12}^{(i)}$ есть $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфический, а элемент $n_{11}^{(i)}$ — $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфический.*

ТЕОРЕМА 17. *Пусть $1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ — два произвольных прямых разложения единицы структуры S^*, и пусть*

$$\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1, \quad \eta_1 = \varphi_1\theta_1\varphi_1, \quad \eta_2 = \varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Если эндоморфизм η является η-расщепляющим, то и каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 будет соответственно η_1- и η_2-расщепляющим.

Пусть эндоморфизм η является η-расщепляющим. Тогда

$$1 = r(\eta) + c(\eta),$$

где $c(\eta)$ есть η-автоморфический элемент. Отсюда, согласно лемме 27, получим:

$$a_1 = a_1 r(\eta) + c(\eta) = a_1 r(\eta_1) + a_1 r(\eta_2) + c(\eta),$$

т. е.

$$a_1 = a_1 r(\eta_1) + a_1 r(\eta_2) + c(\eta).$$

Согласно лемме 2 работы ([7]), лемме 26 и теореме 6, на основании леммы 18 заключаем, что каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 индуцирует соответственно η_1- и η_2-автоморфизм элемента $c(\eta)$. Но тогда, по лемме 29 и лемме 13, эндоморфизм η_1 индуцирует η_1-автоморфизм элемента $a_1 r(\eta_2) + c(\eta)$, а эндофорфизм η_2 индуцирует η_2-автоморфизм элемента $a_1 r(\eta_1) + c(\eta)$. Таким образом,

$$a_1 = a_1 r(\eta_1) + c(\eta_1) = a_1 r(\eta_2) + c(\eta_2)$$

где $c(\eta_1) = a_1 r(\eta_2) + c(\eta)$, а $c(\eta_2) = a_1 r(\eta_1) + c(\eta)$. Отсюда следует, что

$$1 = r(\eta_1) + c(\eta_1) = r(\eta_2) + c(\eta_2).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 18. *Пусть $1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ — два произвольных прямых разложения единицы структуры S^{***}. Если существует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-цепь Леви, сумма которой равна 1, то эндоморфизмы $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ будут соответственно $\varphi_1\theta_1\varphi_2$- и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-расщепляющими.*

Доказательство. Пусть $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_i \leqslant \ldots$ есть $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-цепь Леви, и пусть $1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$. Тогда, по теореме работы ([8]) и теореме 3, имеем:

$$1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + c_1,$$

где c_1 есть $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфический элемент. Покажем, что

$$1 = r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_2,$$

где c_2 есть $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфический элемент. Действительно,

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 a_i,$$

т. е.

$$a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 a_i.$$

Так как $a_{i-1} \leqslant a_{i-1} + a_i a_1 \leqslant a_i$, то, по лемме 2 работы ([8]), элемент $a_{i-1} + a_i a_1$ есть сумма минимальных $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-допустимых над a_{i-1} элементов. Так как

$$a_{i-1} + a_i a_1 / a_{i-1} \simeq a_1 a_i / a_1 a_{i-1},$$

то отсюда заключаем, что $a_1 a_i$ есть сумма минимальных $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-допустимых над $a_1 a_{i-1}$ элементов, т. е. элементы $a_1 a_i$ образуют $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-цепь Леви в подструктуре S_{a_1}, сумма которой равна a_1. Но тогда, согласно лемме 2 работы ([7]) и лемме 26, на основании леммы 20 получим, что $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-цепь Леви является и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-цепью Леви. Поэтому, в силу теоремы 7,

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_2,$$

где c_2 есть $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфический элемент. Из последнего равенства имеем:

$$1 = r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_2,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 19. *Пусть $1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ — два произвольных прямых разложения единицы структуры S^{**}. Если каждый из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ является A-расщепляющим, то эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ будет расщепляющим.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда

$$1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + c_1 = r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_2,$$

где c_1 удовлетворяет условиям a) и b) определения 14 относительно эндоморфизма $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, а c_2 удовлетворяет условиям a) и b) определения 14 относительно эндоморфизма $\varphi_1\theta_2\varphi_1$. Из последних равенств получаем:

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + c_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_2.$$

Согласно лемме 12 работы ([4]) и лемме 19, на основании условий a) и b) определения 14 будем иметь:

$$a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) \leqslant c_2, \quad a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \leqslant c_1.$$

Следовательно,

$$c_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_1c_2, \quad c_2 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + c_1c_2.$$

Отсюда находим:

$$c_1\varphi_1\theta_1\varphi_1 = [a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_1c_2]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 = [a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1)]\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 + (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 =$$
$$= a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi.$$

Таким образом,

$$c_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Но так как

$$c_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_1c_2, \quad (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant c_1c_2,$$
$$a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,[(c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1] = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,(c_1c_2) = 0,$$

то, согласно модулярному закону, будем иметь:

$$c_1c_2 = (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1.$$

Аналогично доказывается равенство

$$c_1c_2 = (c_1c_2)\,\varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Следовательно,

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) + a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c_1c_2 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c,$$

где $c = c_1c_2$, причем каждый из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c и поэтому эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c. Это значит, что

$$1 = r(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) + c.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 20. *Пусть* $1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ — *два произвольных прямых разложения единицы структуры* S, *и пусть*

$$\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1, \quad \eta_1 = \varphi_1\theta_1\varphi_1, \quad \eta_2 = \varphi_1\theta_2\varphi_1.$$

Тогда и только тогда эндоморфизм η *индуцирует автоморфизм элемента* $1\eta^i$, *если эндоморфизм* η_1 *индуцирует автоморфизм элемента* $1\eta_1^i$, *а эндоморфизм* η_2 — *автоморфизм элемента* $1\eta_2^i$.

Доказательство. Пусть эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$. Тогда $1\eta^i = 1\eta^{i+1}$ и потому

$$1\eta^i = (1\eta^i)\,\eta^i,$$

откуда, согласно лемме 2 и условию, что эндоморфизм η индуцирует

автоморфизм элемента $1\eta^i$, имеем:

$$1 = k(\eta^i) + c,$$

где $c = 1\eta^i$. Следовательно,

$$a_1 = a_1 k(\eta^i) + c = a_1 k(\eta_1^i) + a_1 k(\eta_2^i) + c.$$

На основании леммы (12) работы ([4]), эндоморфизм η_1 индуцирует автоморфизм элемента $a_1 k(\eta_2^i)$, а эндоморфизм η_2 — автоморфизм элемента $a_1 k(\eta_1^i)$. Очевидно, элемент c удовлетворяет условиям a) и b) определения 14. Поэтому каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2 индуцирует автоморфизм элемента c. Значит, в силу следствия из леммы 11, эндоморфизм η_1 индуцирует автоморфизм элемента $a_1 k(\eta_2^i) + c$, а эндоморфизм η_2 — автоморфизм элемента $a_1 k(\eta_1^i) + c$. Поэтому из равенства

$$a_1 = a_1 k(\eta_1^i) + a_1 k(\eta_2^i) + c$$

следует, что

$$a_1 \eta_1^i = a_1 k(\eta_2^i) + c$$

и

$$a_1 \eta_2^i = a_1 k(\eta_1^i) + c.$$

Так как $1\varphi_1 = a_1$, то последние равенства можно, очевидно, переписать так:

$$1\eta_1^i = a_1 k(\eta_2^i) + c$$

и

$$1\eta_2^i = a_1 k(\eta_1^i) + c.$$

Из этих равенств вытекает, что эндоморфизм η_1 индуцирует автоморфизм элемента $1\eta_1^i$, а эндоморфизм η_2 — автоморфизм элемента $1\eta_2^i$. Обратно, пусть η_1 индуцирует автоморфизм $1\eta_1^i$, а эндоморфизм η_2 — автоморфизм $1\eta_2^i$. Тогда, очевидно,

$$1 = k(\eta_1^i) + c_1 = k(\eta_2^i) + c_2,$$

где $c_1 = 1\eta_1^i$, а $c_2 = 1\eta_2^i$. Отсюда, как и в теореме 19, получаем:

$$1 = k(\eta^i) + c,$$

где $c = c_1 c_2$, причем каждый из эндоморфизмов η_1 и η_2, а поэтому и их произведение $\eta = \eta_1 \eta_2$, индуцирует автоморфизм элемента c. Из последнего равенства следует, что η индуцирует автоморфизм $1\eta^i$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если η_1 индуцирует автоморфизм $1\eta_1^i$, а η_2 — автоморфизм $1\eta_2^i$, то $1\eta^i = 1\eta_1^i \cdot 1\eta_2^i$.*

Поступило
1. VI. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hostinsky L. A., Endomorphisms of lattices, Duke Math. J., 18 (1951), 331—342.

[2] Hostinsky L. A., Direct decomposition in lattices, Amer. J. Math., LXXIII, № 4 (1951), 741—755.

[3] Лившиц А. Х., Прямые разложения вполне дедекиндовых структур, Матем. сборн., 28 (70): 3 (1951), 481—502.

[4] Мочульский Е. Н., Прямые разложения дедекиндовых структур, Матем. сборн., 37 (79) : 1 (1955), 89—102.

[5] Tandai K., On certain pairs of mappings of modular lattices, Scient. Papers Coll. Cen. Educ. Univ. Tokyo, 5, № 2 (1955), 83—86.

[6] Hukuhara M., Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1 (1954), 129—192.

[7] Курош А. Г., Изоморфизмы прямых разложений. II, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 47—72.

[8] Hostinsky L. A., Loewy chains and uniform splitting of lattices, Proc. Amer. Math. Soc., 5, № 2 (1954), 315—319.

[9] Граев М. И., Изоморфизмы прямых разложений в дедекиндовых структурах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 33—46.

[10] Baer R., Splitting endomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 508—516.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 477—498

Е. Ф. МИЩЕНКО, Л. С. ПОНТРЯГИН

ОБ ОДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе рассматривается вопрос об оптимальном достижении управляемой точкой малой окрестности другой, стохастически движущейся точки. В связи с этим решается задача с малым параметром для параболического дифференциального уравнения с частными производными.

§ 1. Постановка задачи

Точку z фазового пространства R переменных $z^1, \ldots, z^n$ назовем управляемой, если ее движение в пространстве R описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}^i = f^i(z^1, \ldots, z^n, u^1, \ldots, u^r), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $u = (u^1, \ldots, u^r)$ — управляющий параметр.

Точку Q фазового пространства R назовем случайной, если процесс ее движения есть марковский процесс. Как известно [см. ([1])], вероятностную характеристику этого процесса дает функция $p(\sigma, x, \tau, y)$, равная плотности вероятности того, что случайная точка Q, находящаяся в момент σ в положении x, в момент τ будет находиться в положении y. Функция $p(\sigma, x, \tau, y)$, как функция первой пары переменных σ и x, удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению второго порядка — первому дифференциальному уравнению А. Н. Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + a^{ij}(\sigma, x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(\sigma, x)\frac{\partial p}{\partial x^i} = 0 \tag{2}$$

и является фундаментальным решением этого уравнения. Таким образом, решение уравнения (2) $F(\sigma, x)$, имеющее наперед заданное начальное значение $F_1(x)$:

$$F(\sigma, x) \to F_1(x), \quad \sigma \to \tau, \tag{3}$$

дается формулой

$$F(\sigma, x) = \int p(\sigma, x, \tau, y) F_1(y)\, dy. \tag{4}$$

(В этой формуле, как и всюду в дальнейшем, если специально не указана область интегрирования, интегрирование ведется по всему пространству R.)

Отметим еще одно важное свойство функции $p(\sigma, x, \tau, y)$. Пусть требуется решить неоднородное параболическое уравнение, соответствующее

уравнению (2):

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} + a^{ij}(\sigma, x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(\sigma, x) \frac{\partial U}{\partial x^i} = P(\sigma, x) \tag{5}$$

при нулевом начальном условии. Тогда искомое решение дается формулой

$$u(\sigma, x, \tau) = -\int_{\sigma}^{\tau} ds \int p(\sigma, x, s, y) P(s, y)\, dy. \tag{6}$$

В настоящей работе мы будем предполагать, что правые части системы уравнений (1), описывающей движение управляемой точки z, непрерывно зависят от всех переменных и непрерывно дифференцируемы по $z^1, \ldots, z^n$.

Относительно же коэффициентов уравнения (2), описывающего движение случайной точки Q, мы сделаем следующие предположения:

а) коэффициенты $a^{ij}(\sigma, x)$, $b^i(\sigma, x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, определены и непрерывны при $\sigma > 0$ и при любых $x \in R$;

б) все собственные значения матрицы $\| a^{ij}(\sigma, x) \|$ при этих значениях аргументов ограничены сверху и снизу положительными константами;

в) коэффициенты $b^i(\sigma, x)$ при возрастании $|x|$ возрастают не быстрее, чем $e^{|x|}$.

Итак, пусть в пространстве R движутся управляемая точка z и случайная точка Q. Пусть вместе с управляемой точкой z движется некоторая ее окрестность Σ_z, например шар или, вообще, область, ограниченная произвольной кусочно гладкой поверхностью, кусочно гладко меняющейся вместе с z.

Если задан закон управления точкой z, т. е. если параметр u задан как кусочно непрерывная функция времени $u = u(t)$, то система дифференциальных уравнений (1) однозначно определяет непрерывное движение точки z в пространстве R. Следовательно, если заданы начальные положения управляемой точки z и случайной точки Q, то однозначно определяется вероятность встречи точки Q с окрестностью Σ_z на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ или на бесконечном отрезке времени $0 \leqslant t < \infty$, или вероятность встречи с тем или иным весом. Эти вероятности являются, таким образом, функционалами управления $u(t)$, и естественно возникает задача о таком выборе управлений $u(t)$ точкой z, при которых эти функционалы достигают экстремальных значений.

Чтобы точно формулировать задачу, введем в рассмотрение неотрицательную и не превосходящую единицы функцию $h(t)$, определенную на всей оси t. Обозначим через $\psi_u(\sigma, x, \tau)$ вероятность того, что случайная точка Q, находящаяся в момент времени σ в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ встретится с окрестностью Σ_z управляемой точки z (при этом предполагается, что начальное положение точки z, равное $z(\sigma)$, задано). Ставится следующая задача: выбрать управление $u(t)$ точкой z таким образом, чтобы функционал

$$I = \int_0^{\infty} h(s) \frac{\partial}{\partial s} [\psi_u(\sigma, x, s)]\, ds \tag{7}$$

достигал максимума.

Управление $u(t)$ и соответствующую ему траекторию $z(t)$ системы (1), обеспечивающие максимум функционала (7), будем называть оптимальными. Таким образом, решение задачи сводится к принципу максимума [см. ([2])], если только функционал (7) известен как функционал от $u(t)$, $z(t)$.

Само собой разумеется, что функционал (7) зависит также от размеров и формы окрестности Σ_z управляемой точки z. Как мы увидим ниже, для его вычисления нам потребуется решать граничную задачу для уравнения (2). При этом нас будет интересовать эффективная, хотя бы и приближенная, формула для этого решения. Оказывается, что такую формулу можно получить, если размер окрестности Σ_z считать малым. Но задача «накрыть» малой управляемой окрестностью случайную точку Q как раз и является естественной.

Итак, в настоящей работе окрестность Σ_z мы будем считать малой. Для простоты мы будем предполагать, что Σ_z есть n-мерный шар радиуса ε с центром в точке z. Однако внимательный читатель сможет увидеть, что все наши рассуждения и сам результат почти не изменятся, если под Σ_z понимать произвольную область малого «радиуса», ограниченную произвольной кусочно гладкой поверхностью, кусочно гладко меняющейся вместе с z.

§ 2. Сведе́ние вычисления функционала I к решению граничной задачи для уравнения Колмогорова

Прежде чем указать подход к вычислению функционала (7), сделаем несколько замечаний, относящихся к произвольному марковскому процессу.

Выделим в пространстве R фиксированную область Γ, ограниченную $(n-1)$-мерной кусочно гладкой поверхностью S. Обозначим через $q(\sigma, x, \tau, y)$ плотность вероятности точки Q, находящейся в момент σ в положении x, быть в момент τ в положении y, не заходя при этом на протяжении времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ в область Γ. Очевидно, что

$$\begin{gathered} q(\sigma, x, \tau, y) \leqslant p(\sigma, x, \tau, y), \\ \lim_{\sigma\to\tau} \int q(\sigma, x, \tau, y)\, dy = \lim_{\sigma\to\tau} \int p(\sigma, x, \tau, y)\, dy = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Далее, известно, что функция $q(\sigma, x, \tau, y)$ вне области Γ является фундаментальным решением уравнения (2), а при приближении точки x к границе области Γ справедливо соотношение

$$\int\limits_{R-\Gamma} q(\sigma, x, \tau, y)\, dy \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0 \in S. \tag{9}$$

Пусть теперь область Γ не фиксирована, а движется вместе с t, т. е. имеется однопараметрическое семейство областей Γ_t. Обозначим через $q(\sigma, x, \tau, y)$ плотность вероятности случайной точки Q, находящейся в момент времени σ в положении x, быть в момент τ в положении y, не

встречаясь на протяжении времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ с движущейся областью Γ_t. Тогда, очевидно, функция

$$\int q(\sigma, x, \tau, y)\, dy \tag{10}$$

является решением уравнения (2) и удовлетворяет следующему граничному значению:

$$\int q(\sigma, x, \tau, y)\, dy \to 0 \quad \text{при } x \to S_\sigma. \tag{11}$$

Теперь мы можем указать подход к вычислению функционала (7). Пусть движущаяся область Γ_t есть шар радиуса ε с центром в управляемой точке $z(t)$. В соответствии с § 1 будем обозначать его через $\Sigma_{z(t)}$. Положим

$$\psi(\sigma, x, \tau) = 1 - \int q(\sigma, x, \tau, y)\, dy. \tag{12}$$

Непосредственно из определения следует, что функция $\psi(\sigma, x, \tau)$ есть вероятность того, что случайная точка Q, находящаяся в момент σ в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ будет «накрыта» окрестностью $\Sigma_{z(t)}$ управляемой точки z. Следовательно, функция $\psi(\sigma, x, \tau)$, определенная формулой (12), есть та же самая функция, которая фигурирует в функционале (7).

Таким образом, для вычисления функционала (7) мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + a^{ij}(\sigma, x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(\sigma, x)\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0 \tag{13}$$

при условиях:

$$\psi(\sigma, x, \tau) \underset{\sigma\to\tau}{\to} 0, \tag{14}$$

$$\psi(\sigma, x, \tau) \to 1 \quad \text{при } x \to S_\sigma. \tag{15}$$

Мы покажем, что решение задачи (13), (14), (15) представляется в виде

$$\psi(\sigma, x, \tau) = \varepsilon^{n-2}\Psi(\sigma, x, \tau) + o(\varepsilon^{n-2}), \tag{16}$$

и получим эффективную формулу для $\Psi(\sigma, x, \tau)$, представляющую главную часть вероятности $\psi(\sigma, x, \tau)$.

§ 3. Некоторые предварительные оценки

В настоящем параграфе мы докажем ряд вспомогательных неравенств, связанных с фундаментальным решением уравнения (2). Кроме того, мы решим внешнюю задачу Дирихле для многомерного уравнения Лапласа вне эллипсоида $\overline{S}_\varepsilon$

$$\lambda_1 \overline{\xi}^{1^2} + \ldots + \lambda_n \overline{\xi}^{n^2} = \varepsilon^2 \tag{17}$$

с единичным граничным значением. Результаты этого параграфа элементарны, однако мы выделяем их в специальный параграф, чтобы в последующем можно было на них ссылаться не прерывая основных доказательств.

Обозначим через $g(\sigma, \xi, \tau, \eta)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^{n^2}} = 0. \tag{18}$$

Как известно, оно имеет вид:

$$g(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \frac{1}{[2\pi(\tau - \sigma)]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\eta - \xi|}{4(\tau - \sigma)}}. \tag{19}$$

Положим, далее,

$$r(\xi) = \sqrt{\xi^{1^2} + \ldots + \xi^{n^2}} \tag{20}$$

и введем следующие обозначения:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau) = \int g(\sigma, \xi, \eta, \tau) \frac{1}{r^k(\eta)} d\eta, \tag{21}$$

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau) = \int_\sigma^\tau ds \int g(\sigma, \xi, s, \eta) \frac{1}{r^k(\eta)} d\eta. \tag{22}$$

Чтобы интегралы, стоящие в правых частях формул (21) и (22), имели смысл, мы, конечно, должны считать, что $k < n$.

Нам понадобятся следующие три неравенства, оценивающие функции $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ при $r(\xi) = \varepsilon$:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)|_{r(\xi)=\varepsilon} < \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^k} \quad \text{при} \quad \tau - \sigma > \varepsilon, \tag{23}$$

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau)|_{r(\xi)=\varepsilon} < \frac{C}{\varepsilon^k} \quad \text{при} \quad \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \tag{24}$$

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)|_{r(\xi)=\varepsilon} < \frac{C \ln \varepsilon}{\varepsilon^{k-2}}. \tag{25}$$

Здесь C — константа, не зависящая от ε, а $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Вывод неравенств (23), (24). Легко видеть, что

$$\omega_k(\sigma, \xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) = \omega_k(\sigma, r(\xi), 0, \ldots, 0, \tau) =$$
$$= \frac{1}{[2\pi(\tau - \sigma)]^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{(\eta^1 - r(\xi))^2 + \eta^{2^2} + \ldots \eta^{n^2}}{4(\tau - \sigma)}} \cdot \frac{1}{r^k(\eta)} d\eta. \tag{26}$$

Положим

$$\eta^i = r(\xi) x^i, \qquad \tau - \sigma = r^2(\xi) t.$$

Тогда из (26) получим:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau) = \frac{1}{r^k(\xi)} V(t), \tag{27}$$

где

$$V(t) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-\frac{(x^1 - 1)^2 + \ldots + x^{n^2}}{4t}} \cdot \frac{1}{r^k(x)} dx. \tag{28}$$

Очевидно, что

$$V(t) \to 1 \text{ при } t \to 0. \tag{29}$$

Для дальнейшего отметим, что $V(t)$ при больших значениях t имеет следующую асимптотику:

$$V(t) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{k}{2}}}\right). \tag{30}$$

Действительно, положив в формуле (28)

$$2\sqrt{t}\,y^i = x^i, \tag{31}$$

получим:

$$V(t) = \frac{K}{t^{\frac{k}{2}}} \int e^{-\left[\left(y^1 - \frac{1}{\sqrt{2t}}\right)^2 + y^{2^2} + \ldots + y^{n^2}\right]} \cdot \frac{1}{r^k(y)}\,dy \tag{32}$$

(K — константа), откуда и следует (29). Итак, имеем:

$$\omega_k(\sigma, \xi, \tau) < \frac{1}{r^k(\xi)} V\left(\frac{\tau - \sigma}{r^2(\xi)}\right). \tag{33}$$

Но легко видеть, что

$$V\left(\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}\right) < \delta(\varepsilon) \quad \text{при } \tau - \sigma > \varepsilon, \tag{34}$$

$$V\left(\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}\right) < C \quad \text{при } \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \tag{35}$$

откуда и вытекают неравенства (23), (24).

Вывод неравенства (25). Мы имеем:

$$\Omega_k(\sigma, \xi^1, \ldots, \xi^n, \tau) = \Omega_k(\sigma, r(\xi), 0, \ldots, 0, \tau) =$$

$$= \int_\sigma^\tau ds \int \frac{1}{[2\pi(s-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(\eta^1 - r(\xi))^2 + \eta^{2^2} + \ldots + \eta^{n^2}}{4(s-\sigma)}} \cdot \frac{1}{r^k(\eta)}\,d\eta.$$

Отсюда, полагая $\eta^i = r(\xi)\,x^i$, $s - \sigma = r^2(\xi)\,t$, получим:

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau) = \frac{1}{r(\xi)^{k-2}} \int_0^{\frac{\tau-\sigma}{r^2(\xi)}} V(t)\,dt, \tag{36}$$

где $V(t)$ — функция, определенная формулой (28). В частности,

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)\big|_{r(\xi)=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} \int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\,dt. \tag{37}$$

Если теперь учесть асимптотику функции $V(t)$ при больших значениях t (см. формулу (30)), то сразу найдем:

$$\int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\,dt < C \ln \varepsilon \quad \text{при } k = 2,$$

$$\int_0^{\frac{\tau-\sigma}{\varepsilon^2}} V(t)\,dt < C \quad \text{при } k > 2,$$

откуда и следует неравенство (25). Одновременно мы установили, что

$$\Omega_k(\sigma, \xi, \tau) < \frac{C}{r^k(\xi)}. \tag{38}$$

Замечание к неравенствам (23), (24), (25). Пусть $p(\sigma, \xi, \tau, \eta)$ — фундаментальное решение общего уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} + a^{ij}(\sigma, \xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + b^i(\sigma, \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi^i} = 0. \tag{39}$$

Исходя из этого фундаментального решения, определим функции $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ соответственно по формулам (21), (22), подставив в них вместо $q(\sigma, \xi, \tau, \eta)$ функцию $p(\sigma, \xi, \tau, \eta)$. Оказывается, что для так определенных функций $\omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ и $\Omega_k(\sigma, \xi, \tau)$ справедливы те же неравенства (23), (24), (25). Действительно, в теории параболических уравнений доказывается, что при тех ограничениях на коэффициенты уравнения (39), которые мы предположили выполненными в § 1, фундаментальное решение уравнения (39) мажорируется фундаментальным решением некоторого уравнения теплопроводности, т. е. для него имеет место неравенство:

$$p(\sigma, \xi, \tau, \eta) < \frac{C}{(\tau - \sigma)^{\frac{n}{2}}} e^{-\gamma \frac{|\eta - \xi|}{\tau - \sigma}},$$

где γ — константа. Эта оценка обеспечивает возможность буквального повторения вычислений, проведенных при выводе неравенств (23), (24), (25).

Для дальнейшего нам потребуется также решить внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{\xi}^{1^2}} + \ldots + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{\xi}^{n^2}} = 0 \tag{40}$$

при единичном граничном значении на эллипсоиде $\bar{S}_\varepsilon$ (17).

Мы докажем следующее предложение:

ЛЕММА. *Исчезающее в бесконечности решение внешней задачи Дирихле для уравнения* (40) *с граничным условием*

$$\bar{v}(\bar{\xi})|_{\bar{\xi} \in \bar{S}_\varepsilon} = 1, \tag{41}$$

где $\bar{S}_\varepsilon$ — *эллипсоид* (17), *имеет вид*

$$\bar{v}(\bar{\xi}) = \varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon), \tag{42}$$

где α — *положительная константа, однозначно определяемая размерами эллипсоида* (42), *а* $r(\bar{\xi}) = \sqrt{\bar{\xi}^{1^2} + \ldots + \bar{\xi}^{n^2}}$. *При этом функция* $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ *при* $r(\bar{\xi}) < 1$ *удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$|\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)| < M \frac{\varepsilon^{n-1}}{r^{n-1}(\bar{\xi})}, \tag{43}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^i} \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon) \right| < M \frac{\varepsilon^{n-1}}{r^n(\bar{\xi})} \tag{44}$$

(*M — константа*).

Доказательство. Будем искать решение задачи (40), (41 в виде

$$\bar{v}(\bar{\xi}) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon), \qquad (45$$

где α — пока не определенная константа, а $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ — потенциал двой ного слоя, создаваемый эллипсоидом $\bar{S}_\varepsilon$ в точке $\bar{\xi}$, с не известной пока плотностью $\mu(\bar{\eta})$ (через $\bar{\eta}$ мы обозначаем координаты точек, лежащих на эллипсоиде $\bar{S}_\varepsilon$). Так как $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ — решение уравнения (40), то оба слагаемых в правой части формулы (45) при любом значении константы α являются решениями уравнения (40). Таким образом, функция $\bar{v}(\bar{\xi})$, представляемая формулой (45), является решением уравнения (40). В силу хорошо известного свойства потенциала двойного слоя, граничное условие (41) дает:

$$\bar{\pi}_e(\bar{\eta}, \varepsilon) = 1 - \alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} \qquad (46$$

для любого $\bar{\eta} \in \bar{S}_\varepsilon$, где через $\bar{\pi}_e(\bar{\eta}, \varepsilon)$ обозначен предел функции $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon$ при стремлении точки $\bar{\xi}$ к точке $\bar{\eta}$ поверхности $\bar{S}_\varepsilon$ извне. Но так как

$$\bar{\pi}_e(\bar{\eta}, \varepsilon) = -2\pi\mu(\bar{\eta}) + \bar{\pi}_0(\bar{\eta}, \varepsilon), \qquad (47$$

где $\bar{\pi}_0(\bar{\eta}, \varepsilon)$ — значение $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ в точке $\bar{\eta}$ поверхности $\bar{S}_\varepsilon$, то из (46) полу чаем:

$$-2\pi\mu(\bar{\eta}) + \bar{\pi}_0(\bar{\eta}) = 1 - \alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})}. \qquad (48$$

Известно, что

$$\bar{\pi}_0(\bar{\eta}, \varepsilon) = \int_{\bar{S}_\varepsilon} \mu(\bar{\eta}_1)\frac{\cos\varphi}{\rho^{n-1}(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)}\, d\bar{S}_\varepsilon, \qquad (49$$

где φ — угол, составленный направлением нормали в точке $\bar{\eta}_1$ с радиу сом-вектором $\rho(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)$, проведенным из точки $\bar{\eta}_1$ в точку $\bar{\eta}$.

Введем обозначения:

$$K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{\rho^{n-1}(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)},$$

$$\Phi(\bar{\eta}) = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha\frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} - 1\right). \qquad (50$$

Тогда из условия (48) мы получаем неоднородное интегральное уравнени для неизвестной плотности $\mu(\bar{\eta})$:

$$\mu(\bar{\eta}) = \int_{\bar{S}_\varepsilon} K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)\mu(\bar{\eta}_1)\, d\bar{S}_\varepsilon + \bar{\Phi}(\bar{\eta}). \qquad (5$$

Уравнение (51) есть уравнение Фредгольма второго рода. Согласно изв стной теореме Фредгольма, для его разрешимости необходимо и дост

точно, чтобы свободный член был ортогонален ко всем собственным функциям сопряженного однородного интегрального уравнения

$$\nu(\bar{\eta}) = \int_{\bar{S}_\varepsilon} K(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}) \mu(\bar{\eta}_1) d\bar{S}_\varepsilon. \tag{52}$$

Известно также [см. (3)], что если ядро $K(\bar{\eta}, \bar{\eta}_1)$ дается формулой (50), то уравнение (52) имеет только одну собственную функцию. Обозначим эту функцию через $\nu_0(\bar{\eta})$ и будем считать ее известной.

Условие ортогональности дает возможность определить константу α. Запишем его:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\bar{S}_\varepsilon} \left[\alpha \frac{\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})} - 1\right] \nu_0(\bar{\eta}) d\bar{S}_\varepsilon = 0. \tag{53}$$

Отсюда следует:

$$\alpha = \frac{\int_{\bar{S}_\varepsilon} \nu_0(\bar{\eta}) d\bar{S}_\varepsilon}{\varepsilon^{n-2} \int_{\bar{S}_\varepsilon} \frac{\nu_0(\bar{\eta})}{r^{n-2}(\bar{\eta})} d\bar{S}_\varepsilon}.$$

В полученной формуле константа α зависит от ε, но зависимость эта лишь кажущаяся. В самом деле, обозначим через $\bar{S}$ эллипсоид

$$\lambda_1 \bar{\eta}^{1 2} + \ldots + \lambda_n \bar{\eta}^{n 2} = 1, \tag{54}$$

получающийся из эллипсоида $\bar{S}_\varepsilon$ увеличением всех осей в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз. Без труда обнаружим, что

$$\alpha = \frac{\int_{\bar{S}} \nu_0(\bar{\eta}) d\bar{S}}{\int_{\bar{S}} \frac{\nu_0(\bar{\eta})}{r^{n-2}(\bar{\eta})} d\bar{S}}. \tag{55}$$

Таким образом, α не зависит от ε и полностью определяется размерами эллипсоида (54).

Итак, функция $\bar{v}(\bar{\xi})$, даваемая формулой (45), при α, определяемой по формуле (55), является решением задачи (40), (41). Остается лишь проверить выполнение неравенств (43), (44). Но они непосредственно следуют из определения потенциала двойного слоя $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$:

$$\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon) = \int \frac{\cos\varphi}{\rho^{n-1}(\bar{\xi}, \bar{\eta})} d\bar{S}_\varepsilon.$$

§ 4. Вычисление функционала I в случае, когда уравнение Колмогорова имеет постоянные коэффициенты

В этом параграфе вероятность $\psi(\sigma, x, \tau)$, а следовательно, функционал (7) будут вычислены для одного важного частного случая, когда уравнение (2) имеет постоянные коэффициенты. Мы будем предполагать, что размерность фазового пространства R больше двух: $n > 2$.

Итак, мы будем решать уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + a^{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j} + b^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0, \tag{56}$$

где a^{ij}, b^i — постоянные коэффициенты, при начальных и граничных условиях (14), (15), которые в дальнейшем будем записывать в виде:

$$\psi(\tau, x, \tau) = 0, \tag{57}$$

$$\psi(\sigma, x, \tau)|_{\Sigma_{z(\sigma)}} = 1, \tag{58}$$

где $\Sigma_{z(\sigma)}$ — сфера радиуса ε с центром в точке $z(\sigma)$.

Прежде всего перейдем от этой задачи к задаче с граничным условием на сфере радиуса ε с центром в начале координат. Для этой цели в пространстве (z, t) введем новые координаты по формулам

$$z = \zeta + z(t), \quad \sigma \leqslant t \leqslant s, \tag{59}$$

так, что

$$x = \xi + z(\sigma), \quad y = \eta + z(s). \tag{60}$$

При таком преобразовании координат сфера $\Sigma_{z(\sigma)}$ перейдет в сферу S_ε:

$$\xi^{1^2} + \ldots + \xi^{n^2} = \varepsilon^2. \tag{61}$$

Положим

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau) \equiv \psi(\sigma, \xi + z(\sigma), \tau). \tag{62}$$

Тогда для функции $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + a^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + (b^i - z^{i'}(\sigma))\frac{\partial\varphi}{\partial \xi^i} = 0 \tag{63}$$

и условия:

$$\varphi(\tau, \xi, \tau) = 0, \tag{64}$$

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau)|_{S_\varepsilon} = 1. \tag{65}$$

Чтобы решить уравнение (63) при условиях (64), (65), нам потребуются вспомогательные построения.

Нашим первым шагом будет конструкция некоторого специального решения уравнения

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma} + a^{ij}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = 0. \tag{66}$$

Для того чтобы получить это специальное решение, перейдем с помощью линейного преобразования от координат $\xi^1, \ldots, \xi^n$ к координатам $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$, в которых уравнение (66) приведется к виду

$$\frac{\partial\bar{\varphi}_0}{\partial\sigma} + \Delta\bar{\varphi}_0 = 0, \tag{67}$$

где Δ — оператор Лапласа. При таком преобразовании координат сфера S_ε перейдет, очевидно, в эллипсоид $\bar{S}_\varepsilon$

$$\lambda_1\bar{\xi}^{1^2} + \ldots + \lambda_n\bar{\xi}^{n^2} = \varepsilon^2, \tag{68}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ суть собственные значения матрицы $\|a^{ij}\|$.

Обозначим через $\bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$ фундаментальное решение уравнения (67):

$$\bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta}) = \frac{1}{[2\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{|\bar{\eta}-\bar{\xi}|}{4(\tau-\sigma)}\right\}. \tag{69}$$

Положим

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} + \bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon) - \\ -\int \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\left[\varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\eta})} + \bar{\pi}(\bar{\eta}, \varepsilon)\right] d\bar{\eta},\end{aligned} \tag{70}$$

где α — константа, определенная формулой (55), а $\bar{\pi}(\bar{\xi}, \varepsilon)$ — потенциал двойного слоя, создаваемый эллипсоидом $\bar{S}_\varepsilon$ в точке $\bar{\xi}$. Перепишем формулу (70) в несколько ином виде:

$$\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) + \delta\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \tag{71}$$

где

$$\bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha}{r^{n-2}(\bar{\xi})} - \int \bar{g}(\sigma, \xi, \tau, \bar{\eta})\frac{\varepsilon^{n-2}\alpha}{r^{n-2}(\bar{\eta})} d\bar{\eta}. \tag{72}$$

Очевидно, функция $\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau)$ является решением уравнения (67) и удовлетворяет начальному условию

$$\bar{\tilde{\varphi}}_0(\tau, \bar{\xi}, \tau) = 0. \tag{73}$$

Перейдем теперь от координат $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$ вновь к координатам $\xi^1, \ldots, \xi^n$, и пусть при этом функции

$$\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \delta\bar{\tilde{\varphi}}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau), \quad \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$$

перейдут соответственно в функции

$$\tilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau), \quad \varphi_0(\sigma, \xi, \tau), \quad \delta\tilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau), \quad g(\sigma, \xi, \tau, \eta).$$

Нам впоследствии понадобится явное выражение для функции $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$. Чтобы выписать его, надо знать, как запишутся в координатах $\xi^1, \ldots, \xi^n$ функции $r(\bar{\xi})$ и $\bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})$. Это легко выяснить. В самом деле, обозначим через a_{ij} элементы матрицы, обратной матрице $\|a^{ij}\|$, так что

$$a^{ij}a^{jk} = \delta^i_k. \tag{74}$$

Тогда легко можно убедиться, что

$$\begin{aligned} r(\bar{\xi}) &= [a_{ij}\xi^i\xi^j]^{\frac{1}{2}}, \\ |\bar{\eta} - \bar{\xi}| &= [a_{ij}(\eta^i - \xi^i)(\eta^j - \xi^j)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Учитывая еще, что

$$d\bar{\eta} = \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}\, d\eta, \tag{76}$$

мы получим для функции $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$ следующее явное выражение:

$$\varphi_0(\sigma, \xi, \tau) = \varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{[a_{ij}\xi^i\xi^j]^{\frac{n-2}{2}}} - \int g(\sigma, \xi, \tau, \eta) \frac{\varepsilon^{n-2} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{[a_{ij}\eta^i\eta^j]^{\frac{n-2}{2}}} d\eta, \quad (77)$$

где

$$g(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \frac{1}{[2\pi(\tau - \sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{ -\frac{[\alpha_{ij}(\eta^i - \xi^i)(\eta^j - \xi^j)]^{\frac{1}{2}}}{4(\tau - \sigma)} \right\}. \quad (78)$$

Итак, доказана следующая

ЛЕММА 1. *Функция*

$$\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \delta\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau),$$

где $\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (77), *является решением уравнения* (66) *и удовлетворяет нулевому начальному условию*

$$\widetilde{\varphi}_0(\tau, \xi, \tau) = 0. \quad (79)$$

Следует отметить, что функция $\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$ не равна единице на сфере S_ε. Однако, как будет выяснено дальше, ее граничное значение в некотором смысле лишь несущественно отличается от единицы.

Теперь уже все подготовлено, чтобы решать уравнение (63) при условиях (64), (65). Сначала мы найдем некоторое специальное решение уравнения (63), удовлетворяющее лишь нулевому начальному условию (64). Оценив затем граничное значение этого специального решения, мы увидим, что оно лишь несущественно отличается от единицы. Отсюда мы выведем, что и само это специальное решение лишь несущественно, с точностью до величин более высокого порядка малости по ε, отличается от точного решения задачи (63), (64), (65). После этого полученное специальное решение будет упрощено путем отбрасывания некоторых членов и, таким образом, мы получим приближенное решение задачи (63), (64), (65). Перейдем к осуществлению этой программы.

Будем искать специальное решение уравнения (63), удовлетворяющее условию (64), в виде

$$\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau) = \widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau) + \widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau), \quad (80)$$

где $\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$ — только что построенное специальное решение уравнения (63), удовлетворяющее условию (64), а $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$ — пока не известная функция. Непосредственно проверяется, что $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$ должна удовлетворять неоднородному параболическому уравнению

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial\sigma} + a^{ij}\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + [b^i - z^{i'}(\sigma)]\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial\xi^i} = -[b^i - z^{i'}(\sigma)]\frac{\partial\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)}{\partial\xi^i} \quad (81)$$

и начальному условию

$$\widetilde{\varphi}_1(\tau, \xi, \tau) = 0 \quad (82)$$

Решение задачи (81), (82) во всем пространстве R с помощью формулы, аналогичной формуле (6) § 1, очевидно, невозможно, так как правая часть уравнения (81) при $\xi = 0$ имеет полюс порядка n, получающийся при дифференцировании функции $\pi(\xi, \varepsilon)$. Однако эту трудность можно обойти, так как нас интересует решение $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$ лишь вне шара, ограниченного сферой S_ε. Для этого рассмотрим функцию $q(\sigma, x, s, y)$, введенную в начале § 2 и равную плотности вероятности того, что случайная точка Q, находящаяся в момент времени σ в положении x, в момент τ находится в положенииии y, не встречаясь при этом на протяжении времени $\sigma \leqslant t \leqslant s$ с шаром, ограниченным сферой $\Sigma_{z(t)}$ радиуса ε с центром в управляемой точке $z(t)$. Очевидно, функция

$$\widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta) \equiv q(\sigma, \xi + z(\sigma), s, \eta + z(s)) \equiv q(\sigma, x, s, y) \tag{83}$$

см. формулы (59), (60)) является вне сферы S_ε фундаментальным решением уравнения (63), удовлетворяет граничному условию

$$\int \widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta)\, d\eta \,\Big|_{\xi \in S_\varepsilon} = 0, \tag{84}$$

и решением задачи (81), (82) будет функция

$$\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau) = \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta)\, [b^i - z^{i'}(s)]\, \frac{\partial \widetilde{\varphi}_0(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^i}\, d\eta, \tag{85}$$

где R_ε обозначает дополнение в R к шару, ограниченному сферой S_ε. Очевидно, что

$$\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)\,\Big|_{\xi \in S_\varepsilon} = 0.$$

Таким образом, нами получена следующая

ЛЕММА 2. *Функция*

$$\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau) = \widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau) + \widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau), \tag{86}$$

где $\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (70), *а* $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$ — *формулой* (85), *является решением уравнения* (63), *удовлетворяет нулевому начальному условию* $\widetilde{\Phi}(\tau, \xi, \tau) = 0$ *и имеет те же граничные значения на сфере* S_ε, *что и функция* $\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$.

Теперь мы докажем, что функция $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$ вне сферы радиуса r_0 (r_0 — любое конечное, не зависящее от ε число) аппроксимирует решение задачи (63), (64), (65).

Доказательство этого факта базируется на одной лемме об оценке решений параболического уравнения. Сформулируем эту лемму.

ЛЕММА 3 (об оценке решений параболического уравнения). *Пусть* $u(\sigma, \xi, \tau)$ — *решение параболического уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -a^{ij}(\sigma, \xi)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - b^i(\sigma, \xi)\frac{\partial u}{\partial \xi^i} \equiv L(u), \tag{87}$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(\tau, \xi, \tau) = 0, \tag{88}$$

$$u(\sigma, \xi, \tau)|_{\xi \in S_\varepsilon} = W(\sigma, \tau), \tag{89}$$

где

$$W(\sigma, \tau) < \begin{cases} C & \text{при } \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ \delta(\varepsilon) & \text{при } \tau - \sigma > \varepsilon \end{cases} \tag{90}$$

(C — *константа,* $\delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$). *Тогда для решения* $u(\sigma, \xi, \tau)$ *справедлива следующая оценка:*

$$|u(\sigma, \xi, \tau)| < \Delta(\xi, \varepsilon) + \delta(\varepsilon)\chi(\sigma, \xi, \tau), \tag{91}$$

где $\Delta(\xi, \varepsilon)$ — *положительная функция, имеющая при* $|\xi| > r_0$ *порядок* $o(\varepsilon^{n-2})$, *а* $\chi(\sigma, \xi, \tau)$ — *решение уравнения* (87), *имеющее при* $\sigma = \tau$ *нулевые начальные значения и принимающее на сфере* S_ε *единичное значение.*

Доказательство. Положим

$$\bar{w}(\sigma, \tau) = \bar{w}_1(\sigma, \tau) + \bar{w}_2(\sigma, \tau), \tag{92}$$

где функции $\bar{w}_1(\sigma, \tau)$, $\bar{w}_2(\sigma, \tau)$ определены следующим образом:

$$\bar{w}_1(\sigma, \tau) = \begin{cases} C & \text{при } \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \tau - \sigma > \varepsilon, \end{cases} \tag{93}$$

$$\bar{w}_2(\sigma, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau - \sigma \leqslant \varepsilon, \\ \delta(\varepsilon) & \text{при } \tau - \sigma > \varepsilon. \end{cases} \tag{94}$$

Решения уравнения (87), имеющие нулевые начальные значения и краевые значения, равные $\bar{w}(\sigma, \tau)$, $\bar{w}_1(\sigma, \tau)$, $\bar{w}_2(\sigma, \tau)$, обозначим соответственно через $\bar{u}(\sigma, \xi, \tau)$, $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$, $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$. Очевидно,

$$\bar{u}(\sigma, \xi, \tau) = \bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau) + \bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau). \tag{95}$$

На основании теоремы о максимальном значении для решений параболических уравнений, решение $u(\sigma, \xi, \tau)$ задачи (87), (88), (89) оценивается следующим образом:

$$u(\sigma, \xi, \tau) < \bar{u}(\sigma, \xi, \tau). \tag{96}$$

Оценим отдельно функции $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ и $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$. Для $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$ оценка получается из той же теоремы о максимальном значении решения параболического уравнения:

$$\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau) \leqslant \delta(\varepsilon)\chi(\sigma, \xi, \tau). \tag{97}$$

Для получения оценки функции $\bar{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ потребуются более тонкие рассуждения. Прежде всего оценим $\bar{u}_2(\sigma, \xi, \tau)$ при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$.

Положим

$$\gamma(\xi) = K\frac{\varepsilon^{n-1}}{r^{n-1}(\xi)}, \tag{98}$$

где K — константа, $K > C$. Будем теперь искать решение уравнения (87) с начальным значением, равным $\gamma(\xi)$, и с граничным значением на сфере S_ε, равным K, в виде

$$v(\sigma, \xi, \tau) = \gamma(\xi) + v_0(\sigma, \xi, \tau). \tag{99}$$

Тогда для функции $v_0(\sigma, \xi, \tau)$ получается неоднородное уравнение

$$\frac{\partial v_0}{\partial \sigma} + a^{ij}(\sigma, \xi)\frac{\partial v_0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + b^i(\sigma, \xi)\frac{\partial v_0}{\partial \xi^i} = L[\gamma(\xi)], \tag{100}$$

которое мы должны решить при нулевых начальных и нулевых граничных условиях. Такое решение, как мы знаем, вне сферы S_ε дается формулой:

$$v_0(\sigma, \xi, \tau) = -\int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q(\sigma, \xi, s, \eta) L[\gamma(\eta)]\, d\eta. \tag{101}$$

Итак,

$$v(\sigma, \xi, \tau) = \gamma(\xi) - \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} q(\sigma, \xi, s, \eta) L[\gamma(\eta)]\, d\eta. \tag{102}$$

Очевидно,

$$\overline{u}_2(\sigma, \xi, \tau) \leqslant v(\sigma, \xi, \tau). \tag{103}$$

Нам остается, таким образом, оценить лишь функцию $v(\sigma, \xi, \tau)$ при $|\xi| > r_0$ и $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$. Заметив, что

$$|L[\gamma(\xi)]| < \varepsilon^{n-1}\left[\frac{A_1}{r^{n+1}(\xi)} + \frac{A_2}{r^n(\xi)}\right], \tag{104}$$

где A_1, A_2 — достаточно большие константы, и принимая во внимание неравенство

$$q(\sigma, \xi, \tau, \eta) \leqslant p(\sigma, \xi, \tau, \eta), \tag{105}$$

из формулы (102) получаем:

$$|v(\sigma, \xi, \tau)| \leqslant \gamma(\xi) + \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta)\frac{\varepsilon^{n-1}A_1}{r^{n+1}(\eta)}\, d\eta + \\ + \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta)\frac{\varepsilon^{n-1}A_2}{r^n(\eta)}\, d\eta. \tag{106}$$

Интегралы, стоящие в правой части неравенства (106), обозначим соответственно через I_1, I_2 и оценим отдельно их величины. Мы имеем:

$$I_1 < A_1\varepsilon^{n-2-\nu}\int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} p(\sigma, \xi, s, \eta)\frac{1}{r^{n-\nu}(\eta)}\, d\eta = \\ = A_1 \cdot \varepsilon^{n-2-\nu}\int_\sigma^\tau ds \cdot \omega_{n-\nu}(\sigma, \xi, s) + o(\varepsilon^{n-2}), \tag{107}$$

где $0 < \nu < 1$. Отсюда, принимая во внимание неравенство

$$\omega_{n-\nu}(\sigma, \xi, s) < \frac{C}{r^{n-\nu}(\xi)},$$

находим:

$$I_1 < A_1 \frac{C}{r^{n-\nu}(\xi)} \varepsilon^{n-2-\nu} \int_\sigma^\tau ds + o(\varepsilon^{n-2}). \tag{108}$$

Следовательно, при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ и $|\xi| > r_0$

$$I_1 \approx o(\varepsilon^{n-2}). \tag{109}$$

Аналогично получим, что при $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ и $|\xi| > r_0$

$$I_2 \approx o(\varepsilon^{n-2}). \tag{110}$$

Таким образом, функция $v(\sigma, \xi, \tau)$, мажорирующая на границе сферы S_ε решение $\overline{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$, при $|\xi| > r_0$ и $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ имеет порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Отсюда следует, что и само решение $\overline{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ при $|\xi| > r_0$ и $\tau - \sigma \leqslant \varepsilon$ имеет порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Несколько изменяя предыдущее построение, можно убедиться, что такая же оценка для $\overline{u}_1(\sigma, \xi, \tau)$ имеет место и при $\tau - \sigma > \varepsilon$. Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать, что функция $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$, фигурирующая в формулировке леммы 2, вне сферы любого конечного радиуса с точностью до величин порядка $o(\varepsilon^{n-2})$ аппроксимирует решение задачи (63), (64), (65). Иными словами, справедлива следующая

ЛЕММА 4. *Пусть* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ — *решение уравнения* (63), *удовлетворяющее начальным и граничным условиям* (64), (65), *а* $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$ — *решение уравнения* (63), *определенное в лемме* 2. *Тогда для любого* r_0, *не зависящего от* ε *при* $|\xi| > r_0$, *решение* $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$ *с точностью до величин порядка* $o(\varepsilon^{n-2})$ *аппроксимирует решение* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$:

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau) \approx o(\varepsilon^{n-2}). \tag{111}$$

Доказательство. Обозначим через $u(\sigma, \xi, \tau)$ разность функций φ и $\widetilde{\Phi}$:

$$u(\sigma, \xi, \tau) = \varphi(\sigma, \xi, \tau) - \widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau). \tag{112}$$

Функция $u(\sigma, \xi, \tau)$ является решением уравнения (63) и удовлетворяет нулевым начальным условиям. Далее, из формулы (85) видно, что граничные значения функции $u(\sigma, \xi, \tau)$ на сфере S_ε совпадают с граничными значениями функции $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau) - \widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)$. Оценим эти последние. Для этого запишем разность $\varphi - \widetilde{\varphi}_0$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) &= \left\{\varphi(\sigma, \xi, \tau) - \left[\varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{r^{n-2}(\overline{\xi})} + \overline{\pi}(\overline{\xi}, \varepsilon)\right]\right\} - \\ &- \int \overline{g}(\sigma, \overline{\xi}, \tau, \overline{\eta}) \left[\varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{r^{n-2}(\overline{\eta})} + \overline{\pi}(\overline{\eta}, \varepsilon)\right] d\overline{\eta}.\end{aligned} \tag{113}$$

Граничные значения слагаемого, заключенного в фигурную скобку в правой части формулы (113), равны нулю (см. § 3). Остается, таким образом, оценить лишь граничные значения второго слагаемого на сфере S_ε (в координатах $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — на эллипсоиде $\overline{S}_\varepsilon$).

Так как для потенциала двойного слоя $\overline{\pi}(\overline{\xi}, \varepsilon)$ справедлива оценка (43), то, очевидно, имеем:

$$\left|\int \overline{g}(\sigma, \overline{\xi}, \tau, \overline{\eta}) \left[\varepsilon^{n-2} \frac{\alpha}{r^{n-2}(\overline{\eta})} + \overline{\pi}(\overline{\eta}, \varepsilon)\right] d\overline{\eta}\right| \leqslant$$
$$\leqslant A_1 \cdot \varepsilon^{n-2} \cdot \omega_{n-2}(\sigma, \overline{\xi}, \tau) + A_2 \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot \omega_{n-1}(\sigma, \overline{\xi}, \tau), \qquad (114)$$

где A_1 и A_2 — константы, а $\omega_{n-2}(\sigma, \overline{\xi}, \tau)$ и $\omega_{n-1}(\sigma, \overline{\xi}, \tau)$ — функции, определенные формулой (21) соответственно при $k = n-2$, $k = n-1$. Используя теперь неравенства (23), (24), получаем, что граничные значения второго слагаемого в формуле (113), а следовательно, и граничные значения $w(\sigma, \tau)$ функции $u(\sigma, \xi, \tau)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, на основании леммы 3, мы можем заключить, что соотношение (111) справедливо. Лемма 4, таким образом, доказана.

Упростим полученное приближенное решение $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$, отбросив в нем величины, имеющие при $|\xi| > r_0$ порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Чтобы сделать это, выпишем решение $\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau)$ в явном виде. Вспоминая формулы (70), (71), (80), (85), мы можем написать:

$$\widetilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \delta\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau) +$$
$$+ \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{q}(\sigma, \tau, s, \eta)\, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \delta\widetilde{\varphi}_0(\sigma, \xi, \tau)]\, d\eta. \qquad (115)$$

Прежде всего ясно, что при $|\xi| > r_0$

$$\delta\widetilde{\varphi}_0 \approx o(\varepsilon^{n-2}). \qquad (116)$$

Поэтому второе слагаемое в правой части формулы (115) можно отбросить. Несколько сложнее упрощается интеграл, стоящий в правой части формулы (115). Во-первых, можно отбросить член

$$I_1 = \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta)\, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\delta\widetilde{\varphi}_0(s, \eta, \tau)]\, d\eta. \qquad (117)$$

В самом деле,

$$|I_1| \leqslant \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta)\, |b^i - z^{i'}(s)| \left|\frac{\partial}{\partial \eta^j} \delta\widetilde{\varphi}_0(s, \eta, \tau)\right| d\eta.$$

Но так как [см. формулы (70), (71), (43), (44)]

$$\left|\frac{\partial}{\partial \eta^j} \delta\widetilde{\varphi}_0(s, \eta, \tau)\right| < \varepsilon^{n-1} R(\eta), \qquad (118)$$

где $R(\eta)$ в нуле имеет полюс порядка не выше n, то

$$I_1 < \varepsilon^{n-1-\nu} \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta)\, |b^i - z^{i'}(s)|\, |R_1(\eta)|\, d\eta, \qquad (119)$$

где $R_1(\eta)$ имеет теперь в нуле уже полюс порядка не выше $n - \nu$ $(0 \leqslant \nu < 1)$. Таким образом,

$$I_1 \approx o(\varepsilon^{n-2}). \qquad (120)$$

Нам остается упростить член

$$I_2 = \int_\sigma^\tau ds \int_{R_\varepsilon} \widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta) \, [b^i - z^i(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] \, d\eta. \tag{121}$$

Покажем, что при $|\xi| > r_0$

$$I_2 = \int_\sigma^\tau ds \int \widetilde{p}(\sigma, \xi; s, \eta) \, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] \, d\eta + o(\varepsilon^{n-2}). \tag{122}$$

Мы имеем:

$$I_2 = \int_\sigma^\tau ds \int \widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta) \, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] +$$

$$+ \int_\sigma^\tau ds \int [\widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta) - \widetilde{q}(\sigma, \xi, s, \eta)] \, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] \, d\eta +$$

$$+ \int_\sigma^\tau ds \int_{R - R_\varepsilon} \widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta) \, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] \, d\eta. \tag{123}$$

Последнее слагаемое в правой части формулы (123) имеет, очевидно, порядок $o(\varepsilon^{n-2})$. Обозначим через $u(\sigma, \xi, \tau)$ второе слагаемое. Функция $u(\sigma, \xi, \tau)$ при $\sigma = \tau$ имеет нулевое начальное значение и является в области R_ε решением уравнения (63). Так как

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta^j} [\varphi_0(s, \eta, \tau)] \right| < \varepsilon^{n-2} R(\eta), \tag{124}$$

где $R(\eta)$ имеет полюс порядка не выше $n - 1$, то граничные значения функции $u(\sigma, \xi, \tau)$ оцениваются следующим образом:

$$|u(\sigma, \xi, \tau)|_{\xi \in S_\varepsilon} < M \cdot \varepsilon^{n-2} \, \Omega_{n-1}(\sigma, \xi, \tau)|_{\xi \in S_\varepsilon}. \tag{125}$$

Отсюда, на основании неравенства (25), заключаем, что

$$|u(\sigma, \xi, \tau)|_{\xi \in S_\varepsilon} < \delta(\varepsilon), \tag{126}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, всюду в области R_ε

$$|u(\sigma, \xi, \tau)| < \delta(\varepsilon) \, a(\sigma, \xi, \tau). \tag{127}$$

Лемма 4 и неравенства (120), (127), а также формула (123) доказывают следующее предложение.

ЛЕММА 5. *Функция*

$$\Phi(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0(\sigma, \xi, \tau) + \int_\sigma^\tau ds \int \widetilde{p}(\sigma, \xi, s, \eta) \, [b^i - z^{i'}(s)] \frac{\partial \varphi_0(s, \eta, \tau)}{\partial \eta^j} \, d\eta, \tag{128}$$

где $\varphi_0(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (77) *при* $|\xi| > r_0$ (r_0 — *произвольное, не зависящее от* ε *положительное число*), *с точностью до величин порядка* $o(\varepsilon^{n-2})$ *аппроксимирует решение* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ *уравнения* (63), *удовлетворяющее условиям* (64), (65).

Чтобы подвести итог всем рассмотрениям настоящего параграфа, нам остается вновь возвратиться к старым координатам x и y согласно формулам (59), (60). Проведя соответствующие замены, на основании леммы 5 мы можем сформулировать следующее предложение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть движение управляемой точки z, имеющей в начальный момент времени σ положение $z(\sigma)$, описывается системой дифференциальных уравнений*

$$\dot{z}^i = f^i(z^1, \ldots, z^n, u^1, \ldots, u^r), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $(u^1, \ldots, u^r)$ — управляющие параметры. Пусть в пространстве R переменных $z^1, \ldots, z^n$ движется еще случайная точка Q, плотность перехода которой $p(\sigma, x, \tau, y)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + a^{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j} + b^i \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0.$$

Обозначим через Σ_z шар радиуса ε с центром в управляемой точке z, движущейся вместе с z. Обозначим, далее, через $\psi(\sigma, x, \tau)$ вероятность того, что случайная точка Q, находящаяся в момент σ в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ будет «накрыта» шаром Σ_z. Тогда вероятность $\psi(\sigma, x, \tau)$, являющаяся функционалом управления $u(t)$, представляется при $|x - z(\sigma)| > r_0$, где r_0 — произвольное положительное, не зависящее от ε число, в следующем виде:

$$\psi(\sigma, x, \tau) = \varepsilon^{n-2}[\psi_0(\sigma, x, \tau) + \psi_1(\sigma, x, \tau)] + o(\varepsilon^{n-2}).$$

Чтобы выписать явные выражения для функций $\psi_0(\sigma, x, \tau)$ и $\psi_1(\sigma, x, \tau)$, введем следующие обозначения:

а) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $\|a^{ij}\|$;

б) $\|a_{ij}\|$ — матрица, обратная матрице $\|a^{ij}\|$;

в)
$$G(\sigma, x, \tau, \eta) = g(\sigma, x - z(\sigma), \tau, \eta) =$$
$$= \frac{1}{[2\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{a_{ij}(\eta^i - x^i + z^i(\sigma))(\eta^j - x^j + z^j(\sigma))}{4(\tau-\sigma)}\right\};$$

г) α — константа, не зависящая от уравнений, описывающих движение точек z и Q, и определяемая формулой (55) § 3.

Тогда

$$\psi_0(\sigma, x, \tau) = \frac{\alpha}{[a_{ij}(x^i - z^i(\sigma))(x^j - z^j(\sigma))]^{\frac{n-2}{2}}} - $$
$$-\int G(\sigma, x, \tau, \eta)\frac{\alpha \cdot \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}{[a_{ij}\eta^i\eta^j]^{\frac{n-2}{2}}}\, d\eta;$$

$$\psi_1(\sigma, x, \tau) = \int_\sigma^\tau ds \int p(\sigma, x, s, y)\,[b^i - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial \psi_0(s, y, \tau)}{\partial y^i}\, dy.$$

Таким образом, теорема 1 дает явное выражение для главного члена вероятности $\psi(\sigma, x, \tau)$ и, следовательно, для главного члена функционала (7).

§ 5. Вычисление функционала (7) в общем случае

В настоящем параграфе вероятность $\psi(\sigma, x, \tau)$, а следовательно, и функционал (7) будут вычислены для случая, когда коэффициенты уравнения Колмогорова зависят от σ и x. Мы предполагаем, что эти коэффициенты удовлетворяют условиям а), б), в), сформулированным в § 2. Схема вычисления в значительной степени воспроизводит схему, которой мы следовали в предыдущем параграфе, поэтому подробно мы будем проводить лишь существенно новые построения.

Итак, нам нужно решить уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + a^{ij}(\sigma, x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\,\partial x^j} + b^i(\sigma, x) = 0 \tag{129}$$

при условиях

$$\psi(\tau, x, \tau) = 0, \tag{130}$$

$$\psi(\sigma, x, \tau)_{\Sigma_\sigma} = 1. \tag{131}$$

Как и в § 4, с помощью формул (51), (60) приведем эту задачу к задаче решения уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + a^{ij}(\xi + z(\sigma), \sigma)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + [b^i(\xi + z(\sigma), \sigma) - z^{i'}(\sigma)]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} = 0 \tag{132}$$

при условиях

$$\varphi(\tau, \xi, \tau) = 0, \tag{133}$$

$$\varphi(\sigma, \xi, \tau)\,|_{S_\varepsilon} = 1. \tag{134}$$

Перепишем уравнение (132) в несколько иной форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + a^{ij}(z(\sigma), \sigma)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + [a^{ij}(\xi + z(\sigma), \sigma) - a^{ij}(z(\sigma), \sigma)]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} + $$
$$+ [b^i(\xi + z(\sigma), \sigma) - z^{i'}(\sigma)]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} = 0. \tag{135}$$

Нашим первым шагом будет конструкция некоторого специального решения $\varphi_1^\theta(\sigma, \xi, \tau)$ уравнения

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma} + a^{ij}(z(\theta), \theta)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j} = 0. \tag{136}$$

Для того чтобы получить это специальное решение, перейдем с помощью линейного преобразования от координат $\xi^1, \ldots, \xi^n$ к координатам $\bar\xi^1, \ldots, \bar\xi^n$, в которых уравнение (136) запишется в виде

$$\frac{\partial\bar\varphi_0}{\partial\sigma} + \Delta\bar\varphi_0 = 0. \tag{137}$$

Такое преобразование координат теперь уже зависит от параметра θ. Сфера S_ε перейдет, очевидно, в эллипсоид

$$\lambda_1(\theta)\,\bar\xi^{1^2} + \ldots + \lambda_n(\theta)\,\bar\xi^{n^2} = \varepsilon^2, \tag{138}$$

где $\lambda_1(\theta), \ldots, \lambda_n(\theta)$ суть собственные значения матрицы $\|a^{ij}(z(\theta), \theta\|$.

Так же как и в предыдущем параграфе, мы можем сконструировать функцию

$$\bar{\bar\varphi}_0^\theta = \bar\varphi_0^\theta(\sigma, \bar\xi, \tau) + \delta\bar{\bar\varphi}_0(\sigma, \bar\xi, \tau), \tag{139}$$

где

$$\bar{\varphi}_0(\sigma, \bar{\xi}, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{r^{n-2}(\bar{\xi})} - \int \bar{g}(\sigma, \bar{\xi}, \tau, \bar{\eta})\frac{\alpha(\theta)\,\varepsilon^{n-2}}{r^{n-2}(\bar{\eta})}\,d\bar{\eta}, \tag{140}$$

которая является решением уравнения (137) и удовлетворяет нулевому начальному условию.

Перейдем теперь от координат $\bar{\xi}^1, \ldots, \bar{\xi}^n$ вновь к координатам $\xi^1, \ldots, \xi^n$, и пусть при этом функции

$$\bar{\tilde{\varphi}}_0^\theta, \quad \bar{\varphi}_0^\theta, \quad \delta\,\bar{\tilde{\varphi}}_0^\theta, \quad \bar{g}^\theta$$

перейдут соответственно в функции

$$\tilde{\varphi}_0^\theta, \quad \varphi_0^\theta, \quad \delta\,\tilde{\varphi}_0^\theta, \quad g^\theta.$$

Мы можем выписать функцию $\tilde{\varphi}_0^\theta(\sigma, \xi, \tau)$ в явном виде. Для этого, как и раньше, обозначим через $a_{ij}(z(\theta), \theta)$ элементы матрицы, обратной матрице $\| a^{ij}(z(\theta), \theta)\|$, так что

$$a^{ij}(z(\theta), \theta)\, a_{jk}(z(\theta), \theta) = \delta_k^i. \tag{141}$$

Тогда

$$\varphi_0^\theta(\sigma, \xi, \tau) = \varepsilon^{n-2}\frac{\alpha(\theta)}{[a_{ij}(z(\theta), \theta]^{\frac{n-2}{2}}} -$$

$$- \int g^\theta(\sigma, \xi, \tau, \eta)\frac{\varepsilon^{n-2}\cdot\alpha(\theta)\cdot\sqrt{\lambda_1(\theta)\ldots\lambda_n(\theta)}}{[a_{ij}(z(\theta), \theta)\,\eta^i\cdot\eta^j]^{\frac{n-2}{2}}}, \tag{142}$$

где

$$g^\theta(\sigma, \xi, \tau, \eta) = \frac{1}{[2\pi(\tau-\sigma)]^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{a_{ij}(z(\theta), \theta)(\eta^i - \xi^i)(\eta^j - \xi^j)}{4(\tau-\sigma)}\right\}. \tag{143}$$

Рассмотрим теперь функцию $\tilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)$, т. е. построенную нами функцию при значении параметра θ, равном σ. Функция $\tilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)$ уже не удовлетворяет уравнению (136), в коэффициентах которого вместо θ подставлено σ. Однако очевидна следующая

ЛЕММА 1'. *Функция*

$$\tilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau) + \delta\tilde{\varphi}_0^\sigma,$$

где φ_0^σ *определена формулой* (142), *является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_0^\sigma}{\partial\sigma} + a^{ij}(z(\sigma), \sigma)\frac{\partial^2\tilde{\varphi}_0^\sigma}{\partial\xi^i\partial\xi^j} - \frac{\partial}{\partial\theta}[\varphi_0^\theta]_{\theta=\sigma} = 0 \tag{144}$$

и имеет нулевые начальные значения при $\sigma = \tau$.

Теперь, как и в предыдущем параграфе, мы можем искать специальное решение уравнения (132), имеющее нулевые начальные значения, в следующем виде:

$$\tilde{\Phi}(\sigma, \xi, \tau) = \tilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau) + \tilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau), \tag{145}$$

где $\widetilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)$ — только что построенное решение уравнения (144), а $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$ — пока не известная функция. Подставляя $\Phi(\sigma, \xi, \tau)$ в уравнение (132) и учитывая лемму 1′ для $\widetilde{\varphi}_1(\sigma, \xi, \tau)$, мы получим неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial\sigma} + a^{ij}(\xi + z(\sigma), \sigma)\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_1}{\partial\xi^i\partial\xi^j} + [b^i(\xi + z(\sigma), \sigma) - z^{i\prime}(\sigma)]\frac{\partial\widetilde{\varphi}_1}{\partial\xi^i} =$$
$$= -\Big\{[a^{ij}(\xi + z(\sigma), \sigma) - a^{ij}(z(\sigma), \sigma)]\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)}{\partial\xi^i\partial\xi^j} +$$
$$+ [b^i(\xi + z(\sigma), \sigma) - z^{i\prime}(\sigma)]\frac{\partial\widetilde{\varphi}_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)}{\partial\xi^i} + \frac{\partial}{\partial\theta}[\widetilde{\varphi}_0^\theta(\sigma, \xi, \tau)]_{\theta=\sigma}\Big\} \qquad (146)$$

и начальное условие

$$\widetilde{\varphi}_1(\tau, \xi, \tau) = 0. \qquad (147)$$

Так как правая часть уравнения (146) имеет при $\xi = 0$ полюс порядка n (а не $(n+1)!$), то мы можем почти буквально повторить все рассуждения предыдущего параграфа и доказать лемму, аналогичную лемме 5.

ЛЕММА 5′. *Функция*

$$\Phi(\sigma, \xi, \tau) = \varphi_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau) +$$
$$+ \int_\sigma^\tau ds \int{}' p(\sigma, \xi + z(\sigma), s, \eta + z(s)) \cdot \Big\{[a^{ij}(\eta + z(s), s) - a^{ij}(z(s), s)] \times$$
$$\times \frac{\partial^2\varphi_0^s(s, \eta, \tau)}{\partial\eta^i\partial\eta^j} + [b^i(\eta + z(s), s) - z^{i\prime}(s)]\frac{\partial\varphi_0^s(s, \eta, \tau)}{\partial\eta^j} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\theta}[\varphi_0^\theta(s, \eta, \tau)]_{\theta=s}\Big\} d\eta, \qquad (148)$$

где $\varphi_0^\sigma(\sigma, \xi, \tau)$ *определена формулой* (142), *при* $|\xi| > r_0$ (r_0 — *произвольное положительное число, не зависящее от* ε) *с точностью до величин порядка* $o(\varepsilon^{n-2})$ *аппроксимирует решение* $\varphi(\sigma, \xi, \tau)$ *уравнения* (132), *удовлетворяющее начальным и граничным условиям* (165)—(169).

Чтобы формулировать теперь окончательный результат, мы вновь должны перейти к координатам x и y по формулам (51), (60). Тогда из леммы 5 последует теорема, аналогичная теореме 1 предыдущего параграфа. Мы не будем здесь выписывать окончательных формул, так как при желании читатель легко это сделает сам.

Поступило
29.X.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A. N., Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., 104 (1931), 415—458.

[2] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Физматгиз, М., 1954.

[3] Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С., Теория оптимальных процессов. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 3—42.

[4] Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Одна статистическая задача оптимального управления, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 5 (1959), 390—392.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 499—530

В. А. РОХЛИН

ТОЧНЫЕ ЭНДОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Эндоморфизм T пространства с мерой называется точным, если пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — совокупность всех измеримых множеств пространства, состоит только из множеств меры нуль и их дополнений. В работе изучаются метрические свойства точных эндоморфизмов пространства Лебега. В качестве примеров рассматривается широкий класс теоретико-числовых эндоморфизмов: доказывается их точность и вычисляется их энтропия.

Эндоморфизмом пространства с мерой называется такое отображение этого пространства на себя, при котором прообраз всякого измеримого множества измерим и имеет ту же меру, что и само множество. Взаимно однозначный эндоморфизм, обладающий тем свойством, что обратное отображение также есть эндоморфизм, называется *автоморфизмом*. Класс точных эндоморфизмов, изучаемый в настоящей работе, в известном смысле противоположен классу автоморфизмов: эндоморфизм T называется *точным*, если пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — совокупность всех измеримых множеств, состоит только из множеств меры нуль и их дополнений. Точные эндоморфизмы обладают рядом замечательных свойств. Например, все точные эндоморфизмы пространства Лебега с непрерывной мерой имеют один и тот же однородный бесконечнократный спектр и являются перемешиваниями всех степеней.

Свойства точных эндоморфизмов изучаются в § 2 настоящей работы. В § 1 излагаются предварительные сведения из теории меры. В § 3 произвольный эндоморфизм T представляется как фактор-эндоморфизм некоторого а в т о м о р ф и з м а T', называемого естественным расширением эндоморфизма T. Естественными расширениями точных эндоморфизмов оказываются автоморфизмы, изучавшиеся Колмогоровым [1] под названием «квазирегулярных». Общие теоремы о естественных расширениях позволяют вывести из свойств точных эндоморфизмов ряд свойств автоморфизмов Колмогорова; в частности, оказывается, что автоморфизм Колмогорова есть перемешивание всех степеней. В § 4 рассматривается класс теоретико-числовых эндоморфизмов, изучавшийся Реньи [2]. Доказывается, что все эти эндоморфизмы являются точными, и вычисляется их энтропия.

§ 1. Предварительные сведения из теории меры

В этом параграфе для удобства читателя кратко излагаются сведения из теории меры, необходимые для понимания настоящей работы. Подробное изложение содержания п. п. 1.1—1.4 имеется в работе автора [3]

1.1. Общие определения. Как известно, множество M называется *пространством с мерой*, если в нем выделено борелевское тело измеримых подмножеств X, снабженных мерами $\mu(X)$. Предполагается, что функция μ неотрицательна и счетно аддитивна.

Если само M измеримо и $\mu(M) = 1$, то мера μ называется *нормированной*. Если подмножества множеств меры нуль измеримы (и, следовательно, имеют меру нуль), то мера μ называется *полной*.

Отображение одного пространства с мерой на другое называется *гомоморфизмом*, если прообраз всякого измеримого множества измерим и имеет ту же меру, что и само множество. Гомоморфизм называется *изоморфизмом*, если он взаимно однозначен и обратное отображение также есть гомоморфизм. Если пространства совпадают, то изоморфизм называется *автоморфизмом*, а гомоморфизм — *эндоморфизмом*.

Пространства с мерой, между которыми может быть установлен изоморфизм, называются *изоморфными*. Эндоморфизм T пространства M называется изоморфным эндоморфизму T' пространства M', если существует такой изоморфизм S пространства M на пространство M', что $T' = STS^{-1}$.

Важнейший принцип теории меры состоит в пренебрежении множествами меры нуль. В соответствии с этим принципом пространства с мерой и их эндоморфизмы должны изучаться лишь с точностью до множеств меры нуль, или, как мы будем говорить, «*по модулю нуль*». Например, существенно не то, изоморфны ли пространства M и M' или их эндоморфизмы T и T', а то, можно ли сделать их изоморфными путем удаления из M и M' некоторых множеств меры нуль; не то, является ли данный эндоморфизм T пространства M автоморфизмом, а то, можно ли сделать его автоморфизмом путем удаления из M некоторого множества меры нуль, и т. д. Если ответ положителен, то говорят, что M и M' или T и T' изоморфны по модулю нуль (mod 0); что T есть автоморфизм по модулю нуль (mod 0) и т. д.

1.2. Пространства Лебега. Счетная система $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ измеримых множеств называется *базисом* пространства M, если:

(а) для всякого измеримого множества X существует такое множество Y, принадлежащее к порожденному системой $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ борелевскому телу множеств, что $Y \supset X$ и $\mu(Y - X) = 0$;

(б) для всяких двух точек $x \in M$, $y \in M$ существует такое $\alpha \in A$, что либо $x \in B_\alpha$, $y \notin B_\alpha$, либо $x \notin B_\alpha$, $y \in B_\alpha$.

Пространство с полной нормированной мерой, обладающее базисом, называется *сепарабельным*.

Сепарабельное пространство M называется *полным* относительно своего базиса $\{B_\alpha; \alpha \in A\}$, если все пересечения $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$, где E_α — одно из множеств B_α, $M - B_\alpha$, непусты. В соответствии с этим сепарабельное пространство M называется *полным по модулю нуль* относительно своего базиса $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$, если его можно включить в качестве подмножества меры 1 в сепарабельное пространство M', полное относительно такого своего базиса $\{B'_\alpha;\ \alpha \in A\}$, что $B'_\alpha \cap M = B_\alpha$. Если сепарабельное пространство полно по модулю нуль относительно некоторого своего базиса,

то оно полно по модулю нуль и относительно всякого другого своего базиса. Сепарабельные пространства, полные по модулю нуль относительно своих базисов, называются *пространствами Лебега*, а соответствующие меры — *мерами Лебега*.

Пространство Лебега содержит не более счетного множества точек положительной меры. Если их вовсе не существует, то мера μ называется *непрерывной*; если ими исчерпывается по модулю нуль все пространство, то мера μ называется *дискретной*. Пространство Лебега с непрерывной мерой изоморфно по модулю нуль единичному интервалу с обычной мерой Лебега.

В пространстве Лебега всякая счетная система $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ измеримых множеств, обладающая свойством (б), является базисом, т. е. обладает и свойством (а).

Пусть $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — базис пространства Лебега M с мерой μ и $\{B'_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — базис пространства Лебега M' с мерой μ'. Если для любого конечного набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{r} B_{\alpha_i}\right) = \mu'\left(\bigcap_{i=1}^{r} B'_{\alpha_i}\right),$$

то существует изоморфное mod 0 отображение пространства M на пространство M', переводящее, с точностью до множеств меры нуль, B_α в B'_α, $\alpha \in A$, и всякие два таких отображения тождественны по модулю нуль.

В дальнейшем M предполагается пространством Лебега.

1.3. Измеримые разбиения и алгебры измеримых множеств. *Разбиением* пространства M называется всякая совокупность непустых непересекающихся множеств, покрывающих M. Множества, являющиеся суммами элементов разбиения ζ, называются *ζ-множествами*.

Счетная система $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ измеримых ζ-множеств называется *базисом* разбиения ζ, если для всяких двух элементов C, C' разбиения ζ существует такое $\alpha \in A$, что либо $C \subset B_\alpha$, $C' \not\subset B_\alpha$, либо $C \not\subset B_\alpha$, $C' \subset B_\alpha$. Разбиение, обладающее базисом, называется *измеримым*.

Условимся писать $\zeta \leqslant \zeta'$, если разбиение ζ' есть подразбиение разбиения ζ. В соответствии с этим будем писать $\zeta = \zeta' \bmod 0$, $\zeta \leqslant \zeta' \bmod 0$, если соотношения $\zeta = \zeta'$, $\zeta \leqslant \zeta'$ становятся справедливыми после удаления из M надлежащих множеств меры нуль.

Для всякой системы измеримых разбиений ζ_α существует *произведение* $\prod_\alpha \zeta_\alpha$, определяемое как измеримое разбиение ζ с двумя свойствами:

1) $\zeta_\alpha \leqslant \zeta \bmod 0$ при любом α;

2) если $\zeta_\alpha \leqslant \zeta' \bmod 0$ при любом α, то $\zeta \leqslant \zeta' \bmod 0$.

Аналогично, для всякой системы измеримых разбиений ζ_α существует *пересечение* $\bigcap_\alpha \zeta_\alpha$, определяемое как измеримое разбиение ζ с двумя свойствами:

1) $\zeta_\alpha \geqslant \zeta \bmod 0$ при любом α;

2) если $\zeta_\alpha \geqslant \zeta' \bmod 0$ при любом α, то $\zeta \geqslant \zeta' \bmod 0$.

Разбиение пространства M на отдельные точки обозначается через ε.

Тривиальное разбиение, единственный элемент которого есть M, обозначается через ν.

Измеримой оболочкой разбиения ζ называется произведение всех измеримых разбиений, для которых ζ служит подразбиением.

Разобьем совокупность всех измеримых множеств на классы множеств, отличающихся друг от друга на множество меры нуль, и обозначим совокупность этих классов через $\mathfrak{M}$. Операции счетного сложения, счетного пересечения и вычитания переносятся с множеств на их классы и превращают $\mathfrak{M}$ в алгебру. Всякая часть алгебры $\mathfrak{M}$, замкнутая относительно этих операций, называется подалгеброй алгебры $\mathfrak{M}$.

Ясно, что пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} \mathfrak{M}_\alpha$ любой системы подалгебр $\mathfrak{M}_\alpha$ алгебры $\mathfrak{M}$ есть подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$. Несколько сложнее определяется *сумма* $\bigvee\limits_{\alpha} \mathfrak{M}_\alpha$ подалгебр $\mathfrak{M}_\alpha$: это пересечение всех подалгебр, содержащих (каждая) все $\mathfrak{M}_\alpha$.

Среди подалгебр алгебры $\mathfrak{M}$ есть наибольшая — сама алгебра $\mathfrak{M}$ — и наименьшая — тривиальная алгебра $\mathfrak{N}$, состоящая из класса множеств меры нуль и класса множеств меры 1.

Обозначим для произвольного измеримого разбиения ζ через $\mathfrak{M}(\zeta)$ подалгебру алгебры $\mathfrak{M}$, состоящую из классов измеримых ζ-множеств. Оказывается, что если $\mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M}(\zeta')$, то $\zeta = \zeta' \bmod 0$ и что для всякой подалгебры алгебры $\mathfrak{M}$ существует такое измеримое разбиение ζ, что $\mathfrak{M}(\zeta)$ есть как раз эта подалгебра. Таким образом, подалгебры алгебры $\mathfrak{M}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с классами тождественных mod 0 измеримых разбиений. При этом $\mathfrak{M}(\varepsilon) = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}(\nu) = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}(\zeta) \subset \mathfrak{M}(\zeta')$ в том и только в том случае, если $\zeta \leqslant \zeta' \bmod 0$, и

$$\mathfrak{M}\left(\prod_{\alpha} \zeta_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha} \mathfrak{M}(\zeta_\alpha), \quad \mathfrak{M}\left(\bigcap_{\alpha} \zeta_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{M}(\zeta_\alpha).$$

Расстояние $\rho(A, B)$ измеримых множеств A, B определяется формулой

$$\rho(A, B) = \mu(A + B - AB).$$

Функция ρ превращает $\mathfrak{M}$ в метрическое пространство.

1.4. Фактор-пространство. Каноническая система мер. *Фактор-пространством пространства M по разбиению* ζ называется пространство с мерой, точками которого служат элементы разбиения ζ и мера μ_ζ которого определяется следующим образом: пусть H_ζ — отображение, относящее каждой точке $x \in M$ тот элемент разбиения ζ, к которому она принадлежит; множество Z считается измеримым в фактор-пространстве, если множество $H_\zeta^{-1} Z$ измеримо в M и, по определению,

$$\mu_\zeta(Z) = \mu(H_\zeta^{-1} Z).$$

Фактор-пространство пространства M по разбиению ζ обозначается через M/ζ. Ясно, что H_ζ есть гомоморфизм пространства M на M/ζ.

Фактор-пространство пространства Лебега по любому измеримому разбиению есть пространство Лебега.

Канонической системой мер, принадлежащей разбиению ζ, называется система мер μ_C, $C \in \zeta$, обладающая двумя свойствами:

(1) μ_C есть мера Лебега в C, $C \in \zeta$;

(2) каково бы ни было измеримое множество $X \subset M$, множество XC измеримо в пространстве C для почти каждой точки $C \in M/\zeta$, функция $\mu_C(XC)$ измерима на M/ζ и

$$\mu(X) = \int\limits_{M/\zeta} \mu_C(XC)\, d\mu_\zeta.$$

Всякое измеримое разбиение обладает канонической системой мер, и всякие две канонические системы мер $\{\mu_C\}$ и $\{\mu'_C\}$, принадлежащие одному и тому же разбиению ζ, mod 0 тождественны (т. е. $\mu'_C = \mu_C$ для всех mod 0 $C \in M/\zeta$).

1.5. Гомоморфизмы. Как доказано в ([3]), гомоморфизм пространства Лебега на пространство Лебега переводит всякое измеримое множество, являющееся прообразом, в измеримое множество. В частности, взаимно однозначный гомоморфизм есть изоморфизм. Однако измеримое множество, не являющееся прообразом, может перейти при гомоморфизме в неизмеримое множество.

В этом пункте рассматривается класс множеств с измеримыми образами, существенно более широкий, чем класс измеримых прообразов. Эти множества называются *неприводимыми* и определяются следующим образом. Пусть T — гомоморфизм пространства M на другое пространство Лебега M', ζ — разбиение пространства M на прообразы точек при гомоморфизме T и $\{\mu_C\}$ — каноническая система мер, принадлежащая разбиению ζ. Обозначим для произвольного измеримого множества $X \subset M$ через Z сумму тех элементов C разбиения ζ, которые пересекаются с X, через Z_0 — сумму тех элементов $C \subset Z$, для которых $\mu_C(XC) = 0$, и через Z_1 — сумму тех элементов C, для которых $\mu_C(XC) > 0$. Ясно, что множества Z, Z_0 и Z_1 являются прообразами и что

$$Z_1 + Z_0 = Z.$$

Так как $\mu_C(XC)$ есть измеримая функция на M/ζ, то множества Z_1 и TZ_1 всегда измеримы, а множества Z_0, Z и TZ измеримы или неизмеримы одновременно. Множество X называется *неприводимым* относительно гомоморфизма T, если Z_0 есть множество меры нуль.

Если множество X неприводимо относительно гомоморфизма T, то его образ TX измерим.

Действительно, $TX = TZ$.

Если множество X неприводимо относительно гомоморфизма T, то всякое множество $X' \subset X$, отличающееся от X на множество меры нуль, также неприводимо относительно T.

Доказательство. Пусть Z'_0 — сумма тех элементов C разбиения ζ, для которых пересечение $X'C$ непусто, но $\mu_C(X'C) = 0$. Так как $X' \subset X$, то $Z'_0 \subset Z$ и, следовательно, $Z'_0 \subset Z_1 Z'_0 + Z_0$. Первое слагаемое справа, $Z_1 Z'_0$, содержится в сумме тех C, для которых $\mu_C(XC) > 0$, но $\mu_C(X'C) = 0$. Так как X' отличается от X на множество меры нуль, то эта сумма имеет меру нуль, и $\mu(Z_1 Z'_0) = 0$. Второе слагаемое, Z_0, также имеет меру нуль. Следовательно, $\mu(Z'_0) = 0$.

Всякое измеримое множество X содержит подмножество, отличающееся от X на множество меры нуль и неприводимое относительно T.

Таким подмножеством является, например, пересечение XZ_1.

Если почти все элементы C разбиения ζ, рассматриваемые как пространства с мерами μ_C, состоят из одних точек положительной меры, то гомоморфизм T переводит всякое измеримое множество в измеримое множество.

Действительно, в этом случае все измеримые множества неприводимы.

Условимся называть образы неприводимых частей измеримого множества X, отличающихся от X на множество меры нуль, *приведенными образами* этого множества относительно гомоморфизма T и будем обозначать их через $T_r X$. Очевидно, что все они отличаются друг от друга на множества меры нуль и что то же справедливо для приведенных образов любых двух измеримых множеств, отличающихся друг от друга на множество меры нуль. Следовательно, T_r может рассматриваться как отображение алгебры $\mathfrak{M}$ на алгебру $\mathfrak{M}'$ классов измеримых множеств пространства M'.

Если T есть эндоморфизм пространства M, то T_r отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что в этом случае

$$(T_r)^n = (T^n)_r.$$

Если T есть эндоморфизм пространства M, то всякое измеримое множество X содержит подмножество Y, отличающееся от X на множество меры нуль и неприводимое относительно всех эндоморфизмов T^n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть X_n — подмножество множества X, отличающееся от X на множество меры нуль и неприводимое относительно T^n. Положим

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Ясно, что $\mu(X - Y) = 0$ и $\mu(X_n - Y) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Из последнего соотношения и включения $Y \subset X_n$ следует, что множество Y неприводимо относительно T^n.

1.6. Энтропия разбиения. Пусть ξ — измеримое разбиение пространства M, и пусть $C_1, C_2, \ldots$ — элементы разбиения ξ, имеющие положительную меру. Положим

$$H(\xi) = \begin{cases} -\sum\limits_k \mu(C_k) \lg \mu(C_k), & \text{если } \mu(M - \bigcup\limits_k C_k) = 0, \\ +\infty & \text{, если } \mu(M - \bigcup\limits_k C_k) > 0, \end{cases}$$

где lg есть знак двоичного логарифма. Сумма, стоящая в первой строке этой формулы, может быть как конечной, так и бесконечной. Функция $H(\xi)$ называется *энтропией разбиения* ξ.

Если наряду с разбиением ξ имеется еще измеримое разбиение η, то ξ индуцирует в почти каждом элементе C разбиения η некоторое измеримое разбиение ξ_C с определенной энтропией $H(\xi_C)$ (элементы разбиения η рассматриваются как пространства Лебега — см. п. 1.4). Это — неот-

рицательная измеримая функция на фактор-пространстве M/η. Ее интеграл по M/η, конечный или бесконечный, называется *средней энтропией разбиения* ξ *относительно разбиения* η и обозначается через $H(\xi/\eta)$.

Мы будем пользоваться следующими свойствами функции $H(\xi/\eta)$ [см. (4), (5), (1), (6)]:

1) $H(\xi/\nu) = H(\xi)$, $H(\xi\eta/\eta) = H(\xi/\eta)$.

2) $H(\xi/\eta) \geqslant 0$; $H(\xi/\eta) = 0$ в том и только в том случае, если $\xi \leqslant \eta$ mod 0.

3) Если $\xi \leqslant \xi'$, то $H(\xi/\eta) \leqslant H(\xi'/\eta)$.

4) $H(\xi\xi'/\eta) \leqslant H(\xi/\eta) + H(\xi'/\eta)$.

5) Если $\eta \leqslant \eta'$, то $H(\xi/\eta) \geqslant H(\xi/\eta')$.

6) Если $H(\xi) < \infty$ и $H(\eta) < \infty$, то $H(\xi\eta) = H(\xi/\eta) + H(\eta)$.

7) Если $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi$, то

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi_n/\eta) = H(\xi/\eta).$$

8) Если $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots$, $\prod_{n=1}^{\infty} \eta_n = \eta$ и $H(\xi) < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi/\eta_n) = H(\xi/\eta).$$

1.7. **Пространство разбиений с конечной энтропией.** Обозначим через Z множество измеримых разбиений с конечной энтропией и положим для $\xi \in Z$, $\eta \in Z$

$$\rho(\xi, \eta) = H(\xi/\eta) + H(\eta/\xi).$$

Ясно, что $\rho(\xi, \eta) \geqslant 0$ и что $\rho(\xi, \eta) = 0$ в том и только в том случае, если $\xi = \eta$ mod 0. Очевидно также, что

$$\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi).$$

Наконец,

$$\rho(\xi, \zeta) \leqslant \rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, \zeta).$$

Действительно,

$$H(\xi/\zeta) = H(\xi\zeta) - H(\zeta) \leqslant H(\xi\eta\zeta) - H(\zeta) = H(\xi\eta\zeta) - H(\eta\zeta) + \\ + H(\eta\zeta) - H(\zeta) = H(\xi/\eta\zeta) + H(\eta/\zeta) \leqslant H(\xi/\eta) + H(\eta/\zeta),$$

и, точно так же,

$$H(\zeta/\xi) \leqslant H(\zeta/\eta) + H(\eta/\xi).$$

Таким образом, ρ есть метрика в Z, или, точнее, в множестве, которое получится из Z, если отождествить тождественные mod 0 разбиения.

Множество конечных разбиений всюду плотно в Z.

Действительно, пусть $\xi \in Z$, и пусть $C_1, C_2, \ldots$ — элементы разбиения ξ, имеющие положительную меру. Предположим, что их бесконечное число, и обозначим через ξ_n разбиение пространства M на множества

$C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, E_n = M - (C_1 + \ldots + C_{n-1})$. Так как $\xi_n \leqslant \xi$, то

$$\rho(\xi, \xi_n) = H(\xi) - H(\xi_n) = \mu(E_n) \lg \mu(E_n) - \sum_{i=n}^{\infty} \mu(C_i) \lg \mu(C_i).$$

В силу того, что $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \lg \mu(C_i)$ сходится, оба члена справа имеют пределы, равные нулю. Следовательно, $\rho(\xi, \xi_n) \to 0$.

Если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — такая последовательность разбиений, что

$$\zeta_1 \leqslant \zeta_2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon,$$

то множество разбиений $\eta \in Z$, таких, что $\eta \leqslant \zeta_n$ хотя бы при одном n, всюду плотно в Z.

Доказательство. Достаточно доказать, что для всякого конечного разбиения $\xi \in Z$ и всякого положительного δ существуют такое n и такое $\eta \in Z$, что

$$\eta \leqslant \zeta_n, \quad \rho(\xi, \eta) < \delta.$$

Пусть $C_1, \ldots, C_m$ — элементы разбиения ξ. Так как $\prod_{n=1}^{\infty} \zeta_n = \varepsilon$, то

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta_n) = \mathfrak{M},$$

т. е. тело $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta_n)$ всюду плотно в $\mathfrak{M}$. Следовательно, для всякого положительного δ' существуют такое n и такие ζ_n-множества $C'_1, \ldots, C'_{m-1}$, что

$$\rho(C_i, C'_i) < \delta', \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Обозначим через η разбиение пространства M на множества $D_1, \ldots, D_m$, определяемые формулами

$$D_1 = C'_1, \quad D_i = C'_i - C'_i(C'_1 + \ldots + C'_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, m-1,$$
$$D_m = M - (C'_1 + \ldots + C'_{m-1}).$$

Очевидно, что $\eta \leqslant \zeta_n$ и что

$$\rho(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(C_i) \lg \mu(C_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu(D_i) \lg \mu(D_i) - 2 \sum_{i, j=1}^{m} \mu(C_i D_j) \lg \mu(C_i D_j)$$

(при $a = 0$ произведение $a \lg a$ считается равным нулю). Эти формулы показывают, что $\rho(\xi, \eta)$ непрерывно зависит от $C'_1, \ldots, C'_{m-1}$ и обращается в нуль при $C'_1 = C_1, \ldots, C'_{m-1} = C_{m-1}$. Следовательно, если δ' достаточно мало, то $\rho(\xi, \eta) < \delta$.

Если ζ — произведение возрастающей последовательности измеримых разбиений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, то множество разбиений η таких, что $\eta \leqslant \zeta_n$ хотя бы при одном n, плотно в множестве измеримых разбиений η, удовлетворяющих условию $\eta \leqslant \zeta$.

Эта теорема сводится к предыдущей (обобщением которой она является) путем факторизации пространства M по разбиению ζ.

§ 2. Точные эндоморфизмы

2.1. Прообразы измеримых множеств. Во всем дальнейшем M предполагается пространством Лебега с непрерывной мерой и T обозначает эндоморфизм пространства M.

Так как прообраз $T^{-1}X$ измеримого множества X при эндоморфизме T изменяется на множество меры нуль, когда X изменяется на множество меры нуль, то T^{-1} можно рассматривать как отображение алгебры $\mathfrak{M}$ в алгебру $\mathfrak{M}$. Очевидно, что это отображение есть алгебраический изоморфизм. Если T есть автоморфизм или mod 0 автоморфизм, то $T^{-1}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, в противном случае $T^{-1}\mathfrak{M}$ есть собственная подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$.

Повторно применяя операцию T^{-1}, мы получаем последовательность вложенных друг в друга алгебр

$$\mathfrak{M} \supset T^{-1}\mathfrak{M} \supset T^{-2}\mathfrak{M} \supset \ldots, \tag{1}$$

члены которой либо все совпадают, либо все различны. Алгебра $T^{-n}\mathfrak{M}$ может быть описана следующим образом: элемент алгебры $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае принадлежит к алгебре $T^{-n}\mathfrak{M}$, если он, как класс измеримых множеств, содержит по крайней мере одно множество, служащее прообразом при эндоморфизме T^n, т. е. по крайней мере одно множество X, удовлетворяющее соотношению $X = T^{-n}(T^n X)$.

Рассмотрим пересечение $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$. Это — тоже подалгебра алгебры $\mathfrak{M}$. Ясно, что элемент алгебры $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае принадлежит к $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$, если он, как класс измеримых множеств, содержит последовательность множеств $X_1, X_2, \ldots$, удовлетворяющих соотношениям

$$X_n = T^{-n}(T^n X_n).$$

Оказывается, что *каждый класс измеримых множеств, принадлежащий к $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}$, содержит множество X, удовлетворяющее одновременно всем соотношениям $X = T^{-n}(T^n X)$.*

Доказательство. Возьмем в указанном классе какое-нибудь множество Y с измеримыми образами $TY, T^2Y, \ldots$ (см. п. 1.5) и положим

$$X = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(T^k Y).$$

Так как последовательность $Y, T^{-1}(TY), T^{-2}(T^2Y), \ldots$ возрастает, то при любом n

$$X = \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(T^k Y) = T^{-n}(T^n X).$$

Далее,

$$\mu(T^{-k}(T^k Y) - Y) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

и $\mu(X - Y) = 0$.

Наряду с последовательностью алгебр (1) рассмотрим последовательность разбиений

$$\varepsilon \geqslant T^{-1}\varepsilon \geqslant T^{-2}\varepsilon \geqslant \ldots. \tag{2}$$

Очевидно, что $\mathfrak{M}(T^{-n}\varepsilon) = T^{-n}\mathfrak{M}$. Следовательно,

$$\mathfrak{M}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}.$$

Мы имеем:

$$T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon, \quad T^{-1}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}.$$

В силу этих соотношений, эндоморфизм T индуцирует в фактор-пространстве $M/\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon$ некоторый **автоморфизм**.

2.2. **Точные эндоморфизмы.** Эндоморфизм T называется *точным*, если

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}, \tag{3}$$

т. е. если

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon = \nu. \tag{4}$$

Другими словами, эндоморфизм T называется точным, если всякое измеримое множество X, удовлетворяющее при любом n соотношению

$$X = T^{-n}(T^n X),$$

имеет либо меру нуль, либо меру 1.

Эндоморфизм T в том и только в том случае является точным, если для всякого множества X положительной меры с измеримыми образами TX, T^2X, ... справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^n X) = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть T — точный эндоморфизм и X — множество положительной меры с измеримыми образами TX, T^2X, ... Так как последовательность X, $T^{-1}(TX)$, $T^{-2}(T^2X)$, ... возрастает, то для ее суммы $S = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(T^k X)$ при любом n справедливо соотношение

$$S = \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(T^k X) = T^{-n}(T^n S).$$

Следовательно, класс множества S принадлежит к алгебре (3). Так как $\mu(S) \geqslant \mu(X) > 0$, то $\mu(S) = 1$, и

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(T^n X)) = 1. \tag{6}$$

Но $\mu(T^{-n}(T^n X)) = \mu(T^n X)$, и из (6) следует (5).

Пусть теперь соотношение (5) справедливо для всякого множества X положительной меры с измеримыми образами TX, T^2X, ..., и пусть X — измеримое множество, удовлетворяющее при любом n соотношению

$$X = T^{-n}(T^n X).$$

Ясно, что $\mu(T^n X) = \mu(X)$ и $\lim_{n\to\infty} \mu(T^n X) = \mu(X)$. Следовательно, если $\mu(X) > 0$, то $\mu(X) = 1$.

Эта теорема может быть сформулирована многими эквивалентными способами. Например: *эндоморфизм T в том и только в том случае является точным, если для всякого множества X положительной меры*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T_r^n X) = 1.$$

Или: *эндоморфизм T в том и только в том случае является точным, если для всякого множества X с положительной внутренней мерой $\mu_i(X)$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_i(T^n X) = 1.$$

2.3. Точность и неприводимость. Множество $A \subset M$ называется *инвариантным* относительно эндоморфизма T, если $T^{-1}A = A$. Очевидно, что элементы алгебры $\mathfrak{M}$, отвечающие инвариантным измеримым множествам, образуют подалгебру алгебры $\mathfrak{M}$. Обозначим эту подалгебру через $\mathfrak{M}_T$. Эндоморфизм T называется *неприводимым*, если $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$, т. е. если всякое инвариантное измеримое множество имеет либо меру нуль, либо меру 1.

Ясно, что $\mathfrak{M}_T \subset T^{-n}\mathfrak{M}$ при любом n. Следовательно,

$$\mathfrak{M}_T \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M},$$

и если $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, то и $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$. Таким образом, *точные эндоморфизмы неприводимы.*

Неприводимый эндоморфизм может не быть точным. Примером служит любой неприводимый автоморфизм. Действительно, для неприводимого автоморфизма $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{N}$, а $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$.

Переведем сказанное на язык разбиений. Для этого рассмотрим разбиения ξ и η пространства M, определяемые следующим образом: точки x и y принадлежат к одному элементу разбиения ξ, если существуют такие неотрицательные целые числа p и q, что $T^p x = T^q y$; точки x и y принадлежат к одному элементу разбиения η, если существует такое неотрицательное целое число n, что $T^n x = T^n y$. Элементы разбиения ξ называются *траекториями* своих точек относительно эндоморфизма T. Разбиения ξ и η, вообще говоря, неизмеримы; пусть ξ', η' — их измеримые оболочки. Мы имеем:

$$\xi \leqslant \eta \mod 0, \quad \xi' \leqslant \eta' \mod 0, \quad \eta' = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon,$$

$$\mathfrak{M}(\xi') = \mathfrak{M}_T, \quad \mathfrak{M}(\eta') = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M}.$$

Эндоморфизм T неприводим в том и только в том случае, если $\xi' = \nu \mod 0$, и точен в том и только в том случае, если $\eta' = \nu \mod 0$. Если T есть неприводимый автоморфизм, то $\xi' = \nu \mod 0$, а $\eta' = \varepsilon \mod 0$.

2.4. Полуунитарные операторы. В п. 2.5 мы встретимся с полуунитарными операторами. Здесь излагаются необходимые сведения о них*.

Пусть H — унитарное пространство. Линейный изометрический оператор U, определенный в H, называется унитарным, если $UH = H$, и *полуунитарным*, если UH есть правильная часть пространства H.

Примером полуунитарного оператора может служить оператор, определяемый формулой

$$Uf^n = f^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

* Спектральная теория полуунитарных операторов построена Плеснером (7).

где $f^0, f^1, \ldots$ — полная нормированная ортогональная система в H. Такой оператор мы будем называть *элементарным полуунитарным оператором.* Несколько более сложный пример — ортогональная сумма элементарных полуунитарных операторов, т. е. оператор, допускающий разложение своего пространства H в ортогональную сумму инвариантных подпространств, в каждом из которых он является элементарным полуунитарным оператором. Число этих инвариантных подпространств (конечное или бесконечное) не зависит от выбора указанного разложения; действительно, это число равно размерности ортогонального дополнения $H \ominus UH$ подпространства UH. Ортогональную сумму a элементарных полуунитарных операторов мы будем называть *полуунитарным оператором с однородным спектром кратности* a.

В случае произвольного полуунитарного оператора U имеют место очевидные включения $H \supset UH \supset U^2H \supset \ldots$, из которых следует, что для пересечения $H^0 = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U^n H$ справедливо соотношение $UH^0 = H^0$. Таким образом, подпространство H^0 инвариантно относительно U и на нем U есть унитарный оператор. Ортогональное дополнение

$$H^1 = H \ominus H^0$$

также инвариантно относительно U, и очевидно, что

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U^n H^1 = O, \tag{7}$$

где O — нулевое подпространство. Оказывается, что на H^1 оператор U имеет однородный спектр.

Действительно, пусть $\{h_\alpha\}$ — какая-нибудь полная нормированная ортогональная система в $H^1 \ominus UH^1$, и пусть H_α — замкнутая линейная оболочка последовательности $h_\alpha, Uh_\alpha, U^2h_\alpha, \ldots$. Ясно, что элементы $U^n h_\alpha$ попарно ортогональны. Следовательно, подпространства H_α попарно ортогональны и в каждом из них U есть элементарный полуунитарный оператор. В силу соотношения (7), система $\{U^n h_\alpha\}$ является полной. Значит, ортогональная сумма подпространств H_α есть все H^1.

Заметим, что $H^1 \ominus UH^1 = H \ominus UH$, так что число подпространств H_α равно размерности $\dim (H \ominus UH)$ подпространства $H \ominus UH$. Тем самым доказана следующая теорема:

По отношению ко всякому полуунитарному оператору U пространство H разлагается в ортогональную сумму инвариантных подпространств $H^0 = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U^n H$ и $H^1 = H \ominus H^0$, в первом из которых оператор U унитарен, а во втором имеет однородный спектр кратности $\dim (H \ominus UH)$.

Операторы, индуцируемые оператором U в подпространствах $H^0 = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} U^n H$ и $H^1 = H \ominus H^0$, мы будем называть, соответственно, *унитарной частью* и *однородной частью* оператора U.

2.5. Точность и спектр. Пусть L_2 — унитарное пространство классов почти всюду совпадающих измеримых комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на M. Как это принято, мы будем называть элементы пространства L_2 просто функциями и, если это не может привести к недоразумению, вообще не будем различать в терминологии

и обозначениях функцию и ее класс. Подобное же соглашение мы примем в отношении измеримых множеств и их классов, служащих элементами алгебры $\mathfrak{M}$.

Обозначим для произвольного измеримого разбиения ζ через $L_2(\zeta)$ подпространство пространства L_2, состоящее из функций, постоянных на элементах разбиения ζ. Очевидно, что $L_2(\zeta)$ содержит характеристические функции множеств, входящих в $\mathfrak{M}(\zeta)$ (см. п. 1.3), и порождается этими функциями. Следовательно, $L_2(\zeta) = L_2(\zeta')$ в том и только в том случае, если $\zeta = \zeta' \bmod 0$. Ясно также, что $L_2(\zeta) \subset L_2(\zeta')$ в том и только в том случае, если $\zeta \leqslant \zeta' \bmod 0$, и что

$$L_2\left(\bigcap_\alpha \zeta_\alpha\right) = \bigcap_\alpha L_2(\zeta_\alpha), \quad L_2\left(\prod_\alpha \zeta_\alpha\right) = \bigvee_\alpha L_2(\zeta_\alpha),$$

где $\bigvee_\alpha L_2(\zeta_\alpha)$ — наименьшее подпространство пространства L_2, содержащее все $L_2(\zeta_\alpha)$. Заметим, что $L_2(\varepsilon) = L_2$ и $L_2(\nu) = C$, где C — одномерное подпространство постоянных.

Каждому эндоморфизму T пространства M отвечает сопряженный с ним оператор U_T, определяемый формулой

$$U_T f(x) = f(Tx), \qquad f \in L_2, \quad x \in M,$$

и отображающий L_2 в L_2. Если T есть автоморфизм или автоморфизм по модулю нуль, то U_T есть унитарный, в противном случае — полуунитарный оператор.

Постоянные всегда являются инвариантными функциями оператора U_T. Если других инвариантных функций не существует, то эндоморфизм T называется *эргодическим*. Эргодичность эквивалентна неприводимости.

Очевидно, что $U_T^n L_2 = L_2(T^{-n}\varepsilon)$. Следовательно, подпространство $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_T^n L_2$, на котором определена унитарная часть оператора U_T, совпадает с подпространством $L_2\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon\right)$. Последнее подпространство может рассматриваться как унитарное пространство всех функций с интегрируемым квадратом модуля на фактор-пространстве $M/\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}\varepsilon$, а сама унитарная часть оператора U_T — как оператор, сопряженный с автоморфизмом, индуцированным эндоморфизмом T в этом фактор-пространстве (см. п. 2.1).

Исследуем однородную часть оператора U_T.

ЛЕММА. *Если $\zeta \neq \varepsilon \bmod 0$, то ортогональное дополнение $L_2 \ominus L_2(\zeta)$ подпространства $L_2(\zeta)$ бесконечномерно.*

Доказательство. Если $\zeta \neq \varepsilon \bmod 0$, то $L_2(\zeta) \neq L_2$ и в L_2 имеется функция $\varphi \neq 0$, ортогональная к $L_2(\zeta)$. Обозначим через A множество тех точек $x \in M$, в которых $\varphi(x) \neq 0$, через χ — характеристическую функцию множества A, через L_2' — подпространство пространства L_2, составленное из функций, равных нулю вне A, и через $L_2'(\zeta)$ — подпространство пространства L_2, составленное из функций, постоянных на элементах разбиения ζ в пределах множества A и равных нулю вне A. Ясно, что функция φ ортогональна к $L_2'(\zeta)$. Рассмотрим два случая.

1) Подпространство $L_2'(\zeta)$ конечномерно. Так как L_2' бесконечномерно, то ортогональное дополнение $L_2' \ominus L_2'(\zeta)$ бесконеч-

номерно. Если $f \in L_2' \ominus L_2'(\zeta)$ и g — произвольная функция из $L_2(\zeta)$, то $g\chi \in L_2'(\zeta)$ и $(f, g) = (f, g\chi) = 0$. Таким образом, если $f \in L_2' \ominus L_2'(\zeta)$, то $f \in L_2 \ominus L_2(\zeta)$, т. е.

$$L_2' \ominus L_2'(\zeta) \subset L_2 \ominus L_2(\zeta).$$

Следовательно, подпространство $L_2 \ominus L_2(\zeta)$ бесконечномерно.

2) Подпространство $L_2'(\zeta)$ бесконечномерно. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — последовательность линейно независимых ограниченных действительных функций из $L_2'(\zeta)$. Так как все эти функции равны нулю вне A, то они линейно независимы на A, и так как φ не обращается в нуль на A, то функции $g_1\varphi, g_2\varphi, \ldots$ также линейно независимы. Если $g \in L_2(\zeta)$, то $gg_n \in L_2'(\zeta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$(g, g_n\varphi) = (gg_n, \varphi) = 0.$$

Следовательно, $g_n\varphi \in L_2 \ominus L_2(\zeta)$, и подпространство $L_2 \ominus L_2(\zeta)$ бесконечномерно.

Если оператор U_T полуунитарен, то его однородная часть имеет бесконечнократный спектр.

Действительно, согласно п. 2.4, кратность спектра однородной части оператора U_T равна $\dim(L_2 \ominus U_T L_2)$. Так как $U_T L_2 = L_2(T^{-1}\varepsilon)$, то, согласно лемме, $\dim(L_2 \ominus U_T L_2) = \infty$.

Из полученных результатов следует:

Эндоморфизм T в том и только в том случае является точным, если

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_T^n L_2 = C. \tag{8}$$

Унитарная часть оператора U_T, сопряженного с точным эндоморфизмом, есть тождественное преобразование одномерного пространства C, его однородная часть имеет счетнократный спектр.

Как известно, операторы U и U', определенные в унитарном пространстве H, называются *изоморфными*, если в H существует такой унитарный оператор V, что $U' = VUV^{-1}$. Из изложенного, в частности, следует, что *все операторы U_T, сопряженные с точными эндоморфизмами, изоморфны между собой.*

2.6. Точность и перемешивание. Эндоморфизм T называется *перемешиванием*, если для любых двух измеримых множеств X, Y

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n} X \cap Y) = \mu(X)\,\mu(Y).$$

Существенным усилением этого классического определения служит следующее определение кратного перемешивания, введенное в ([8]). Мы будем рассматривать комплексы $\Delta^r = (k^0, k^1, \ldots, k^r)$, составленные из неотрицательных целых чисел $k^0, k^1, \ldots, k^r$. Положим

$$I(\Delta^r) = \inf |k^i - k^j|, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant r.$$

Эндоморфизм T называется *перемешиванием степени r*, если для любых измеримых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_r$ и любой последовательности комплексов

$$\Delta_1^r = (k_1^0, k_1^1, \ldots, k_1^r),\ \Delta_2^r = (k_2^0, k_2^1, \ldots, k_2^r), \ldots \tag{9}$$

такой, что

$$\lim_{n\to\infty} I(\Delta_n^r) = \infty, \tag{10}$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_n^i} X_i\right) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i). \tag{11}$$

Очевидно, что если T есть перемешивание степени r, то T есть перемешивание всякой степени $s < r$. В частности, перемешивание степени 1 есть классическое перемешивание, определенное выше.

Эндоморфизм T в том и только в том случае есть перемешивание степени r, если для любых ограниченных измеримых функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$ и любой последовательности (9), *удовлетворяющей условию* (10), *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i,\ 1\right) = \prod_{i=0}^{r}(f_i,\ 1). \tag{12}$$

Действительно, если f_i есть характеристическая функция множества X_i, то соотношение (12) есть просто другая запись соотношения (11). Переход к произвольным ограниченным измеримым функциям совершается путем их равномерной аппроксимации линейными комбинациями характеристических функций.

Точный эндоморфизм есть перемешивание всех степеней.

Доказательство. Достаточно доказать, что соотношение (12) имеет место для произвольных ограниченных измеримых функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$ и любой последовательности (9), удовлетворяющей, кроме условия (10), дополнительному условию

$$k_n^0 < k_n^1 < \ldots < k_n^r \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Предположим сначала, что $(f_0, 1) = 0$. Мы имеем:

$$\left(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i,\ 1\right) = (f_0,\ g_n),$$

где g_n — функция, комплексно сопряженная с произведением

$$\prod_{i=1}^{r} U^{k_n^i - k_n^0} f_i.$$

Нужно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (f_0,\ g_n) = 0. \tag{13}$$

Так как $k_n^1 - k_n^0 < k_n^2 - k_n^0 < \ldots < k_n^r - k_n^0$, то g_n лежит в подпространстве

$$U_T^{k_n^1 - k_n^0} L_2.$$

Пусть P_n — оператор проектирования на это подпространство. Очевидно,

$$|(f_0,\ g_n)| = |(P_n f_0,\ g_n)| \leqslant \|P_n f_0\| \cdot \|g_n\|. \tag{14}$$

Из условия (8) и соотношений

$$\lim_{n\to\infty} (k_n^1 - k_n^0) = \infty, \quad (f_0,\ 1) = 0$$

получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n f_0\| = 0. \tag{15}$$

Из ограниченности функций $f_1, \ldots, f_r$ выводим:

$$\|g_n\| \leqslant l = \text{const}. \tag{16}$$

Из (14), (15) и (16) следует (13).

Пусть теперь f_0 — произвольная ограниченная измеримая функция. Соотношение (12) доказывается индукцией по r. Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(\prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\Bigr) = \prod_{i=1}^{r} (f_i, 1), \tag{17}$$

и докажем (12). Так как при $r = 0$ соотношение (12) тривиально, то этим теорема будет доказана.

Мы имеем:

$$\Bigl(\prod_{i=0}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\Bigr) = \Bigl(U_T^{k_n^0} f_0' \cdot \prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\Bigr) + (f_0, 1)\Bigl(\prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\Bigr), \tag{18}$$

где $f_0' = f_0 - (f_0, 1)$. Так как $(f_0', 1) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(U_T^{k_n^0} f_0' \cdot \prod_{i=1}^{r} U_T^{k_n^i} f_i, 1\Bigr) = 0. \tag{19}$$

Из (18), (19) и (17) следует (12).

2.7. Ф у н к ц и я $h(T, \xi)$. Этот и следующий пункт посвящены новому важному понятию: энтропии эндоморфизма. Для автоморфизмов энтропия была определена в недавних работах А. Н. Колмогорова ([9]) и Я. Г. Синая ([10]). На эндоморфизмы ее определение и основные свойства переносятся без труда. Это и делается ниже. Изложение следует моей заметке ([6]).

Положим для $\xi \in Z$

$$\xi_T = \prod_{k=0}^{\infty} T^{-k} \xi,$$

$$\xi_T^0 = \nu, \quad \xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^{-k} \xi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\xi_T^n) = H(\xi_T / T^{-1} \xi_T). \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\xi_T^1 \leqslant \xi_T^2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=0}^{\infty} \xi_T^n = \xi_T, \tag{21}$$

то

$$T^{-1} \xi_T^1 \leqslant T^{-1} \xi_T^2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} T^{-1} \xi_T^n = T^{-1} \xi_T,$$

и, согласно п.1.6,

$$\lim_{n\to\infty} H(\xi/T^{-1}\xi_T^n) = H(\xi/T^{-1}\xi_T) = H(\xi_T/T^{-1}\xi_T). \tag{22}$$

С другой стороны,

$$\xi_T^k = \xi T^{-1}\xi_T^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

и потому

$$H(\xi_T^k) = H(T^{-1}\xi_T^{k-1}) + H(\xi/T^{-1}\xi_T^{k-1}).$$

Заменяя в этом равенстве $H(T^{-1}\xi_T^{k-1})$ на $H(\xi_T^{k-1})$ и беря среднее арифметическое значений обеих его частей при $k = 1, \ldots, n$, находим:

$$\frac{1}{n} H(\xi_T^n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(\xi/T^{-1}\xi_T^{k-1}). \tag{23}$$

В силу известной теоремы о средних арифметических, из (22) и (23) следует (20).

Число (20) обозначается через $h(T, \xi)$.

При фиксированном T функция $h(T, \xi)$ непрерывна по ξ (на Z); для любых $\xi \in Z$, $\eta \in Z$

$$|h(T, \eta) - h(T, \xi)| \leqslant \rho(\xi, \eta). \tag{24}$$

Доказательство. Так как

$$H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n) = H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) - H(\xi_T^n \mid \eta_T^n),$$

то

$$|H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n)| \leqslant H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) + H(\xi_T^n \mid \eta_T^n). \tag{25}$$

Но

$$H(\xi_T^n \mid \eta_T^n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi \mid \eta_T^n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} H(T^{-k}\xi \mid T^{-k}\eta) = nH(\xi \mid \eta) \tag{26}$$

и, аналогично,

$$H(\eta_T^n \mid \xi_T^n) \leqslant nH(\eta \mid \xi). \tag{27}$$

Из (25), (26) и (27) следует:

$$|H(\eta_T^n) - H(\xi_T^n)| \leqslant n\rho(\xi, \eta).$$

Деля обе части этого неравенства на n и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем (24).

Если $\eta \leqslant \xi_T$, *то* $h(T, \eta) \leqslant h(T, \xi)$.

Доказательство. Согласно п. 1.7, из соотношений (21) следует, что множество разбиений η таких, что $\eta \leqslant \xi_T^m$ хотя бы при одном m, плотно в множестве измеримых разбиений η таких, что $\eta \leqslant \xi_T$. Поэтому неравенство

$$h(T, \eta) \leqslant h(T, \xi)$$

достаточно доказать в предположении, что, при некотором m, $\eta \leqslant \xi_T^m$. Мы имеем:

$$\eta_T^n \leqslant (\xi_T^m)_T^n = \xi_T^{m+n-1}, \quad H(\eta_T^n) \leqslant H(\xi_T^{m+n-1}).$$

Деля обе части последнего неравенства на n и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$h(T, \eta) \leqslant H(T, \xi).$$

Если T есть точный эндоморфизм, то $h(T, \xi) > 0$ при $\xi \neq \nu \bmod 0$.

Доказательство. Так как $h(T, \xi) = H(\xi_T \mid T^{-1} \xi_T)$, то неравенство

$$h(T, \xi) > 0$$

эквивалентно неравенству

$$T^{-1} \xi_T \neq \xi_T \bmod 0.$$

Предположим, что

$$T^{-1} \xi_T = \xi_T \bmod 0.$$

Тогда

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \xi_T = \xi_T \bmod 0$$

и

$$\xi \leqslant \xi_T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \xi_T \leqslant \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n} \varepsilon = \nu \bmod 0,$$

т. е. $\xi = \nu \bmod 0$.

2.8. Энтропия эндоморфизма. Положим

$$h(T) = \sup h(T, \xi), \quad \xi \in Z.$$

$h(T)$ называется *энтропией эндоморфизма T*.

Имеет место неравенство:

$$h(T) \geqslant H(\varepsilon \mid T^{-1} \varepsilon). \tag{28}$$

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность разбиений из Z такая, что

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \xi_n = \varepsilon.$$

Так как $(\xi_n)_T \leqslant \varepsilon$, то

$$T^{-1} (\xi_n)_T \leqslant T^{-1} \varepsilon,$$

и потому

$$H((\xi_n)_T \mid T^{-1} (\xi_n)_T) \geqslant H(\xi_n \mid T^{-1} \varepsilon).$$

Правая часть этого неравенства сходится при $n \to \infty$ к $H(\varepsilon \mid T^{-1} \varepsilon)$ (см. п. 1.6), левая — равна $h(T, \xi_n)$ и потому не превышает $h(T)$.

Если $h(T) = 0$, то T есть автоморфизм или автоморфизм по модулю нуль.

Действительно, если $h(T) = 0$, то $H(\varepsilon \mid T^{-1} \varepsilon) = 0$ и $T^{-1} \varepsilon = \varepsilon \bmod 0$.

В соотношении (28) может иметь место как равенство, так и строгое неравенство. Если, например, T есть автоморфизм с положительной энтропией, то имеет место строгое неравенство. Существуют и точные эндоморфизмы, для которых имеет место строгое неравенство. Нижесле-

дующая теорема дает условие, достаточное для того, чтобы имело место равенство.

Назовем конечное или счетное измеримое разбиение ξ *образующей* относительно эндоморфизма T, если

$$\prod_{n=0}^{\infty} T^{-n}\xi = \varepsilon.$$

Если образующая ξ принадлежит к Z, то, согласно результатам предыдущего пункта, $h(T, \xi) \geqslant h(T, \eta)$ для всякого разбиения $\eta \in Z$, т. е. $h(T, \xi) = h(T)$. С другой стороны, в этом случае

$$h(T, \xi) = H(\xi_T \mid T^{-1}\xi_T) = H(\varepsilon \mid T^{-1}\varepsilon).$$

Следовательно, *если эндоморфизм T обладает образующей $\xi \in Z$, то*

$$h(T) = h(T, \xi) = H(\varepsilon \mid T^{-1}\varepsilon). \tag{29}$$

2.9. Примеры: эндоморфизмы компактных коммутативных групп. Примем за M компактную коммутативную группу G со счетной топологической базой и за μ — инвариантную меру в G. В силу единственности инвариантной меры, всякий эндоморфизм T топологической группы G на всю группу G является эндоморфизмом в смысле теории меры.

Пусть G^* — (дискретная) группа характеров группы G и T^* — эндоморфизм группы G^*, сопряженный с T. Так как $TG = G$, то эндоморфизм T^* взаимно однозначен. Как доказано в моей работе ([8]), эндоморфизм T эргодичен в том и только в том случае, если эндоморфизм T^* апериодичен, т. е. если для всякого элемента $x^* \in G^*$, отличного от нуля, все элементы $(T^*)^n x^*$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, различны. Ясно, что T в том и только в том случае есть автоморфизм, если T^* есть автоморфизм. Нетрудно показать, что эндоморфизм T точен в том и только в том случае, если пересечение

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} (T^*)^n G^*$$

есть нулевая подгруппа группы G^*.

Чтобы дать пример вычисления энтропии, примем за G двумерный тор. Относительно заданной системы циклических координат в G эндоморфизм T представляется невырожденной целочисленной матрицей второго порядка. Пусть δ — определитель этой матрицы. Если $\delta = \pm 1$, то T есть автоморфизм; его энтропия вычислена Синаем ([10]). Если $|\delta| > 1$, то T есть точный эндоморфизм. Если оба собственных значения матрицы больше единицы по абсолютной величине, то эндоморфизм T обладает образующей и

$$h(T) = H(\varepsilon \mid T^{-1}\varepsilon) = \lg |\delta|^* .$$

---

* Примечание при корректуре. В моей обзорной статье ([14]), где также приведена формула $h(T) = \lg|\delta|$, ошибочно пропущено требование, чтобы оба собственных значения матрицы были больше единицы по абсолютной величине.

§ 3. Естественное расширение эндоморфизма

3.1. Существование и единственность естественного расширения. Разбиение ζ пространства M называется *инвариантным* относительно эндоморфизма T, если $T^{-1}\zeta \leqslant \zeta$. Если оно измеримо, то T индуцирует в фактор-пространстве M/ζ некоторый эндоморфизм T_ζ, называемый *фактор-эндоморфизмом* эндоморфизма T по ζ.

Очевидно, что фактор-эндоморфизм неприводимого эндоморфизма есть неприводимый эндоморфизм; фактор-эндоморфизм перемешивания степени r есть перемешивание степени r; фактор-эндоморфизм точного эндоморфизма есть точный эндоморфизм; энтропия $h(T_\zeta)$ фактор-эндоморфизма T_ζ не превосходит энтропии $h(T)$ эндоморфизма T.

Если T есть автоморфизм, то инвариантные разбиения могут быть охарактеризованы соотношением $T\zeta \geqslant \zeta$. В этом случае

$$\ldots \leqslant T^{-2}\zeta \leqslant T^{-1}\zeta \leqslant \zeta \leqslant T\zeta \leqslant T^2\zeta \leqslant \ldots .$$

Измеримое инвариантное разбиение ζ называется *исчерпывающим* относительно автоморфизма T, если

$$\prod_{n=0}^{\infty} T^n \zeta = \varepsilon \bmod 0$$

(т. е. если $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M}$). В этом случае автоморфизм T называется *естественным расширением* эндоморфизма T_ζ. Более общим образом мы будем называть автоморфизм T естественным расширением всякого эндоморфизма, изоморфного фактор-эндоморфизму автоморфизма T по исчерпывающему разбиению.

Всякий эндоморфизм обладает естественным расширением. Это расширение единственно с точностью до изоморфизма по модулю нуль.

Доказательство единственности. Пусть T_ζ — фактор-эндоморфизм автоморфизма T пространства M по исчерпывающему разбиению ζ и $\overline{T}_{\overline{\zeta}}$ —фактор-эндоморфизм автоморфизма $\overline{T}$ пространства $\overline{M}$ по исчерпывающему разбиению $\overline{\zeta}$. Предположим, что фактор-пространства M/ζ и $\overline{M}/\overline{\zeta}$ связаны изоморфизмом, переводящим T_ζ в $\overline{T}_{\overline{\zeta}}$, и построим по нему изоморфизм расширений. Пусть $\{B_\alpha;\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ — какой-нибудь базис в M/ζ и $\{\overline{B}_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ — соответствующий базис в $\overline{M}/\overline{\zeta}$. Очевидно, что системы множеств

$$\{T^n H_\zeta^{-1} B_\alpha;\ \ \alpha \in \mathrm{A},\ \ n = 0, 1, \ldots\}, \qquad \{\overline{T}^n H_{\overline{\zeta}}^{-1} \overline{B}_\alpha;\ \ \alpha \in \mathrm{A},\ \ n = 0, 1, \ldots\},$$

где H_ζ и $H_{\overline{\zeta}}$ — гомоморфизмы, определенные в п. 1.4, представляют собою базисы пространств M и $\overline{M}$.

Естественное соответствие между элементами этих базисов определяет изоморфное mod 0 отображение пространства M на пространство $\overline{M}$ (см. п. 1.2), переводящее T в $\overline{T}$ и ζ в $\overline{\zeta}$ и индуцирующее заданный изоморфизм между M/ζ и $\overline{M}/\overline{\zeta}$.

Доказательство существования: конструкция естественного расширения заданного эндоморфизма T пространства M. Пусть M' — множество последовательностей

$$(x_0, x_1, \ldots), \quad x_n \in M,$$

таких, что

$$Tx_{n+1} = x_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Обозначим для заданного множества $X \subset M$ через X_n' множество тех последовательностей $(x_0, x_1, \ldots) \in M'$, у которых $x_n \in X$, и через K_n — совокупность множеств X_n', отвечающих всевозможным измеримым множествам $X \subset M$. Ясно, что

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$$

и что

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

есть тело множеств. Определим на K функцию μ' формулой

$$\mu'(X_n') = \mu(X)$$

и продолжим эту функцию в меру Лебега. Тогда M' станет пространством Лебега и преобразование T', определяемое формулой

$$T'(x_0, x_1, \ldots) = (Tx_0, x_0, x_1, \ldots),$$

будет автоморфизмом пространства M'.

Обозначим через ζ разбиение пространства M', определяемое условием: последовательности $(x_0, x_1, \ldots)$ и $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots)$ принадлежат к одному элементу разбиения ζ, если $x_0 = \bar{x}_0$. Нетрудно проверить, что ζ есть исчерпывающее разбиение. Соответствующий фактор-эндоморфизм T_ζ' изоморфен эндоморфизму T — изоморфизм между T_ζ' и T устанавливается естественным изоморфизмом между M'/ζ и M.

3.2. Спектр естественного расширения. Пусть U — унитарный оператор, определенный в унитарном пространстве H.

Говорят, что U имеет *простой лебеговский спектр*, если в H существует бесконечная в обе стороны полная нормированная ортогональная последовательность

$$\ldots, f^{-2}, f^{-1}, f^0, f^1, f^2, \ldots$$

такая, что

$$Uf^n = f^{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Далее, говорят, что U имеет *однородный лебеговский спектр кратности* a, если H можно разложить в ортогональную сумму a инвариантных подпространств, в каждом из которых U имеет простой лебеговский спектр. Число a (конечное или бесконечное) не зависит от выбора указанного разложения.

Пусть $\overline{H}$ — подпространство пространства H, инвариантное относительно U, и $\overline{U}$ — оператор, индуцированный оператором U в $\overline{H}$. Если $U\overline{H} = \overline{H}$, то $\overline{U}$ есть унитарный оператор, если $U\overline{H}$ есть правильная часть

$\overline{H}$, то $\overline{U}$ есть полуунитарный оператор. В последнем случае имеют место строгие включения

$$\overline{H} \subset U^{-1}\overline{H} \subset U^{-2}\overline{H} \subset \ldots .$$

Если

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\,\overline{H} = H, \tag{30}$$

то оператор U называется *естественным расширением* оператора $\overline{U}$.

Согласно п. 2.4, $\overline{U}$ разлагается в ортогональную сумму своей унитарной части, определенной в подпространстве

$$\overline{H}^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} U^n\,\overline{H},$$

и однородной части, определенной в подпространстве

$$\overline{H}^1 = \overline{H} \ominus \overline{H}^0.$$

Применяя к равенству $\overline{H} = \overline{H}^0 \oplus H^1$ соотношение (30), мы находим:

$$H = \overline{H}^0 \oplus \bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\,\overline{H}^1,$$

т. е. расширение оператора $\overline{U}$ до оператора U сводится к расширению однородной части оператора $\overline{U}$. Последнее расширение можно описать следующим образом. Разложим подпространство $\overline{H}^1$ в ортогональную сумму инвариантных подпространств $\overline{H}^1_\alpha$, в каждом из которых U есть элементарный полуунитарный оператор, и пусть $f^0_n, f^1_\alpha, \ldots$ — полная нормированная ортогональная последовательность в $\overline{H}^1_\alpha$ такая, что

$$Uf^n_\alpha = f^{n+1}_\alpha, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Если дополнить последовательность $f^0_\alpha, f^1_\alpha, \ldots$ последовательностью

$$f^{-1}_\alpha = U^{-1}f^0_\alpha, \quad f^{-2}_\alpha = U^{-2}f^0_\alpha, \ldots,$$

то получится бесконечная в обе стороны последовательность

$$\ldots, f^{-2}_\alpha, f^{-1}_\alpha, f^0_\alpha, f^1_\alpha, f^2_\alpha, \ldots,$$

служащая полной нормированной ортогональной системой в подпространстве

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\,\overline{H}^1_\alpha$$

и удовлетворяющая соотношениям:

$$Uf^n_\alpha = f^{n+1}_\alpha, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Следовательно, U имеет в этом подпространстве простой лебеговский спектр, а в подпространстве

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\,\overline{H}^1,$$

которое является ортогональной суммой подпространств

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U^{-n}\overline{H}_{\alpha}^{1},$$

— однородный лебеговский спектр, кратность которого равна числу подпространств $\overline{H}_{\alpha}^{1}$. Таким образом, получаем:

Естественное расширение U полуунитарного оператора $\overline{U}$ распадается в ортогональную сумму унитарной части оператора $\overline{U}$ и унитарного оператора с однородным лебеговским спектром, кратность которого равна кратности спектра однородной части оператора $\overline{U}$.

Пусть T_{ζ} — фактор-эндоморфизм автоморфизма T (см. п. 3.1). Очевидно, что подпространство $L_2(\zeta)$ пространства L_2 инвариантно относительно оператора U_T. Если T есть естественное расширение эндомор физма T_{ζ}, то

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} U_T^{-n} L_2(\zeta) = \bigvee_{n=0}^{\infty} L_2(T^n\zeta) = L_2\left(\prod_{n=0}^{\infty} T^n \zeta\right) = L_2(\varepsilon) = L_2.$$

С другой стороны, $L_2(\zeta)$ можно рассматривать как унитарное пространство всех функций с интегрируемым квадратом модуля на M/ζ, а оператор, индуцированный оператором U_T в $L_2(\zeta)$, — как оператор $U_{T_{\zeta}}$, сопряженный с T_{ζ}. Следовательно, *если T есть естественное расширение эндоморфизма T_{ζ}, то U_T есть естественное расширение оператора $U_{T_{\zeta}}$.*

Сопоставляя эту теорему с предыдущей, мы получаем:

Унитарный оператор U_T, сопряженный с естественным расширением T эндоморфизма T_{ζ}, распадается в ортогональную сумму унитарной части оператора $U_{T_{\zeta}}$, сопряженного с T_{ζ}, и оператора с однородным лебеговским спектром, кратность которого равна кратности спектра однородной части оператора $U_{T_{\zeta}}$ (т. е. 0 или ∞).

3.3. Свойства естественного расширения.

1°. *Естественное расширение эргодического эндоморфизма есть эргодический автоморфизм.*

2°. *Естественное расширение перемешивания степени r есть перемешивание степени r.*

3°. *Энтропия эндоморфизма равна энтропии его естественного расширения.*

Утверждение 1° есть непосредственное следствие результатов п. 3.2. Докажем утверждение 2°. Пусть T — автоморфизм пространства M, ζ — исчерпывающее разбиение и T_{ζ} — перемешивание степени r. Какова бы ни была последовательность комплексов

$$\Delta_1^r = (k_1^0, \ldots, k_1^r), \quad \Delta_2^r = (k_2^0, \ldots, k_2^r), \ldots,$$

удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} I(\Delta_n^r) = \infty,$$

для любых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_r$ из $\mathfrak{M}(\zeta)$ справедливо соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{i=0}^{r} T^{-k_n^i} X_i\right) = \prod_{i=0}^{r} \mu(X_i).$$

Следовательно, это соотношение справедливо также для любых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_r$ из $T^m\mathfrak{M}(\zeta)$, $m = 1, 2, \ldots$, а так как

$$\bigvee_{m=0}^{\infty} T^m \mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M},$$

то оно справедливо и для любых множеств $X_0, X_1, \ldots, X_r$ из $\mathfrak{M}$, т. е. T есть перемешивание степени r.

Докажем утверждение 3°. Пусть опять T — автоморфизм пространства M и ζ — исчерпывающее разбиение. Найдем для заданного положительного δ такое разбиение $\xi \in Z$, что $h(T, \xi) > h(T) - \delta$, и такие n и $\eta \leqslant T^n\zeta$, что $\rho(\xi, \eta) < \delta$ (см. п. 1.7). Согласно п. 2.7,

$$h(T, \xi) - h(T, \eta) < \delta.$$

Ясно, что фактор-эндоморфизм $T_n = T_{T^n_\zeta}$ автоморфизма T по разбиению $T^n\zeta$ изоморфен T_ζ. Следовательно,

$$h(T_\zeta) = h(T_n) \geqslant h(T, \eta) > h(T, \xi) - \delta > h(T) - 2\delta.$$

Так как δ произвольно, то $h(T_\zeta) = h(T)$.

3.4. Автоморфизмы Колмогорова. Автоморфизм T пространства M называется *автоморфизмом Колмогорова*, если существует такое инвариантное измеримое разбиение ζ, что

$$\prod_{n=-\infty}^{\infty} T^n \zeta = \varepsilon, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n\zeta = \nu,$$

т. е.

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{M}, \quad \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathfrak{M}(\zeta) = \mathfrak{N}.$$

Эти автоморфизмы были введены Колмогоровым в работе ([1]). Там они назывались «квазирегулярными».

Нижеследующие предложения являются непосредственными следствиями предыдущих определений и теорем.

Естественное расширение эндоморфизма в том и только в том случае есть автоморфизм Колмогорова, если эндоморфизм точен. Всякий автоморфизм Колмогорова есть естественное расширение точного эндоморфизма.

Автоморфизм Колмогорова есть перемешивание всех степеней.

Оператор U_T, сопряженный с автоморфизмом Колмогорова, имеет в ортогональном дополнении одномерного подпространства постоянных счетнократный однородный лебеговский спектр.

Энтропия автоморфизма Колмогорова положительна.

Две последние теоремы принадлежат Колмогорову.

§ 4. Теоретико-числовые эндоморфизмы

4.1. Теорема Реньи. Пусть φ — действительная функция, определенная на интервале $0 < x < 1$. Положим

$$Tx = (\varphi(x)),$$

где (c) — дробная часть числа c. Если $Tx \neq 0$, то в точке x определено отображение T^2, если и $T^2x \neq 0$, то в точке x определено отображение T^3, и т. д. Обозначим через M множество тех точек интервала $(0, 1)$, в которых определены все степени отображения T. Очевидно, что T отображает M в M. Следующая проблема изучалась по отношению как к конкретным функциям φ, так и к целым классам функций φ: существует ли на M такая мера μ, эквивалентная обычной мере Лебега m, что T есть эргодический эндоморфизм пространства M с мерой μ?

С этой проблемой связан другой, более элементарный вопрос. Положим для $x \in M$

$$a_n(x) = [\varphi(T^n x)] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $[c]$ — целая часть числа c; определяется ли число x последовательностью целых чисел $a_1(x)$, $a_2(x)$, ...?

Ясно, что $a_n(Tx) = a_{n+1}(x)$. Следовательно, если обе проблемы имеют положительное решение, то эндоморфизм T можно рассматривать как сдвиг в пространстве целочисленных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$, переводящий последовательность $(a_1, a_2, \ldots)$ в последовательность $(a_2, a_3, \ldots)$. Мера μ должна быть, конечно, перенесена в пространство. последовательностей из M. Если заменить односторонние последовательности $(a_1, a_2, \ldots)$ двусторонними последовательностями $(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots)$, то эндоморфизм T превратится в свое естественное расширение.

В качестве классических примеров рассмотрим функцию $\varphi(x) = rx$, где r — целое число, большее 1, и функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. В первом примере M есть множество r-ично иррациональных чисел интервала $(0, 1)$ и $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... есть разложение числа x в r-ичную дробь. Мера μ существует и совпадает с m. Во втором примере M есть множество иррациональных чисел интервала $(0, 1)$ и $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... есть разложение числа x в цепную дробь. Мера μ существует и определяется формулой

$$\mu(X) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_X \frac{dx}{1+x},$$

где X — произвольное измеримое множество в M [см. ([11])].

Наиболее полные результаты, относящиеся к обеим проблемам, содержатся в работе Реньи ([2]). Реньи предполагает, что функция φ удовлетворяет одному из двух условий:

(A) φ непрерывна и строго убывает от предельного значения $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$, равного либо $+\infty$, либо целому числу, большему двух, до предельного значения $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = 1$. При $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geqslant x_2 - x_1,$$

а при $x_1 > x_2 > \varphi^{-1}(1 + \varphi^{-1}(2))$ — более сильное неравенство

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \geqslant \lambda(x_2 - x_1), \quad \lambda > 1.$$

(B) φ непрерывна и строго возрастает от предельного значения $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$ до предельного значения $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x)$. равного либо $+\infty$, либо

целому числу, большему 1. При $x_1 < x_2$ имеет место неравенство

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > x_2 - x_1.$$

Обозначим через ξ разбиение интервала $(0, 1)$ на частичные интервалы, производимое точками $\varphi^{-1}(s)$, $s = 1, 2, \ldots$, и положим, как в п. 2.7,

$$\xi_T^n = \prod_{k=0}^{n-1} T^{-k} \xi.$$

ξ_T^n опять-таки есть разбиение интервала $(0, 1)$ на частичные интервалы. Они называются *интервалами ранга* n и могут быть охарактеризованы как множества постоянства функций $a_1(x), \ldots, a_n(x)$. Отображение T^n определено на интервалах ранга $n - 1$, но не определено на их концах. Чтобы получить множество M, нужно удалить из интервала $(0, 1)$ концы всех интервалов всех рангов. Так как этих концов всего лишь счетное число, то в метрических вопросах можно пренебречь различием между множеством M и интервалом $(0, 1)$.

Ясно, что T^n непрерывно и строго монотонно отображает каждый интервал Δ ранга n на интервал $(0, 1)$. Обозначим через f_Δ обратное отображение интервала $(0, 1)$ на Δ. Как в случае (A), так и в случае (B), для любых двух точек $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$ справедливо неравенство

$$|T^n x_1 - T^n x_2| \geqslant |x_1 - x_2|.$$

Следовательно, функция f_Δ удовлетворяет условию Липшица. В частности, она абсолютно непрерывна.

Положим

$$l(\Delta) = \operatorname{vrai}\min_{0<t<1} |f'_\Delta(t)|, \qquad L(\Delta) = \operatorname{vrai}\max_{0<t<1} |f'_\Delta(t)|.$$

В дополнение к условию (A) или (B) Реньи налагает на функцию φ следующее ограничение:

(C) $L(\Delta) \leqslant Cl(\Delta)$, где C — постоянная, одна и та же для всех интервалов всех рангов.

ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ [см. ([12]), ([13]), ([2])]. *Если φ удовлетворяет условию* (A) *или* (B), *то число $x \in M$ однозначно определяется последовательностью целых чисел $a_1(x), a_2(x), \ldots$.*

ТЕОРЕМА РЕНЬИ. *Если выполнены условия* (A), (C) *или* (B), (C), *то на интервале* $(0, 1)$ *существует такая измеримая функция p, что*

$$\frac{1}{C} \leqslant p(x) \leqslant C, \quad \int_0^1 p(x)\, dx = 1$$

и T есть эргодический эндоморфизм пространства M с мерой

$$\mu(X) = \int_X p(x)\, dx.$$

Эта функция единственна по модулю нуль.

Очевидно, что в условиях теоремы Реньи теорема о разложении эквивалентна утверждению, что ξ *есть образующая относительно* T. Оче-

видно также, что неравенство $\frac{1}{C} \leqslant p(x) \leqslant C$ эквивалентно неравенствам:

$$\mu(X) \leqslant Cm(X), \quad m(X) \leqslant C\mu(X), \tag{31}$$

где X — произвольное измеримое множество в интервале (0, 1).

4.2. Признак точности. В этом пункте T не предполагается теоретико-числовым эндоморфизмом и удовлетворяет лишь общим условиям п. 2.1.

Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная система множеств положительной меры в M такая, что суммы попарно не пересекающихся множеств $A \in \mathfrak{A}$ образуют в $\mathfrak{M}$ всюду плотное множество. Если существуют такая положительная целочисленная функция $n(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, и такое положительное число q, что $\mu(T^{n(A)}A) = 1$ $(A \in \mathfrak{A})$ и для всякого измеримого множества $X \subset A$ с измеримым образом $T^{n(A)}X$

$$\mu(T^{n(A)}X) \leqslant q\frac{\mu(X)}{\mu(A)}, \tag{32}$$

то T есть точный эндоморфизм.

Доказательство. Согласно п. 2.2, достаточно доказать, что для всякого измеримого множества Y положительной меры с измеримыми образами TY, T^2Y, ...

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^n Y) = 1. \tag{33}$$

Пусть δ — положительное число. Неравенство

$$\mu(YA) \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{q}\right)\mu(A)$$

не может иметь место для любого множества $A \in \mathfrak{A}$, так как иначе оно имело бы место для всякого вообще измеримого множества A и при $A = Y$ мы получили бы абсурдное неравенство

$$\mu(Y) \leqslant \left(1 - \frac{\delta}{q}\right)\mu(Y).$$

Следовательно, существует такое множество $B \in \mathfrak{A}$, что

$$\mu(YB) > \left(1 - \frac{\delta}{q}\right)\mu(B),$$

и мы имеем при $n = n(B)$:

$$\mu(T^n(B - YB)) \leqslant q\frac{\mu(B - YB)}{\mu(B)} = q\frac{\mu(B) - \mu(YB)}{\mu(B)} < \delta,$$
$$\mu(T^n Y) \geqslant \mu(T^n(YB)) \geqslant \mu(T^n B) - \mu(T^n(B - YB)) > 1 - \delta.$$

Так как последовательность $\mu(Y)$, $\mu(TY)$, $\mu(T^2Y)$, ... возрастает, то этим соотношение (33) доказано.

4.3. Теорема о точности. *В условиях теоремы Реньи T есть точный эндоморфизм.*

Доказательство основано на теореме п. 4.2. Примем за $\mathfrak{A}$ множество всех интервалов всех рангов и за $n(\Delta)$ — ранг интервала Δ. Так как ξ есть образующая относительно T, то суммы попарно не пересекающихся интервалов $\Delta \in \mathfrak{A}$ образуют в $\mathfrak{M}$ всюду плотное множество. Согласно п. 4.1,

$T^{n(\Delta)}$ отображает Δ на весь интервал (0, 1). Остается доказать, что существует число q, удовлетворяющее неравенству (32).

Так как функция f_Δ отображает интервал (0, 1) на Δ и абсолютно непрерывна, то

$$m(\Delta) = \int_0^1 |f'_\Delta(t)|\, dt \leqslant L(\Delta) \tag{34}$$

и для всякого множества $X \subset \Delta$ с измеримым образом $X' = T^{m(\Delta)} X$

$$m(X) = m(f_\Delta(X')) = \int_{X'} |f'_\Delta(t)|\, dt \geqslant l(\Delta)\, m(X'). \tag{35}$$

Из условия (C) и неравенств (34), (35) следует:

$$m(X') \leqslant C \frac{m(X)}{m(\Delta)}.$$

Заменяя в этом неравенстве меру m мерой μ с помощью неравенств (31), мы получаем:

$$\mu(T^{n(\Delta)} X) \leqslant C^4 \frac{\mu(X)}{\mu(\Delta)}.$$

Таким образом, можно положить $q = C^4$.

Пример: $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Как доказано в [2], эта функция удовлетворяет условиям теоремы Реньи. Следовательно, соответствующий эндоморфизм T точен. В частности, T есть перемешивание всех степеней — теорема, содержащая в себе известную теорему Гаусса — Кузьмина (без оценки остаточного члена) и ее многочисленные обобщения.

4.4. Теорема об энтропии. В этом пункте предполагается, что функция φ удовлетворяет условиям теоремы Реньи.

Обозначим через $\Delta_n(x)$ интервал ранга n, содержащий точку $x \in M$, и положим:

$$m_n(x) = m(\Delta_n(x)), \quad \mu_n(x) = \mu(\Delta_n(x)).$$

Разбиение ξ в том и только в том случае имеет конечную энтропию $H(\xi)$, если

$$\int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\, p(x)\, dx < \infty, \tag{36}$$

или, что то же самое, если

$$\int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\, dx < \infty \tag{37}$$

[см. неравенства (31)]. *При этом условии*

$$h(T) = h(T, \xi) = \int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\, p(x)\, dx$$

и почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{\mu_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{m_n(x)} = h(T).$$

Доказательство. Соотношение (37) эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{\Delta} \int_{\Delta} \lg |\varphi'(x)| dx, \tag{38}$$

где суммирование распространяется на интервалы Δ первого ранга. В силу неравенств (31), соотношение

$$H(\xi) = \sum_{\Delta} \mu(\Delta) \lg \frac{1}{\mu(\Delta)} < \infty$$

эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{\Delta} m(\Delta) \lg \frac{1}{m(\Delta)}. \tag{39}$$

Так как

$$m(\Delta) = \int_0^1 |f'_{\Delta}(t)| \, dt$$

ср. п. 4.3), то

$$l(\Delta) \leqslant m(\Delta) \leqslant L(\Delta), \quad m(\Delta) \lg \frac{1}{L(\Delta)} \leqslant m(\Delta) \lg \frac{1}{m(\Delta)} \leqslant m(\Delta) \lg \frac{1}{l(\Delta)}.$$

Так как для интервала Δ первого ранга

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'_{\Delta}(Tx)} \quad (x \in \Delta),$$

то

$$\frac{1}{L(\Delta)} \leqslant |\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{l(\Delta)} \quad (x \in \Delta),$$

$$m(\Delta) \lg \frac{1}{L(\Delta)} \leqslant \int_{\Delta} \lg |\varphi'(x)| \, dx \leqslant m(\Delta) \lg \frac{1}{l(\Delta)}.$$

Но

$$m(\Delta) \lg \frac{1}{l(\Delta)} - m(\Delta) \lg \frac{1}{L(\Delta)} = m(\Delta) \lg C,$$

так что ряды

$$\sum_{\Delta} m(\Delta) \lg \frac{1}{l(\Delta)}, \quad \sum_{\Delta} m(\Delta) \lg \frac{1}{L(\Delta)}$$

сходятся или расходятся одновременно. Следовательно, ряды (38), (39) также сходятся или расходятся одновременно, и условие $H(\xi) < \infty$ эквивалентно условиям (36), (37).

Пусть теперь условие (36) выполнено. Согласно теореме Макмиллана ([5]), последовательность функций $\frac{1}{n} \lg \frac{1}{\mu_n(x)}$ сходится по мере к $h(T, \xi)$. Так как ξ есть образующая, то

$$h(T, \xi) = h(T).$$

Поэтому достаточно доказать, что почти всюду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{\mu_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \lg \frac{1}{m_n(x)} = \int_0^1 \lg |\varphi'(x)| \, p(x) \, dx.$$

Положим

$$l_n(x) = l(\Delta_n(x)), \quad L_n(x) = L(\Delta_n(x)), \quad \psi_n(x) = f_{\Delta_n(x)}(T^n x).$$

Так как почти всюду

$$l_n(x) \leqslant |\psi_n(x)| \leqslant L_n(x), \quad l_n(x) \leqslant m_n(x) \leqslant L_n(x),$$

то почти всюду

$$\left|\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|}\right| \leqslant \frac{1}{n}\lg\frac{1}{l_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{L_n(x)} \leqslant \frac{1}{n}\lg C$$

и почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|}\right] = 0.$$

Но $\frac{1}{\psi_n(x)}$ есть производная функции T^n в точке x. Следовательно,

$$\frac{1}{\psi_n(x)} = \varphi'(x)\,\varphi'(Tx)\,\ldots\,\varphi'(T^{n-1}x)$$

$$\frac{1}{n}\lg\frac{1}{|\psi_n(x)|} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\lg|\varphi'(T^k x)|.$$

Согласно эргодической теореме, это среднее почти всюду сходится к интегралу (36). Значит, почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} = \int_0^1 \lg|\varphi'(x)|\,p(x)\,dx,$$

и остается заметить, что, в силу неравенств (31),

$$\left|\frac{1}{n}\lg\frac{1}{\mu_n(x)} - \frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)}\right| \leqslant \frac{1}{n}\lg C.$$

Пример. $\varphi(x) = \frac{1}{x}$. Здесь

$$p(x) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{1+x}$$

(см. п. 4.1). Следовательно,

$$h(T) = \int_0^1 \lg\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{(1+x)\ln 2} = -\frac{2}{(\ln 2)^2}\int_0^1\frac{\ln x\,dx}{1+x} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^2},$$

так что почти всюду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg\frac{1}{m_n(x)} = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{(\ln 2)^2}. \tag{40}$$

Это соотношение известно в метрической теории цепных дробей в несколько иной форме, а именно:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{q_n(x)} = e^{\frac{\pi^2}{12\ln 2}}, \tag{41}$$

где $q_n(x)$ — знаменатель n-й подходящей дроби числа x. Эквивалентность соотношений (40) и (41) следует из формулы

$$m_n(x) = \frac{1}{q_n(x)\,[q_n(x) + q_{n-1}(x)]}.$$

4.5. Функция $\varphi(x) = \beta x$, $\beta > 1$. Эта функция при нецелом β не удовлетворяет условиям п. 4.1. Тем не менее, как доказано в работе Реньи, для нее справедливы обе теоремы п. 4.1, притом вторая теорема с $C = \frac{\beta}{\beta - 1}$.

Разбиение ξ, отвечающее функции $\varphi(x) = \beta x$, производится точками $\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots, \frac{[\beta]}{\beta}$ и является образующей. Разбиение ξ_T^n с $n > 1$ получается из разбиения ξ_T^{n-1} путем подразделения каждого интервала (x_1, x_2) разбиения ξ_T^{n-1} точками

$$x_1 + \frac{k}{\beta^n}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Эндоморфизм T^n линейно, с коэффициентом β^n, отображает каждый интервал разбиения ξ_T^n в интервал $(0, 1)$. На весь интервал $(0, 1)$ отображаются, естественно, только те интервалы разбиения ξ_T^n, которые имеют длину $\frac{1}{\beta^n}$. Совокупность этих интервалов мы обозначим через $\mathfrak{A}_n$.

T есть точный эндоморфизм.

Доказательство опять основано на теореме п. 4.2. Положим $\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ и $n(\Delta) = n$, если $\Delta \in \mathfrak{A}_n$. Ясно, что суммы попарно не пересекающихся интервалов $\Delta \in \mathfrak{A}$ образуют в $\mathfrak{M}$ всюду плотное множество. Для всякого измеримого множества $X \subset \Delta$

$$m(T^{n(\Delta)}X) = \beta^n m(X) = \frac{m(X)}{m(\Delta)}.$$

Следовательно,

$$\mu(T^{n(\Delta)}X) \leqslant C^3 \frac{\mu(X)}{\mu(\Delta)},$$

и можно положить $q = C^3$.

Энтропия эндоморфизма T проще всего вычисляется по формуле (29). Конечно, предварительно нужно найти функцию p. Если, например, $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то

$$p(x) = \begin{cases} \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}, & \text{если } 0 < x < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \\ \frac{5 + \sqrt{5}}{10}, & \text{если } \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

[см. ([3])], и формула (29) дает:

$$h(T) = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Поступило
16.XII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 5 (1958), 861—864.

[2] Renyi A., Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta math. Acad. sci. hungar., 8 (1957), 477—493.

[3] Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Матем. сборн., 25(67): 1 (1949), 107—150.

[4] Хинчин А. Я., Понятие энтропии в теории вероятностей, Успехи матем. наук, 8, вып. 3 (1953), 3—20.

[5] Хинчин А. Я., Об основных теоремах теории информации, Успехи матем. наук, 11, вып. 1 (1956), 17—75.

[6] Рохлин В. А., Об энтропии метрического автоморфизма, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 5 (1959), 980—983.

[7] Плеснер А. И., О полуунитарных операторах, Доклады Ак. наук СССР, 25, № 9 (1939), 708—710.

[8] Рохлин В. А., Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 13 (1949), 329—340.

[9] Колмогоров А. Н., Об энтропии на единицу времени, как метрическом инварианте автоморфизма, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 4 (1959), 754—755.

[10] Синай Я. Г., Об энтропии динамической системы, Доклады Ак. наук СССР, 124 № 4 (1959), 768—771.

[11] Ryll-Nardzewski C., On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions, Studia Math., 12 (1951), 74—79.

[12] Bissinger B. H., A generalisation of continued fractions, Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), 868—876.

[13] Everett C. J., Representations for real numbers, Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 861—869.

[14] Рохлин В. А., Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, Успехи матем. наук, XV, вып. 4(94) (1960), 3—26.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 531—542

К. И. БАБЕНКО

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

В работе устанавливается, что известное неравенство Титчмарша в теории интегралов Фурье не является точным. Приводится точное неравенство и дается его доказательство для некоторых показателей.

Хорошо известна классическая теорема Хаусдорфа—Юнга, согласно которой для всякой функции $f(x)$, периодической с периодом 2π и удовлетворяющей условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty, \quad 1 < p \leqslant 2,$$

справедливо соотношение

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1}$$

где c_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $q = \frac{p}{p-1}$.

Эта теорема была перенесена на интегралы Фурье Титчмаршем (1), и для интегралов Фурье имеет место неравенство Титчмарша:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

где

$$\tilde{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} \, dx$$

— преобразование Фурье функции $f(x)$ (при этом подразумевается, что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty$).

Харди и Литтльвуд показали, что соотношение (1) точное и знак равенства имеет место в том и только том случае, когда

$$f(x) = Ce^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots .$$

В случае преобразования Фурье соответствующее соотношение (2) не является точным.

В действительности справедливо следующее соотношение:

$$\left(\sqrt{\frac{q}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

Это соотношение в полном объеме мы доказать не можем и устанавливаем его только для случая, когда $q = 2l$, l — целое.

Мы не будем анализировать причин этого замечательного различия между рядом Фурье и интегралом Фурье, укажем только, что следствия, которые можно вывести из соотношения (3), в значительной мере разъясняют причину этого различия и вскрывают глубокие связи соотношения (3) с рядом различных неравенств, в частности с известным соотношением неопределенности квантовой механики.

Легко проверить, что знак равенства в соотношении (3) реализуется на функциях $f(x)$ вида

$$f(x) = e^{-ax^2+ibx}, \tag{4}$$

где $a > 0$ и b произвольно, причем некоторые соображения позволяют утверждать, что знак равенства в соотношении (3) имеет место только в том случае, когда $f(x)$ имеет вид (4). Этот факт будет нами использован при доказательстве соотношения (3).

Известные методы доказательства теорем Хаусдорфа — Юнга и Титчмарша оказываются неприменимыми для доказательства соотношения (3). Мощный метод М. Рисса, основанный на теореме выпуклости также приводит к неравенству (2). Ввиду этого мы строим доказательство на идеях, отличных от применявшихся ранее, причем существенной чертой нашего метода будет являться широкое применение целых функций.

Возьмем $q = 2l$, где l — натуральное, и введем в рассмотрение ядро

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2}-\frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\psi_n(x)\psi_n(y), \tag{5}$$

где t — количество, подчиненное условию $|t| < 1$, а $\psi_n(x)$ — нормированная функция Чебышева — Эрмита.

Рассмотрим оператор

$$K_t f \doteq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x, y; t)\, f(y)\, dy \tag{6}$$

и установим некоторые его простые свойства.

Если $g = K_t f$, то

$$\tilde{g} = K_{-it} f. \tag{7}$$

Далее, имеет место

ЛЕММА 1. *В любом пространстве $L^r(-\infty, \infty)$, $r > 1$, при действительном t оператор K_t вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $g = K_t f$, $f \in L^r(-\infty, \infty)$. Легко убедиться, что g можно записать в виде:

$$g(x) = K_t f = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left\{-\theta x^2 - \frac{1}{4\theta}\left(y - \frac{2tx}{1+t^2}\right)^2\right\} dy,$$

где

$$\theta = \frac{1-t^2}{2(1+t^2)}.$$

Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получаем:

$$|g(x)| \leqslant Ce^{-\theta x^2} \|f\|_r, \tag{8}$$

$$|g'(x)| \leqslant C(1+|x|)e^{-\theta x^2} \|f\|_r, \tag{9}$$

где C — константа, зависящая только от t, а

$$\|f\|_r = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Последнее обозначение мы будем применять и ниже. Из неравенств (8) и (9) следует, что если множество $\{f_n\}$ ограничено в L^r, то соответствующее множество $\{g_n\}$ компактно в $C(-\infty, \infty)$, а в силу оценки (8) оно будет компактно и в L^r.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующую задачу на экстремум. Найдем

$$\sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \|g\|_q = \mu_t, \quad g = K_t f. \tag{10}$$

Используя свойства оператора K_t, легко доказать, что существует функция $f(x) \in L^p$, на которой достигается верхняя грань. Из неравенств (8) и (9) очевидно, что рассматриваемая верхняя грань конечна. Пусть последовательность f_n, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{g}_n\|_q = \mu_t$$

и

$$\|f_n\|_p = 1, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что f_n слабо сходится к f, ибо всякое ограниченное множество в L^p слабо компактно. Но тогда, в силу леммы 1, последовательность g_n сильно сходится к $g = K_t f$. Из неравенств (8) и (9) следует, что $\tilde{g}_n$ сильно сходится к $\tilde{g}$ в L^q. Поэтому

$$\|\tilde{g}\|_q = \mu_t \leqslant \mu_t \|f\|_p,$$

откуда получаем:

$$\|f\|_p \geqslant 1.$$

Но из (11) следует, что

$$\|f\|_p \leqslant 1.$$

Значит,

$$\|f\|_p = 1,$$

и функция f является экстремальной.

ЛЕММА 2. *Если на функции* $f(x) \in L^p$, $\|f\|_p = 1$, *реализуется верхняя грань в* (10), *то* f *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_t(|\widetilde{g}|^{q-2}\widetilde{g})\, e^{ixy} dy = \mu_t^q |f(x)|^{p-2} f(x), \tag{12}$$

где функция g *определена с помощью* (6).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon h(x),$$

где $h(x)$ — произвольная функция из L^p.

Пусть $g_\varepsilon = K_t f_\varepsilon$ и

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\|\widetilde{g}_\varepsilon\|_q}{\|f_\varepsilon\|_p}.$$

В силу построения, $\varphi(\varepsilon) \leqslant \varphi(0)$. Так как функция $\varphi(\varepsilon)$ дифференцируема, то $\varphi'(0) = 0$. Обозначив

$$\eta(x) = \widetilde{K}_t h,$$

мы после вычисления производной получим:

$$\varphi'(0) = \mu_t^{-q+1} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}|^{q-2} \operatorname{Re} \widetilde{g}\bar{\eta}\, dx - \mu_t \int_{-\infty}^{\infty} |f|^{p-2} \operatorname{Re} f\bar{h}\, dx.$$

Отсюда следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}|^{q-2} \operatorname{Re} \widetilde{g}\bar{\eta}\, dx - \mu_t^q \int_{-\infty}^{\infty} |f|^{p-2} \operatorname{Re} f\bar{h}\, dx = 0,$$

или

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}|^{q-2} \widetilde{g}\bar{\eta}\, dx - \mu_t^q \int_{-\infty}^{\infty} |f|^{p-2} f\bar{h}\, dx\right\} = 0.$$

Используя определение функции η, имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}|^{q-2}\, \widetilde{g}\bar{\eta}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(x)}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} K_t(|\widetilde{g}|^{q-2}\widetilde{g})\, dy.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K_t(|\widetilde{g}|^{q-2}\widetilde{g})\, e^{ixy} dy - \mu_t^q |f|^{p-2} f\right) \bar{h}\, dx\right\} = 0.$$

Так как h — произвольная функция, то отсюда следует формула (12).

Лемма доказана.

Из формулы (12) мы выведем важные для дальнейшего следствия. Предварительно заметим, что если $g = K_t f$, то, по формуле (7),

$$\widetilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+t^2)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left\{\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x+ity)^2}{1+t^2}\right\} dy.$$

Выполняя преобразование под знаком интеграла, получим:

$$\widetilde{g}(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp\{-\theta x^2 - \theta u^2 - i\tau x u\}\, du, \qquad (13)$$

где

$$\tau = \frac{2t}{1+t^2}.$$

В силу вышеизложенного, мы можем формулу (12) представить в следующем виде:

$$\mu_t^q\, |f(x)|^{p-2} f(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}(u)|^{q-2}\, \widetilde{g}(u) \exp\{-\theta x^2 - \theta u^2 + i\tau x u\}\, du. \qquad (14)$$

Из формул (13) и (14) следует, что $\widetilde{g}(x)$ и $|f(x)|^{p-2} f(x)$ являются целыми функциями второго порядка нормального типа. Для удобства дальнейших выкладок положим:

$$\varphi(x) = |f(x)|^{p-2} f(x),$$

$$\psi(x) = \widetilde{g}(x).$$

В этих обозначениях формулы (13) и (14) приобретают большую симметричность:

$$\mu_t^q \varphi(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|^{q-2} \psi(u) \exp(-\theta x^2 - \theta u^2 + i\tau x u)\, du, \qquad (15)$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)|^{q-2} \varphi(u) \exp(-\theta x^2 - \theta u^2 - i\tau x u)\, du. \qquad (16)$$

Рассматривая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, считая аргумент комплексным, мы, с помощью неравенства Гёльдера, получим следующую оценку:

$$\mu_t^q |\varphi(x+iy)| \leqslant \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\, \|\psi\|_q \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-q(\theta u^2 - \tau u y)} du\right)^{\frac{1}{q}} e^{-\theta(x^2-y^2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{q}}}\, \|\widetilde{g}\|_q\, e^{-\theta x^2 + \left(\theta + \frac{\tau^2}{4\theta}\right) y^2}.$$

Но $\|\tilde{g}\|_q = \mu_t$ и, следовательно,

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant \mu_t^{1-q} \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{q}}}\, e^{-\theta x^2+\left(\theta+\frac{\tau^2}{4\theta}\right) y^2}. \tag{17}$$

Проводя аналогичные выкладки для функции $\psi(x)$, получаем:

$$|\psi(x+iy)| \leqslant \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{q}}}\, e^{-\theta x^2+\left(\theta+\frac{\tau^2}{4\theta}\right) y^2}. \tag{18}$$

Оценки (17) и (18), нужные нам в дальнейшем, являются слишком грубыми. Точное представление о росте функций φ и ψ дают нижеследующие леммы 3 и 4.

Пусть A — положительный корень уравнения

$$A^2 + \frac{p\theta}{\tau} A - \frac{p}{4q} = 0, \tag{19}$$

и пусть $A_1 = \tau A + \theta$. Обозначим для удобства

$$\xi(x) = e^{A_1 x^2}\varphi(x),$$

$$\eta(x) = e^{A_1 x^2}\psi(x).$$

ЛЕММА 3. *Если* $\|f\|_p = 1$, *то целая функция* $\xi(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qA_1 v^2} |\xi(v+x+iy)|^q\, dv \leqslant 1,$$

$$-\infty < x,\ y < \infty.$$

Доказательство. Подставив в соотношения (15) и (16) функции φ и ψ, выраженные через ξ и η, мы получим два эквивалентных равенства:

$$\mu_t^q e^{-\tau A x^2}\, \xi(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau u^2}{4A}} |\eta(u)|^{q-2}\, \eta(u)\, e^{i\tau u x}\, du, \tag{20}$$

$$e^{-\tau A x^2}\, \eta(x) = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau u^2}{4A}} |\xi(u)|^{q-2}\, \xi(u)\, e^{-i\tau u x}\, du. \tag{21}$$

Из неравенств (17) и (18) выводим оценки на рост функций ξ и η:

$$|\xi(x+iy)| \leqslant C_1 \exp\left\{\tau A x^2 + \left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A\right) y^2\right\}, \tag{22}$$

$$(\eta(x+iy)) \leqslant C_2 \exp\left\{\tau A x^2 + \left(\frac{\tau^2}{4\theta} - \tau A\right) y^2\right\}. \tag{23}$$

Равенство (20) после несложных преобразований, с учетом (19), дает:

$$\mu_t^q e^{-A\tau x^2}\, \xi(x+iy) =$$

$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{4A}u^2} |\eta(u-2Ay)|^{q-2}\, \eta(u-2Ay)\, e^{i\tau u x}\, du. \tag{24}$$

Из (23), в силу (19), следует, что

$$e^{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)u^2}|\eta(u-2Ay)|^{q-1}\leqslant$$

$$\leqslant C_2^{q-1}\exp\left\{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)u^2+\frac{q\tau}{p}A(u-2Ay)^2\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_3\exp\left\{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta-\frac{q\tau A}{p}\right)u^2-4A^2\frac{q\tau}{p}uy\right\}=$$

$$=C_3\exp\left\{-\frac{q\theta}{p}u^2-4A^2\frac{q\tau}{p}uy\right\}.$$

Поэтому

$$e^{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)u^2}|\eta(u-2Ay)|^{q-1}\in L(-\infty,\ \infty).$$

Заменяя в (24) x на $x+v$ и полагая $z=x+iy$, получим:

$$\mu_t^q e^{-A\tau v^2}\xi(v+z)=$$

$$=\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}e^{2A\tau xv}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{4A}(u-2Aix)^2}|\eta^{q-2}(u-2Ay)|\eta(u-2Ay)e^{i\tau uv}du. \quad (25)$$

Выше мы установили, что функция $\eta(x)$ — целая. Если

$$\eta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

то через $\bar{\eta}(x)$ обозначим функцию

$$\bar{\eta}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_nx^n.$$

Ясно, что при действительном x

$$|\eta(x)|^{q-2}\eta(x)=[\eta(x)]^{\frac{q}{2}}[\bar{\eta}(x)]^{\frac{q}{2}-1}.$$

Так как q — целое четное число, то последняя функция целая. Следовательно, на основании теоремы Коши, путь интегрирования в интеграле (25) можно изменить и вести интегрирование по линии $\operatorname{Im}u=2Ax$. Тогда получим:

$$\mu_t^q e^{-A\tau v^2}\xi(v+z)=$$

$$=\sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\tau u^2}{4A}}\eta^{\frac{q}{2}}(u+2Aiz)\bar{\eta}^{\frac{q}{2}-1}(u+2Aiz)e^{i\tau uv}du. \quad (26)$$

Законность этого преобразования следует из того факта, что подынтегральное выражение, в силу (23), при больших $|u|$ имеет порядок

$$O\left(\exp\left[-q\theta u^2 - 4A^2\frac{q\tau}{p}uy\right]\right).$$

Равенство (26) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\mu_t^q e^{-(A\tau+\theta)v^2}\xi(v+z) =$$
$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)u^2}\eta^{\frac{q}{2}}[u+2Aiz]\,\overline{\eta}^{\frac{q}{2}-1}[u+2Aiz]\,e^{-\theta v^2-\theta u^2+i\tau uv}\,dv. \quad (27)$$

В силу определения величины μ_t, имеем:

$$\|\widetilde{K_t}F\|_q \leqslant \mu_t\|F\|_p,$$

где

$$\widetilde{K_t}F = K_{-it}F = \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)\exp(-\theta x^2 - \theta u^2 - i\tau ux)\,du,$$

вследствие формулы (13). Поэтому из (27) получим:

$$\mu_t^q\|e^{-A_1v^2}\xi(v+z)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant \mu_t\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-p\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)u^2}|\eta(u+2Aiz)|^{\frac{qp}{2}}|\overline{\eta}(u+2Aiz)|^{\frac{q-2}{q}p}du\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (28)$$

Из формулы (19) легко вывести, что

$$p\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right) = q(A\tau+\theta).$$

Применяя к интегралу (28) неравенство Гёльдера с показателями $r = \frac{2}{p}$, $s = \frac{2}{2-p}$, найдем:

$$\mu_t^{q-1}\|e^{-A_1v^2}\xi(v+z)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant \|e^{-A_1u^2}\eta(u+2Aiz)\|_q^{\frac{q}{2}}\,\|e^{-A_1u^2}\eta(u-2Ai\overline{z})_q\|^{\frac{q(2-p)}{2p}}. \quad (29)$$

Исходя из формулы (21) и дословно повторяя предыдущие выкладки, мы получим для функции η:

$$e^{-A\tau x^2}\eta(x-2Ay) =$$
$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{4A}u^2}\xi^{\frac{q}{2}}(u+4A^2iy)\,\overline{\xi}^{\frac{q}{2}-1}(u+4A^2iy)\,e^{-i\tau ux}\,du.$$

Производя замену x на $v+2Aix$, найдем:

$$e^{-A\tau v^2}\eta(v+2Aiz) =$$
$$= \sqrt{\frac{\tau}{2\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\tau}{4A}u^2}\xi^{\frac{q}{2}}(u+4A^2z)\,\overline{\xi}^{\frac{q}{2}-1}(u+4A^2z)\,e^{-i\tau uv}\,du.$$

Применяя тот же прием, что и выше, получим:

$$\| e^{-A_1 v^2} \eta (v + 2A iz) \|_q \leqslant$$

$$\leqslant \mu_t \| e^{-A_1 u^2} \xi (u + 4A^2 z) \|_q^{\frac{q}{2}} \| e^{-A_1 u^2} \xi (u + 4A^2 \bar{z}) \|_q^{\frac{q(2-p)}{2p}}. \tag{30}$$

Положим

$$\log \| e^{-A_1 v^2} \xi (v + z) \|_q = m(z).$$

Комбинируя неравенства (29) и (30) и положив $4A^2 = \delta$, мы получим неравенство для $m(z)$:

$$m(z) \leqslant \frac{q^2}{p^2} \left\{ \frac{p^2}{4} m(\delta z) + \frac{(2-p)p}{4} m(\delta \bar{z}) + \right.$$

$$\left. + \frac{(2-p)p}{4} m(-\delta \bar{z}) + \frac{(2-p)^2}{4} m(-\delta z) \right\}.$$

Проитерировав это неравенство n раз, мы придем к неравенству

$$m(z) \leqslant \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{ a_n m(\delta^n z) + b_n m(\delta^n \bar{z}) + c_n m(-\delta^n \bar{z}) + d_n m(-\delta^n z) \},$$

где коэффициенты a_n, b_n, c_n и d_n легко вычисляются по коэффициентам исходного неравенства. Ясно, что эти коэффициенты положительны. Рассмотрим $m(z)$ при малых $|z|$:

$$m(0) = \log \| e^{-A_1 v^2} \xi (v) \|_q = \frac{p}{2} \log \| f \|_p = 0.$$

Докажем, что $m(z)$, как функция x, y, бесконечно дифференцируема. Для этого достаточно установить возможность дифференцирования интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A_1 q v^2} | \xi (v + z) |^q \, dv, \tag{31}$$

но последнее обстоятельство очевидно в силу следующего соображения. По теореме Коши,

$$\xi^{(n)} (v + z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z+v-\zeta|=1} \frac{\xi(\zeta) \, d\zeta}{(\zeta - v - z)^{n+1}}.$$

Используя оценку (22), мы получим:

$$| \xi^{(n)} (v + z) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z+v-\zeta|=1} \frac{|\xi(\zeta)| \, |d\zeta|}{|\zeta - v - z|^{n+1}} < \frac{n!}{2\pi} C_4 \exp \{ \tau A (|x + v| + 1)^2 + C_5 y^2 \},$$

откуда и следует возможность дифференцирования под знаком интеграла (31). Таким образом, для малых $|z|$

$$m(z) = \alpha x + \beta y + O(|z|^2),$$

поэтому при малом $\delta |z|$, ввиду очевидного равенства

$$a_n + b_n + c_n + d_n = 1,$$

мы будем иметь:

$$m(z) \leqslant \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \{\alpha x \delta^n (a_n + b_n - c_n - d_n) + \\ + \beta y \delta^n (a_n - b_n + c_n - d_n) + O(\delta^{2n} |z|^{2n})\}. \quad (32)$$

Определим величины $a_n + b_n - c_n - d_n$ и $a_n - b_n + c_n - d_n$.

Легко видеть, что $b_n = c_n$, следовательно, нам нужно вычислить $a_n - d_n$. Пользуясь определением величин a_n, b_n, c_n, d_n, нетрудно вывести рекуррентное соотношение:

$$a_{n+1} - d_{n+1} = (a_1 - d_1)(a_n - d_n).$$

Из этого соотношения следует:

$$a_n - d_n = (a_1 - d_1)^n - \left[\frac{p^2}{4} - \frac{(2-p)^2}{4}\right]^n = (p-1)^n.$$

Подставляя значение величины $a_n - d_n$ в неравенство (32), получим:

$$m(z) \leqslant \frac{q^{2n}}{p^{2n}} \left\{\alpha x \left(\delta \frac{p}{q}\right)^n + \beta y \left(\delta \frac{p}{q}\right)^n + O(\delta^{2n} |z|^{2n})\right\}.$$

Из уравнения (19) мы находим значение A:

$$A = -\frac{p\theta}{2\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2\theta^2}{\tau^2} + \frac{p}{q}};$$

таким образом, $2A < \sqrt{\frac{p}{q}}$, т. е.

$$\delta = 4A^2 < \frac{p}{q}.$$

Принимая во внимание это неравенство для δ и устремляя n к ∞, мы получим, что $m(z) \leqslant 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qA_1v^2} |\xi(v+z)|^q dv \leqslant 1.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Определенная выше функция $\xi(x)$ тождественно равна постоянной:*

$$\xi(x) = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\xi_1(z) = \int_0^h e^{-qA_1v^2} \xi^q(v+z)\, dv.$$

Функция $\xi_1(z)$ — целая. Но на основании леммы 3 она ограничена, следовательно, $\xi_1(z) = \text{const}$. Таким образом,

$$\int_0^h e^{-qA_1v^2} \xi^q(v+z)\, dv = \int_0^h e^{-qA_1v^2} \xi^q(v)\, dv.$$

В силу произвольности h,

$$\xi^q(z) = \xi^q(0).$$

Так как

$$\| e^{-qA_1v^2}\xi^q(v)\|_q = 1,$$

то

$$\xi(x) = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}}.$$

Лемма доказана.

Возвратимся теперь к исходным функциям $f(x)$ и $\tilde{g}(x)$. На основании леммы 4,

$$\varphi(x) = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2q}} e^{-A_1x^2},$$

т. е.

$$f(x) = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\frac{q}{p}A_1x^2} = \left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-\left(\frac{\tau}{4A}-\theta\right)x^2}.$$

Из формулы (13) имеем:

$$\tilde{g}(x) = \sqrt{\frac{2A}{t}}\left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}} e^{-A_1x^2}$$

и, значит, мы можем определить константу μ_t:

$$\mu_t = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt{\frac{2A}{t}}\left(\frac{qA_1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}}.$$

Пользуясь полученным выражением для μ_t, находим:

$$\lim_{t\to 1-0} \mu_t = \mu,$$

$$\mu = (2\pi)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \frac{p^{\frac{1}{2p}}}{q^{\frac{1}{2q}}}.$$

Известно ([1]), что если $\varphi \in L^r$, $r > 1$, то $K_t\varphi$ сильно стремится к φ, когда $t \to 1-0$. Поэтому, перейдя к пределу в неравенстве

$$\| K_t\tilde{f}\|_q \leqslant \mu_t \| f\|_p,$$

получим:

$$\|\tilde{f}\|_q \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \frac{p^{\frac{1}{2p}}}{q^{\frac{1}{2q}}} \| f\|_p.$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если q — целое четное число, то*

$$\|\tilde{f}\|_q \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \frac{p^{\frac{1}{2p}}}{q^{\frac{1}{2q}}} \|f\|_p. \tag{33}$$

Нетрудно проверить, что знак равенства в соотношении (33) имеет место, если

$$f(x) = e^{-ax^2+ibx}, \quad a > 0, \quad b \text{ — произвольно.} \tag{34}$$

Ясно, что неравенство (33) имеет место при любом значении p, $1 < p \leqslant 2$. Было бы интересно доказать, что знак равенства в (33) реализуется только на функциях вида (34).

Математический институт
им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило
11.II.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 543—556

В. П. ГРОМОВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В настоящей работе с помощью линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка изучаются вопросы полноты систем производных аналитических функций в областях комплексной плоскости.

§ 1. О полноте системы производных аналитической функции в круг

В работе А. О. Гельфонда и А. Ф. Леонтьева ([1]) и в некоторых других работах А. Ф. Леонтьева рассматривался линейный оператор $D^n[F, f]$, который был назван обобщенной производной n-го порядка функции $F(z)$, порожденной функцией $f(t)$, и который определяется следующим образом.

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— фиксированная целая функция порядка ρ и типа $\sigma \neq 0, \infty$, удовлетворяющая условиям:

$$a_n \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{2}$$

и пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

— некоторая функция, аналитическая в круге $|z| < R$ ($R \leqslant \infty$). Тогда, по определению

$$D^n F(z) = D^n[F, f] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+n} \frac{a_k}{a_{k+n}} z^k. \tag{3}$$

Согласно условию (2), существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[a]{\left|\frac{a_k}{a_{k+n}}\right|} = 1,$$

и, следовательно, функция (3) является аналитической в том же круге, что и функция $F(z)$. Если $f(z) = e^z$, то $D^n[F, f] = F^{(n)}(z)$, т. е. обобщенная производная превращается в обычную производную n-го порядка функции $F(z)$. Отметим, что при любом постоянном λ

$$D^n[f(\lambda z)] = \lambda^n f(\lambda z). \tag{3'}$$

Пусть

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

— некоторая целая функция порядка $\leqslant \rho$ и конечного типа σ_1, и пусть

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n F(z). \tag{5}$$

Функцию $\varphi(z)$ принято называть характеристической функцией оператора (5) (операторы такого вида рассматривались в ряде работ А. Ф. Леонтьева). В частности, в работе ([1]) было установлено, что если функция $F(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, то ряд (5) сходится и представляет собой аналитическую функцию $L(F)$ в круге

$$|z| < r = \left(R^\rho - \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{6}$$

Здесь ρ и σ — соответственно порядок и тип функции (1), порождающей оператор (3), а σ_1 — тип характеристической функции (4) (если порядок функции (4) меньше ρ, то в (6) надо положить $\sigma_1 = 0$).

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы о полноте системы обобщенных производных аналитической функции $F(z)$ в круге.

ТЕОРЕМА 1. *Система обобщенных производных*

$$\{D^{n_\nu} F(z)\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

функции $F(z)$, регулярной в круге $|z| < R$ $(R \leqslant \infty)$, полна в круге $|z| < R$ тогда и только тогда, когда функция $F(z)$ не удовлетворяет никакому линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n F(z) = \Phi(z), \tag{8}$$

характеристическая функция которого принадлежит классу $[\rho, R^\rho \sigma)$, а правая часть $\Phi(z)$ регулярна в некоторой окрестности начала и

$$\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть система (7) не полна в круге $|z| < R$. Тогда, как известно [см. ([6]) и ([7]), стр. 276—280], существует не равная тождественно нулю функция

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \tag{10}$$

аналитическая в области $|z| > r$ $(r < R)$ и такая, что

$$\int_{|z|=r+\varepsilon} \psi(z) D^{n_\nu} F(z)\, dz = 0, \quad 0 < \varepsilon < R - r \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Ряд (10) на окружности $|z| = r + \varepsilon$ сходится равномерно; подставляя его вместо $\psi(z)$ в рассматриваемые равенства и интегрируя почленно,

получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_{|z|=r+\varepsilon} \frac{D^{n_\nu}F(z)}{z^{k+1}}\,dz = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

откуда, учитывая формулу (3), будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k b_{k+n_\nu} a_k}{a_{k+n_\nu}} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

С помощью коэффициентов функций (10) и (1) построим оператор

$$L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k D^k F(z). \tag{12}$$

Характеристическая функция этого оператора

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n z^n$$

принадлежит классу $[\rho, R^\rho\sigma)$. Действительно, так как

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant r < R,$$

в силу чего для всех n

$$|c_n| \leqslant K r_1^n \quad (r < r_1 < R),$$

то при больших $|z|$

$$|\varphi(z)| \leqslant K \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r_1^n\, |z|^n \leqslant K e^{(\sigma+\varepsilon) r_1^\rho |z|^\rho}.$$

В силу условия (6) и того, что $\sigma_1 < \sigma R^\rho$, существует окрестность начала координат, в которой ряд (12) равномерно сходится и определяет собой аналитическую функцию $L(F)$. Разлагая $L(F)$ в этой окрестности в степенной ряд, получим:

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} [L(F)]_0^{(n)} \frac{z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k \frac{b_{n+k} a_n}{a_{n+k}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k b_{n+k} a_k}{a_{n+k}} \right) z^n.$$

В силу условия (11), коэффициенты при z^{n_ν} в правой части равны нулю, и мы имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_k a_k D^k F(z) = \Phi(z),$$

где $\Phi(z)$ регулярна в некоторой окрестности начала и

$$\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Это уравнение — типа (8). Следовательно, если система (7) не полна, то $F(z)$ удовлетворяет некоторому уравнению вида (8).

Обратно, пусть рассматриваемая функция $F(z)$ удовлетворяет некоторому уравнению вида (8) с указанными в теореме условиями. В силу условия (6) и того, что $\sigma_1 < \sigma R^\rho$, левая часть этого уравнения может быть разложена в степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности начала:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k D^k F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{b_{k+n}}{a_{k+n}} \right) z^n \equiv \Phi(z).$$

Так как $\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0$, то отсюда следует:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{b_{k+n_\nu}}{a_{k+n_\nu}} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Введем функцию

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{a_k z^{k+1}}. \tag{14}$$

Она является аналитической в области $|z| > r$ $(r < R)$. Действительно, в силу (2), имеем:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\alpha_n}{a_n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}{n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{(\rho e \sigma_1)^{\frac{1}{\rho}}}{(\rho e \sigma)^{\frac{1}{\rho}}} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} = r,$$

причем так как $\sigma_1 < \sigma R^\rho$, то $r < R$.

Рассмотрим интеграл

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r+\varepsilon} D^{n_\nu} F(z)\, \psi(z)\, dz, \quad 0 < \varepsilon < R - r \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Подставляя в него вместо $\psi(z)$ ряд (14), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{a_k} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r+\varepsilon} \frac{D^{n_\nu} F(z)}{z^{k+1}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k b_{k+n_\nu}}{a_{k+n_\nu}}. \tag{15}$$

Правая часть этого равенства, в силу (13), равна нулю при $\nu = 1, 2, \ldots$. Таким образом, имеем:

$$\int\limits_{|z|=r+\varepsilon} \psi(z)\, D^{n_\nu} F(z)\, dz = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

причем, как видно из построения, функция $\psi(z)$ не равна тождественно нулю. Поэтому система (7) не полна в круге $|z| < R$. Итак, если $F(z)$ удовлетворяет уравнению вида (8), то система (7) не полна в круге $|z| < R$. Этим теорема доказана полностью.

Отметим, что если рассматривается вся система последовательных обобщенных производных

$$\{D^n F(z)\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

без пропусков, то в теореме 1 функция $\Phi(z) \equiv 0$. Так как при $f(z) =$

$\doteq e^z \quad D^n f(z) = F^{(n)}(z)$, то в качестве следствия мы получаем такое утверждение:

Для того чтобы система производных

$$\{F^{(n_\nu)}(z)\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

функции $F(z)$, *регулярной в круге* $|z| < R$, *была полна в круге* $|z| < R$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $F(z)$ *не удовлетворяла никакому дифференциальному уравнению*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F^{(n)}(z) = \Phi(z),$$

характеристическая функция которого принадлежит классу $[1, R)$, *а правая часть* $\Phi(z)$ *регулярна в некоторой окрестности начала и* $\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Если рассматривается система последовательных производных без пропусков, то $\Phi(z) \equiv 0$, и, таким образом, имеет место следующий результат *.

Система

$$\{F^{(n)}(z)\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

полна в круге $|z| < R$ *тогда и только тогда, когда функция* $F(z)$ *не удовлетворяет никакому уравнению*

$$\sum_{0}^{\infty} a_n F^{(n)}(z) = 0,$$

характеристическая функция которого принадлежит классу $[1, R)$.

§ 2. О полноте системы производных аналитической функции в произвольной односвязной области

Для системы обыкновенных производных можно указать условия полноты не только в круге, но и в произвольной односвязной области.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы система производных* $\{f^{(n_\nu)}(z)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *функции* $f(z)$, *регулярной в односвязной области* D, *была полна в* D, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(z)$ *не удовлетворяла никакому соотношению вида*

$$\int_\gamma f(\xi + z)\, g(\xi)\, d\xi = \Phi(z), \tag{16}$$

где γ — *замкнутый контур, лежащий внутри области* D, $g(\xi) \not\equiv 0$ — *некоторая аналитическая на контуре* γ *и вне его функция, обращающаяся в нуль в бесконечности,* $\Phi(z)$ — *функция, аналитическая в некоторой окрестности начала, причем* $\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет некоторому соотношению вида (16). Запишем $f(\xi + z)$ в виде ряда

$$f(\xi + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} z^n \qquad (17$$

---

* Этот результат, как мне стало известно при подготовке статьи к печати, другим способом одновременно получен Ю. А. Казьминым.

и покажем, что этот ряд сходится равномерно по ξ (ξ пробегает контур γ, лежащий внутри D), когда $|z|$ достаточно мало. Мы имеем:

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma_\xi} \frac{f(t)\,dt}{(t-\xi)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь Γ_ξ — окружность с центром в точке ξ и радиуса $\delta_1 = \frac{\delta}{2}$, где δ — расстояние контура γ до границы области D.

Пусть M — максимум модуля функции $f(z)$ в кольце, описываемом окружностью Γ_ξ, когда ξ пробегает контур γ; тогда

$$|f^{(n)}(\xi)| \leqslant \frac{n!}{\delta_1^n} M \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} z^n\right| \leqslant M\left|\frac{z}{\delta_1}\right|^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отсюда видно, что если $|z| < \delta_1$, то ряд (17) равномерно сходится относительно ξ на γ. Подставляя в (16) вместо $f(\xi + z)$ ряд (17) и интегрируя почленно, получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\int_\gamma f^{(n)}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right) z^n = \Phi(z).$$

Так как $\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, то

$$\int_\gamma f^{(n_\nu)}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, система $\{f^{(n_\nu)}(z)\}$ не полна в области D. Итак, если $f(z)$ удовлетворяет соотношению вида (16), то система $\{f^{(n_\nu)}(z)\}$ не полна в области D.

Докажем обратное утверждение. Пусть система $\{f^{(n_\nu)}(z)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ не полна в области D. Тогда будем иметь:

$$\int_\gamma f^{(n_\nu)}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

где γ — некоторый замкнутый контур, лежащий внутри D, а $g(\xi) \not\equiv 0$ — некоторая аналитическая на контуре γ и вне его функция, обращающаяся в нуль в бесконечности.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int_\gamma f(\xi + z)\, g(\xi)\, d\xi;$$

очевидно, она регулярна в некоторой окрестности начала. Нам надо показать, что

$$\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

На основании (17) имеем:

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma} f^{(n)}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right)\frac{z^n}{n!},$$

откуда, в силу (18), следует, что $\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Теорема доказана.

Отметим, что если рассматривается полнота системы всех последовательных производных, то в соотношении (16) функция $\Phi(z) \equiv 0$.

В том случае, когда областью D является круг $|z| < R$ с центром в начале координат, интегральное соотношение (16) можно представить в виде дифференциального уравнения бесконечного порядка. Действительно, в этом случае функцию $g(\xi)$ можно представить в виде ряда

$$g(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\xi^{k+1}},$$

равномерно сходящегося в области $|\xi| \geqslant r$, $r < R$, причем круг $|z| = r$ содержит контур γ, и тогда имеем:

$$\int_{\gamma} f(\xi + z)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{|\xi|=r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\xi^{k+1}} f(\xi + z)\, d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{|\xi|=r}\frac{f(\xi+z)}{\xi^{k+1}}\, d\xi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k!} f^{(k)}(z),$$

что согласуется с результатом § 1.

§ 3. Примеры применения теоремы 1

В этом параграфе, опираясь на теорему 1, мы установим полноту во всей плоскости производных некоторых аналитических функций. Докажем сначала следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $F(z)$ — целая функция. Если выполняется одно из двух условий:*

1) *функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho, 0]$ и отлична от многочлена;*

2) *функция $F(z)$ имеет порядок ρ, конечный тип $c > 0$ и не является конечной линейной комбинацией функций вида*

$$f(\lambda z),\ z f'(\lambda z),\ z^2 f''(\lambda z), \ldots,$$

где λ — постоянное,

то система $D^n[F, f]$ полна во всей плоскости.

Доказательство. Пусть

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n;$$

так как $F(z)$ принадлежит классу $[\rho, c]$ (в случае, если $F(z) \in [\rho, 0]$ положим $c = 0$), то

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|b_n|} = (e\rho c)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{19}$$

Введем, как это сделано в работе А. Ф. Леонтьева ([3]), функцию

$$\gamma(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{b_n}{a_n}}{u^{n+1}}. \tag{20}$$

Здесь и всюду в дальнейшем a_n обозначают тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$, удовлетворяющие условиям (2). Согласно соотношениям (2) и (19),

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{b_n}{a_n}\right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|b_n|}}{n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \left(\frac{c}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \alpha < \infty. \tag{21}$$

Следовательно, ряд (20) сходится при $|u| > \alpha$. Мы имеем:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=r_1>\alpha} \gamma(u) f(zu)\, du. \tag{22}$$

В силу свойства (3′),

$$D^n F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=r_1>\alpha} \gamma(u)\, u^n f(uz)\, du,$$

а поэтому оператор (5) представляется в виде

$$L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=r_1>\alpha} \varphi(u) \gamma(u) f(zu)\, du, \tag{23}$$

где $\varphi(u)$ — характеристическая функция оператора (5).

Допустим, что система $\{D^n F(z)\}$ не полна во всей плоскости. Тогда, на основании теоремы 1, можно утверждать, что функция $F(z)$ удовлетворяет некоторому уравнению

$$L(F) = \int\limits_{|u|=r_1>\alpha} \varphi(u)\, \gamma(u)\, f(zu)\, du = 0, \tag{24}$$

где $\varphi(u) \not\equiv 0$. Из равенства (24) вытекает [см. ([3]), стр. 205], что функция $\psi(u) = \varphi(u)\, \gamma(u)$ — целая. Следовательно, функция

$$\gamma(u) = \frac{\psi(u)}{\varphi(u)}$$

(регулярная при $|u| > \alpha$) есть мероморфная функция с конечным числом полюсов, расположенных в круге $|u| \leqslant \alpha$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — эти полюсы и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — соответственно их кратности (при $\alpha = 0$ у функции $\gamma(u)$ будет полюс только в точке $\lambda_1 = 0$). Тогда, в силу (22), функция $F(z)$ есть конечная линейная комбинация функций

$$f(\lambda_j z),\ z f'(\lambda_j z),\ z^2 f''(\lambda_j z), \ldots, z^{\alpha_j - 1} f^{(\alpha_j - 1)}(\lambda_j z) \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{25}$$

(в случае $\alpha = 0$ функция $F(z)$ есть многочлен). Это заключение мы получили, предположив, что система $\{D^n F(z)\}$ не полна. Следовательно, если $F(z)$ не есть линейная конечная комбинация этих функций, то система $\{D^n F(z)\}$ полна во всей плоскости, что и требовалось доказать.

Заметим, что условию 2) теоремы будет удовлетворять, в частности, целая функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k_n} z^{k_n}$$

порядка ρ, конечного типа $c > 0$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k_n} = 0.$$

В самом деле, в этом случае, согласно теореме Полиа, для функции

$$\gamma(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{k_n}}{a_{k_n} u^{k_n+1}}$$

все точки окружности $|u| = \alpha$ (границы круга сходимости ряда) являются особыми и потому функция (22) не может быть конечной линейной комбинацией функций вида (25).

Приведем пример полной системы вида $\{D^{n_\nu} F(z)\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $F(z) = \frac{1}{z}\int_0^z f(t)\,dt$. *Тогда, какова бы ни была последовательность целых положительных чисел* $\{n_\nu\}$ *таких, что*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{n_\nu} = \tau > 0,$$

система $\{D^{n_\nu} F(z)\}$ *полна во всей плоскости.*

Доказательство. Функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho, c]$. Допустим, что система $\{D^{n_\nu} F(z)\}$ не полна во всей плоскости. Тогда, согласно теореме 1, функция $F(z)$ должна удовлетворять уравнению вида (8), причем

$$\Phi^{(n_\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

В нашем случае оператор $L(F)$ можно представить в форме (23) и потому уравнение (8) имеет вид

$$L(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \varphi(u)\,\gamma(u)\,f(zu)\,du = \Phi(z). \tag{26}$$

Из этого соотношения видно, что функция

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b'_n z^n \quad (b'_{n_\nu} = 0 \text{ при } \nu = 1, 2, \ldots)$$

— целая, класса $[\rho, \infty)$. Для нее можно определить функцию

$$\gamma_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b'_n}{a_n u^{n+1}},$$

причем ряд будет сходиться при $|u| > \beta$, где $\beta < \infty$.

Мы имеем:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=r>\beta} \gamma_1(u) f(zu)\, du.$$

На основании этого равенства соотношение (26) может быть записано в виде

$$\int\limits_{|u|=r} f(uz)\, [\varphi(u)\,\gamma(u) - \gamma_1(u)]\, du = 0,$$

где $r > \max\{\alpha, \beta\}$. Отсюда следует, что функция

$$\psi(u) = \varphi(u)\,\gamma(u) - \gamma_1(u) \tag{27}$$

— целая, но этого не может быть. В самом деле, мы имеем:

$$F(z) = \frac{1}{z}\int\limits_0^z f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n+1},$$

откуда следует:

$$\gamma(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n u^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, u^{n+1}} = \ln \frac{u}{u-1}.$$

Точка $u = 1$ для функции $\gamma(u)$ есть особая точка логарифмического характера. Значит, поскольку $\psi(u)$ и $\varphi(u)$ — целые функции, из (27) можно заключить, что $\gamma_1(u)$ регулярна при $|u| > 1$ во всех точках окружности $|u| = 1$, кроме точки $u = 1$, которая для $\gamma_1(u)$ является особой. Учитывая, что $b_{n_\nu} = 0$, запишем $\gamma_1(u)$ в виде ряда:

$$\gamma_1(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b'_{m_\nu}}{a_{m_\nu} u^{m_\nu+1}},$$

где $\{m_\nu\} = \{n\} - \{n_\nu\}$. Последовательность $\{m_\nu\}$ имеет плотность

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{m_\nu} = 1 - \tau < 1,$$

поэтому, по теореме Полиа, на окружности $|u| = 1$ у функции $\gamma_1(u)$ должны быть особые точки на каждой дуге раствора $2\pi(1-\tau) < 2\pi$. Следовательно, у $\gamma_1(u)$ на окружности $|u| = 1$ имеется не одна особая точка, как мы установили, а больше. Мы получили противоречие и, таким образом, наше допущение, что система $\{D^{n_\nu} F(z)\}$ не полна во всей плоскости, неверно. Теорема доказана.

Аналогичным рассуждением можно убедиться в том, что если

$$F(z) = \frac{1}{z}\int\limits_{-z}^{z} f(t)\, dt = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n} z^{2n}}{2n+1},$$

то при условии

$$\tau = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu}{n_\nu} > \frac{1}{2}$$

система $\{D^{n_\nu}F(z)\}$ также полна во всей плоскости. Действительно, в этом случае функция

$$\gamma(u) = \ln\frac{u+1}{u-1}$$

и имеет на окружности $|u| = 1$ две особые точки, а функция $\gamma_1(u)$, поскольку $\tau > \frac{1}{2}$, должна иметь на окружности $|u| = 1$ по крайней мере три особые точки; в силу этого, функция (27) не может быть целой.

Отметим, что если $n_\nu = 2\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ $\left(\text{в этом случае } \tau = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{n_\nu} = \frac{1}{2}\right)$, то система $\{D^{n_\nu}F(z)\}$ уже не будет полной ни в каком круге с центром в начале. В самом деле, функция $F(z)$ — четная и, как видно из (3), производные $D^{2\nu}F(z)$ — также четные функции. Поэтому посредством системы $\{D^{2\nu}F(z)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ нельзя аппроксимировать нечетные функции, например функцию z.

В заключение этого параграфа докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Если*

$$F(z) = e^{h(z)}, \tag{28}$$

где $h(z)$ — многочлен степени $\geqslant 2$, то система обыкновенных производных $\{F^{(n)}(z)\}$ полна во всей плоскости.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно, согласно теореме 1, показать, что функция (28) не удовлетворяет никакому уравнению вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z) = 0, \tag{29}$$

характеристическая функция которого принадлежит классу $[1, \infty)$. Предположим, что функция (28) удовлетворяет некоторому уравнению вида (29), тогда [см. ([1])] во всей плоскости она представляется в виде

$$e^{h(z)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_n}\alpha_j(z)\,e^{\lambda_j z}, \tag{30}$$

где p_n — положительные целые числа, λ_j — корни характеристической функции $\varphi(u) = \sum\limits_0^{\infty} a_n u^n$, $\alpha_j(z)$ — многочлен степени не выше $\nu_j - 1$ и ν_j — кратность корня λ_j.

Продифференцируем равенство (30):

$$h'(z)\,e^{h(z)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_n}[\alpha_j(z)\,\lambda_j + \alpha_j'(z)]\,e^{\lambda_j z}. \tag{31}$$

Умножим равенство (30) на $h'(z)$; очевидно, правая часть полученного равенства должна быть равна правой части равенства (31), и мы получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_n}[h'(z)\,\alpha_j(z) - \lambda_j\alpha_j(z) - \alpha_j'(z)]\,e^{\lambda_j z} = 0. \tag{32}$$

Если мы покажем, что

$$h'(z)\,\alpha_j(z) - \alpha_j(z)\,\lambda_j - \alpha_j'(z) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{33}$$

то отсюда будет следовать, что $\alpha_j(z) \equiv 0$, а это противоречит равенству (30); тем самым теорема будет доказана. Итак, установим справедливость (33), например, для $j = 1$. Пусть многочлен $h'(z)$ имеет степень s. Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(u) = \left[\frac{\varphi(u)}{(u-\lambda_1)^{\nu_1}}\right]^s = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n u^n;$$

очевидно, она принадлежит классу $[1, \infty)$. Для нее точка λ_1 не является нулем, а точки λ_j $(j = 2, 3, \ldots)$ являются нулями кратности $s\nu_j \geqslant \nu_j + s - 1$. Введем оператор

$$L_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n y^{(n)}(z)$$

и подействуем им на обе части равенства (32). Так как

$$L_1(z^k e^{\lambda_j z}) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu_j + s - 1;\ j = 2, 3, \ldots),$$

то

$$L_1\{[h'(z)\,\alpha_1(z) - \lambda_1\alpha_1(z) - \alpha_1'(z)]\,e^{\lambda_1 z}\} = 0. \tag{34}$$

Выражение в фигурных скобках можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(t)\,e^{tz}dt,$$

где $g(t)$ — рациональная функция ($g(\infty) = 0$) с единственным полюсом в точке λ_1. Тогда равенство (34) примет форму

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi_1(t)\,g(t)\,e^{tz}dt = 0.$$

Отсюда, поскольку $\varphi_1(\lambda_1) \neq 0$, вытекает, что $g(t) = 0$ и, следовательно,

$$h'(z)\,\alpha_1(z) - \lambda_1\alpha_1(z) - \alpha_1'(z) = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Пример применения теоремы 2

В работе А. Ф. Леонтьева (4) доказана

ЛЕММА. *Пусть $F(z)$ — регулярная функция экспоненциального типа в угле $|\arg z| \leqslant \mu$, $h(\varphi)$ — ее индикатриса роста, $\omega(z)$ — целая функция экспоненциального типа, удовлетворяющая условию: для значений φ, расположенных всюду плотно в некотором интервале $|\varphi| \leqslant \mu_1$, существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\omega(re^{i\varphi})|}{r} = \sigma|\sin\varphi|. \tag{35}$$

Если $F(z) \not\equiv 0$ и $F(z)$ обращается в нуль во всех нулях функции $\omega(z)$,

расположенных в угле $|\arg z| \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_1$, *то у функции* $\gamma(z)$, *ассоциированной по Борелю с* $F(z)$, *имеются на вертикальной опорной прямой* $x = h(0)$ *две особые точки, расстояние между которыми не меньше* 2σ.

Из этой леммы, как частный случай, вытекает следующее утверждение: если функция $F(z)$ — целая экспоненциального типа и обращается в нуль в точках верхней части мнимой оси $m_n i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m_n} = \tau \neq 0, \tag{36}$$

то у функции $\gamma(z)$, ассоциированной по Борелю с $F(z)$, имеются на горизонтальной опорной прямой $x = -h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ($\gamma(z)$ регулярна ниже этой прямой) две особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$.

Этим утверждением мы воспользуемся для доказательства следующего результата *.

ТЕОРЕМА. *Пусть*

$$\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikz} \tag{37}$$

— *аналитическая и периодическая с периодом* 2π *функция в полосе*

$$\alpha < I(z) < \beta. \tag{38}$$

Если для $k = \mu_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* μ_n — *положительные целые числа, причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = \tau \neq 0, \tag{39}$$

коэффициенты Фурье c_k *отличны от нуля, то система* $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *полна в прямоугольнике*

$$-\pi\tau < \operatorname{Re}(z) < \pi\tau, \quad \alpha < I(z) < \beta. \tag{40}$$

Доказательство. Предположим, что система $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ не полна в области (40); тогда функция $\varphi(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_\gamma \varphi(\xi + z)\, g(\xi)\, d\xi = 0, \tag{41}$$

где γ — некоторый замкнутый контур, лежащий внутри области (40), $g(\xi) \not\equiv 0$ — некоторая аналитическая на контуре γ и вне его функция, обращающаяся в нуль в бесконечности.

Имея в виду представление (37) (ряд (37) внутри полосы (38) сходится равномерно), запишем соотношение (41) в форме:

$$\int_\gamma \varphi(\xi + z)\, g(\xi)\, d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(c_k \int_\gamma g(\xi)\, e^{ik\xi} d\xi\right) e^{ikz} = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$c_k \int_\gamma e^{ik\xi} g(\xi)\, d\xi = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

* Как мне стало известно при подготовке статьи к печати, аналогичный результат одновременно получен, но еще не опубликован Ю. А. Казьминым.

Так как $c_{\mu_n} \neq 0$, то

$$\int\limits_{\gamma} e^{i\mu_n \xi} g(\xi)\, d\xi = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (42)$$

Рассмотрим целую функцию

$$\vartheta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{z\xi} g(\xi)\, d\xi.$$

Эта функция экспоненциального типа и, согласно (42), в точках мнимой оси $\mu_n i$ ($n = 1, 2, \ldots$) обращается в нуль. В силу утверждения, отмеченного в начале параграфа, функция $g(\xi)$, являющаяся ассоциированной по Борелю с $\vartheta(z)$, должна иметь на горизонтальной опорной прямой две особые точки, расстояние между которыми не меньше $2\pi\tau$. Но это противоречит тому, что функция $g(\xi)$ регулярна на контуре γ и вне его. Таким образом, наше предположение, что система $\{\varphi^{(n)}(z)\}$ не полна, неверно. Теорема доказана.

Теорема 5 обобщает следующую теорему И. И. Ибрагимова ([5]):

Если $\varphi(z)$ — аналитическая и периодическая с периодом 2π функция в полосе $-\pi < I(z) < \pi$, причем все коэффициенты Фурье функции $\varphi(z)$ отличны от нуля, то система $\{\varphi^{(h)}(z)\}$ полна в круге $|z| < \pi$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. Ф. Леонтьеву за руководство данной работой.

Поступило
30.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О. и Леонтьев А. Ф., Об одном обобщении ряда Фурье, Матем. сборн., 29(71) : 3 (1951), 477—500.

[2] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. XXXIX, 1951.

[3] Леонтьев А. Ф., Обобщение теоремы Лиувилля, Матем. сборн., 31 (73) : 1(1952), 201—208.

[4] Леонтьев А. Ф., О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе, Матем. сборн., 36 (78) : 3 (1955), 555—568.

[5] Ибрагимов И. И., О полноте системы аналитических функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 11 (1947), 75—109.

[6] Маркушевич А. И., О базисе в пространстве аналитических функций, Матем. сборн., 17(59) : 2(1945), 211—252.

[7] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М.— Л., 1956.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 557—590

С. Я. ХАВИНСОН

О ДВУХ КЛАССАХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ И МОМЕНТОВ

В работе рассматриваются такие аппроксимационные задачи, где наряду с величиной уклонения учитываются величины коэффициентов приближающего полинома. Эти задачи оказываются связанными с другими задачами, принадлежащими кругу экстремальных проблем теории моментов. В рассматриваемых проблемах изучаются свойства экстремальных функций и исследуется вопрос об их единственности. Даются обобщения теоремы П. Л. Чебышева о характеристических свойствах полинома наилучшего приближения и комплексного аналога этой теоремы, установленного Е. Я. Ремезом, и указывается возможность эффективного решения некоторых задач о предельных величинах интегралов.

§ 1. Постановка задач и общие теоремы

Пусть E — локально-выпуклое вещественное или комплексное линейное топологическое пространство и $p(x)$ — непрерывный симметричный выпуклый функционал в E.

Пусть, далее, E_n — n-мерное линейное пространство с локально-выпуклой топологией, состоящее из точек $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, вещественных или комплексных, и $p_1(\lambda) = p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — непрерывный симметричный выпуклый функционал в E_n.

Пусть, наконец, $y, x_1, \ldots, x_n$ — линейно независимые элементы E. Нас будут интересовать следующие задачи.

Задача I. Найти

$$\alpha = \inf_{(\lambda)=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \left[p\left(y - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\right) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \right] \tag{1}$$

Задача II. Найти

$$\beta = \sup |f(y)| \tag{2}$$

по всем непрерывным линейным функционалам $f \in E^*$, удовлетворяющим условиям:

$$|f(x)| \leqslant p(x) \text{ при всех } x \in E, \tag{3}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) \right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ при всех } (\lambda). \tag{4}$$

Первая из этих задач является усложненной аппроксимационной задачей, когда наряду с близостью полинома (здесь и далее мы называем

полиномами линейные комбинации элементов $x_1, \ldots, x_n$) к приближаемому элементу учитываются величины коэффициентов полинома.

Вторая задача относится к экстремальным проблемам теории моментов, примыкающим к проблемам П. Л. Чебышева и А. А. Маркова о предельных величинах интегралов. При этом «моменты» $f(x_\nu)$ не фиксируются, как это чаще всего делается, а могут изменяться в установленных требованием (4) границах.

Приведем некоторые конкретизации задач I и II. Пусть Q есть некоторый компакт и $y(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — непрерывные функции.

Задача $\mathrm{I}_{[C(Q),\, p_1]}$. Найти

$$\inf_{(\lambda)} \left[\max_{t \in Q} \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right| + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \right]. \qquad (5)$$

Конкретизируя p_1, можно получить задачу

$$\inf_{(\lambda)} \left[\max_{t \in Q} \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right| + \sqrt[r]{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu |\lambda_\nu|^r} \right], \qquad (6)$$

где числа $r \geqslant 1$ и $\varepsilon_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, заданы. Эту задачу будем обозначать через $\mathrm{I}_{[C(Q),\, \{\varepsilon_\nu\},\, r]}$.

Устремляя $r \to \infty$, получим задачу $\mathrm{I}_{[C(Q),\, \{\varepsilon_\nu\},\, \infty]}$:

$$\inf_{(\lambda)} \left[\max_{t \in Q} \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right| + \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |\varepsilon_\nu \lambda_\nu| \right]. \qquad (7)$$

Пусть μ — неотрицательная мера, определенная на теле измеримых (μ) подмножеств некоторого абстрактного пространства Q [см. определения в работе ([27]), гл. 1]. Рассматривая пространство $L_\mu^p(Q)$ на Q, состоящее из функций, интегрируемых по мере μ в p-й степени, и заменяя в предыдущих задачах равномерную метрику интегральной, придем к таким проблемам:

Задача $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q),\, p_1]}$:

$$\inf_{(\lambda)} \left[\left\{ \int_Q \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \right]. \qquad (8)$$

В частности, специализируя $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, получим следующую задачу.

Задача $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q),\, \{\varepsilon_\nu\},\, r]}$:

$$\inf_{(\lambda)} \left[\left\{ \int_Q \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} + \sqrt[r]{\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu |\lambda_\nu|^r} \right], \qquad (9)$$

где $1 \leqslant p < +\infty$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$.

Пусть μ_1 — неотрицательная мера на Q. Тогда примером задачи I является

Задача $\mathrm{I}_{[C(Q),\, L_{\mu_1}^r(Q)]}$:

$$\inf_{(\lambda)} \left[\max_{t \in Q} \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right| + \left\{ \int_Q \left| \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t) \right|^r d\mu_1 \right\}^{\frac{1}{r}} \right]. \qquad (10)$$

Если $\rho(t)$ — неотрицательная весовая функция на Q, то можно еще поставить следующую задачу.

Задача $\mathrm{I}_{[C(Q),\, C_\rho(Q)]}$:

$$\inf_{(\lambda)}\left[\max_{t\in Q}\left|y(t)-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu(t)\right|+\max_{t\in Q}\rho(t)\left|\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu x_\nu(t)\right|\right] \tag{11}$$

Аналогично формулируются задачи $\mathrm{I}_{[L^p_\mu(Q),\, L^r_{\mu_1}(Q)]}$ и $\mathrm{I}_{[L^p_\mu(Q),\, C_\rho(Q)]}$. Мы полагаем, что после всего сказанного эти символы не трубуют дальнейших пояснений. Заметим, что весовые функции можно было бы вводить и в первые члены формул (5), (6), (7), (10), (11).

Рассмотрим примеры задачи II.

Задача $\mathrm{II}_{[C(Q),\, p_1]}$. Найти

$$\sup_g\left|\int_Q y(t)\,dg\right| \tag{12}$$

по всем мерам dg на Q (вещественным или комплексным — смотря по тому, какое пространство C мы рассматриваем), при условии

$$\int_Q |dg|\leqslant 1 \tag{13}$$

и таких моментах

$$C_\nu=\int_Q x_\nu(t)\,dg,$$

что при любых $(\lambda)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

$$\left|\sum_1^n\lambda_\nu C_\nu\right|\leqslant p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n). \tag{14}$$

В частности, может быть получена

Задача $\mathrm{II}_{[C(Q),\, \{\varepsilon_\nu\},\, r]}$, $1\leqslant r\leqslant\infty$. Найти (12) при условии (13) и таких моментах C_ν, $\nu=1,\ldots,n$, что

$$\left|\sum_1^n C_\nu\lambda_\nu\right|\leqslant\sqrt[r]{\sum_1^n\varepsilon_\nu|\lambda_\nu|^r}\,. \tag{15}$$

При $r=\infty$ имеем:

$$\left|\sum_1^n C_\nu\lambda_\nu\right|\leqslant\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|\varepsilon_\nu\lambda_\nu|. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что условия (15) и (16) соответственно эквивалентны следующим прямым условиям для моментов:

$$C_\nu=0,\ \text{если}\ \varepsilon_\nu=0\ \text{и}\ \sum{}'\left|\frac{C_\nu}{\varepsilon_\nu^{\frac{1}{r}}}\right|^{r'}\leqslant 1,\quad \frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=1,\quad 1<r<\infty, \tag{17}$$

$$|C_\nu|\leqslant\varepsilon_\nu,\quad \nu=1,\ldots,n\quad (r=1), \tag{18}$$

$$C_\nu=0,\ \text{если}\ \varepsilon_\nu=0\ \text{и}\ \sum{}'\left|\frac{C_\nu}{\varepsilon_\nu}\right|\leqslant 1\quad (r=\infty). \tag{19}$$

В соотношениях (17) и (19), являющихся эквивалентами (15) и (16), $\sum'$ обозначает суммирование по тем индексам ν, для которых $\varepsilon_\nu \neq 0$.

Задача $\mathrm{II}_{[C(Q),\,L^r_{\mu_1}(Q)]}$, $1 \leqslant r < +\infty$. Найти (12) по всем мерам dg на Q, удовлетворяющим условию (13) и условию

$$\left|\int_Q R(t)\,dg\right| \leqslant \sqrt[r]{\int_Q |R(t)|^r\,d\mu_1} \tag{20}$$

для любого многочлена

$$R(t) = \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu(t).$$

В задаче $\mathrm{II}_{[C(Q),\,C_\rho(Q)]}$ последнее неравенство заменяется неравенством

$$\left|\int_Q R(t)\,dg\right| \leqslant \max_{t\in Q} \rho(t)\,|R(t)|. \tag{21}$$

Задача $\mathrm{II}_{[L^q_\mu(Q),\,p_1]}$, $1 < q \leqslant \infty$. Найти

$$\max\left|\int_Q \alpha(t)\,y(t)\,d\mu\right| \tag{22}$$

по всем функциям α при условии

$$\int_Q |\alpha(t)|^q\,d\mu \leqslant 1 \tag{23}$$

(при $q = \infty$ неравенство (23) переходит в неравенство $\sup\limits_{t\in Q}|\alpha(t)| \leqslant 1$) и при таких моментах

$$C_\nu = \int_Q x_\nu(t)\,\alpha(t)\,d\mu, \tag{24}$$

для которых

$$\left|\sum_1^n C_\nu \lambda_\nu\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{25}$$

Дальнейшая конкретизация p_1 приводит (подобно тому, как это было описано выше) к задачам $\mathrm{II}_{[L^q_\mu(Q),\,\{\varepsilon_\nu\},\,r]}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ \ 1 \leqslant r \leqslant \infty)$, $\mathrm{II}_{[L^q_\mu(Q),\,L^r_{\mu_1}(Q)]}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 1 \leqslant r < +\infty)$, $\mathrm{II}_{[L^q_\mu(Q),\,C_\rho(Q)]}$.

Тесная связь задач I и II базируется на следующей основной теореме

ТЕОРЕМА 1. *Экстремальные величины* α *и* β *в задачах* I *и* II *равны между собой*:

$$\alpha = \beta. \tag{26}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы, которые, как и сама теорема 1, представляют собой обобщение некоторых из так называемых принципов двойственности, широко применяемых в настоящее время к исследованию экстремальных и аппроксимационных проблем. Такого рода простые принципы, вытекающие из теоремы о продолжении

линейного функционала, устанавливают двойственные связи между задачами аппроксимаций в данном пространстве и некоторыми линейными экстремальными задачами в сопряженном пространстве. Наличие таких связей оказывается весьма полезным для изучения обоих типов проблем. Впервые общая природа таких двойственных связей была отмечена и исследована М. Г. Крейном ([1]). Несколько иные двойственные связи были установлены С. М. Никольским ([2]). Изучению двойственных связей и приложению их к разнообразным вопросам экстремального характера посвящены также работы ([3])—([26]) (статья ([12]) имеет обзорный характер и содержит список литературы, относящейся к применению соотношений двойственности в теории аналитических функций. Мы не воспроизводим здесь этого списка, а цитируем лишь работы, в него не вошедшие).

ЛЕММА 1. *Пусть E — линейное пространство, $\mathscr{E} \subset E$ — подпространство, $p(x)$ — симметричный выпуклый функционал в E и B — множество линейных функционалов, удовлетворяющих неравенству*

$$|F(x)| \leqslant p(x), \quad x \in E, \tag{27}$$

и равных нулю на $\mathscr{E}$. Тогда для любого $x_0 \bar{\in} \mathscr{E}$ имеем:

$$\max_{F \in B} |F(x_0)| = \inf_{x \in \mathscr{E}} p(x_0 - x). \tag{28}$$

(Здесь и всюду в дальнейшем мы пишем max и min вместо sup и inf там, где sup или inf достигаются.)

Доказательство. Будем считать, что E — комплексное пространство, ибо в противном случае рассуждения только бы упростились. Прежде всего, при всяком $F \in B$ и любом $x \in \mathscr{E}$ имеем:

$$|F(x_0)| = |F(x_0 - x)| \leqslant p(x_0 - x) \tag{29}$$

и, значит,

$$\sup_{F \in B} |F(x_0)| \leqslant \inf_{x \in \mathscr{E}} p(x_0 - x). \tag{30}$$

Далее, рассматривая E только как вещественное линейное пространство, будем изучать вещественные линейные функционалы $F_1(x)$, для которых

$$|F_1(x)| \leqslant p(x), \quad x \in E, \quad \text{и} \quad F_1(x) = 0, \quad x \in \mathscr{E}. \tag{31}$$

Из обычного способа доказательства теоремы Хана—Банаха [см. ([27]), стр. 23, формула 3] следует, что найдется функционал $F_1^*(x)$, удовлетворяющий условиям (31) и такой, что

$$F_1^*(x_0) = \inf_{x \in \mathscr{E}} p(x_0 - x). \tag{32}$$

Образуем теперь комплексный функционал

$$F^*(x) = F_1^*(x) - iF_1^*(ix).$$

Тогда $F^*(x) = 0$, если $x \in \mathscr{E}$, и, обозначив $\arg F^*(x)$ через θ, найдем:

$$|F^*(x)| = e^{-i\theta} F^*(x) = F^*(e^{-i\theta}x) = F_1^*(e^{-i\theta}x) \leqslant$$
$$\leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x).$$

Так как, кроме того,

$$|F^*(x_0)| \geqslant F_1^*(x_0) = \inf_{x \in \mathscr{E}} p(x_0 - x),$$

то лемма полностью доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть E — локально-выпуклое линейное топологическое пространство, E^* — сопряженное пространство, $\mathscr{E}^* \subset E^*$ — подпространство в E^*, замкнутое в слабой топологии, $\mathscr{E} \subset E$ — подпространство в E, состоящее из всех общих нулей функционалов из $\mathscr{E}^*$, B — множество всех функционалов из $\mathscr{E}^*$, удовлетворяющих неравенству*

$$|F(x)| \leqslant p(x), \quad x \in E, \tag{33}$$

где $p(x)$ — симметричный выпуклый функционал, непрерывный в E. Тогда

$$\max_{F \in B} |F(x_0)| = \inf_{x \in \mathscr{E}} p(x_0 - x). \tag{34}$$

Доказательство. Любой линейный функционал $F(x)$, удовлетворяющий (33), непрерывен и, следовательно, принадлежит E^*. Кроме того, любой линейный непрерывный функционал, равный нулю на $\mathscr{E}$, входит в $\mathscr{E}^*$ [см. ([27]), стр. 65], так как $\mathscr{E}^*$ — слабо замкнутое в E^* множество. Значит, множество B в нашей лемме совпадает с множеством B из леммы 1. Применяя эту лемму, мы и получаем утверждение леммы 2.

Приступая к доказательству теоремы 1, рассмотрим топологическое произведение $\widetilde{E}$ пространств E и E_n, состоящее из элементов $\widetilde{x} = (x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $x \in E$, а $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n$. Легко понять, что произвольный непрерывный линейный функционал $F(\widetilde{x})$ над $\widetilde{E}$ имеет вид:

$$F(\widetilde{x}) = f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \lambda_\nu,$$

где $f(x)$ — произвольный непрерывный линейный функционал в E, а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные числа (вещественные или комплексные).

Функционал

$$\mathscr{P}(\widetilde{x}) = p(x) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{35}$$

будет непрерывным, выпуклым, симметричным функционалом в $\widetilde{E}$. Рассмотрим в сопряженном к $\widetilde{E}$ пространстве $\widetilde{E}^*$ подпространство $\mathscr{E}^*$, состоящее из таких векторов $F = (f, C_1, \ldots, C_n)$, для которых вектор $f \in E^*$ — произвольный, но $C_\nu = f(x_\nu)$, $x = 1, \ldots, n$. Подпространство $\mathscr{E}^*$ замкнуто в слабой топологии пространства $\widetilde{E}^*$. Рассмотрим в $\widetilde{E}$ подпространство $\mathscr{E}$, состоящее из всех общих нулей функционалов из $\mathscr{E}^*$. Пусть $\widetilde{x} = (x, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{E}$. Это значит, что при любом $f \in E^*$

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu) = 0,$$

или

$$f\left(x - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu\right) = 0,$$

а это означает, что

$$x \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu.$$

Пусть $A \subset \widetilde{E}^*$ — множество тех функционалов, для которых

$$|F(\widetilde{x})| \leqslant \mathscr{P}(\widetilde{x}). \tag{36}$$

Покажем, что A состоит из тех и только тех векторов $(f, C_1, \ldots, C_n)$, для которых

$$|f(x)| \leqslant p(x) \text{ и } \left|\sum_1^n C_\nu \lambda_\nu\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{37}$$

В самом деле, если для вектора $F = (f, C_1, \ldots, C_n)$ выполняются неравенства (37), то при любом $\widetilde{x} \in E$ имеем:

$$|F(\widetilde{x})| = \left|f(x) - \sum_{\nu=1}^n C_\nu \lambda_\nu\right| \leqslant |f(x)| + \left|\sum_{\nu=1}^n C_\nu \lambda_\nu\right| \leqslant$$
$$\leqslant p(x) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathscr{P}(\widetilde{x}),$$

т. е. (36) следует из (37). Пусть, наоборот, имеет место (36). Взяв для произвольного $x \in E$ элемент $\widetilde{x} = (x, 0, \ldots, 0)$, найдем из (36) и (35), что $|f(x)| \leqslant p(x)$. Взяв, далее, для произвольного $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n$ элемент $(0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \widetilde{E}$, находим из (36), что

$$\left|\sum_{\nu=1}^n C_\nu \lambda_\nu\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Эквивалентность (36) и (37) таким образом установлена.

Положим $B = A \cap \mathscr{E}^*$ и применим лемму 2 к элементу $\widetilde{x}_0 = (y, 0, \ldots, 0)$. Тогда, используя (37) и (35), получаем:

$$\max_{F \in B} |F(\widetilde{x}_0)| = \max_{\substack{|f(x)| \leqslant p(x) \\ \left|\sum_1^n f(x_\nu)\lambda_\nu\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}} |f(y)| = \beta = \inf_{\widetilde{x} \in \mathscr{E}} \mathscr{P}(\widetilde{x}_0 - \widetilde{x}) =$$

$$= \inf_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \left[p\left(y - \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu x_\nu\right) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\right] = \alpha. \tag{38}$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют экстремальные полиномы* $P^* = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu$ *в задаче* I *и экстремальные функционалы* f^* *в задаче* II. *Для того чтобы допустимый функционал* f^* *был экстремальным в задаче* II, *а полином* $P^* = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu$ *был экстремальным в задаче* I, *необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:*

$$f^*(y - P^*) = e^{i\theta} p(y - P^*), \tag{39}$$

$$\sum_1^n \lambda_\nu^* f^*(x_\nu) = e^{i\theta} p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \tag{40}$$

(*θ — произвольное вещественное число*), *а при всех* $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — *условие*

$$\left|\sum_1^n \lambda_\nu f^*(x_\nu)\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{41}$$

Доказательство. Существование экстремального функционала f^* доказано в теореме 1 (что отмечено в записи max, а не просто sup в формуле (38)), а доказательство существования минимизирующего агрегата P^* может быть проведено обычными в таких вопросах средствами, и мы на нем останавливаться не будем.

Пусть f^* и P^* — экстремальные элементы. Тогда

$$|f^*(y)| = |f^*(y - P^*) + f^*(P^*)| \leqslant |f^*(y - P^*)| + \\ + \left|\sum_1^n f^*(x_\nu)\lambda_\nu^*\right| \leqslant p(y - P^*) + p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*). \tag{42}$$

Поскольку, по теореме 1, в формуле (42) имеют место равенства, то (39) и (40) выполняются. Обратно, из (39) и (40) следует, что

$$|f^*(y)| = |f^*(y - P^*) + f^*(P^*)| = |f^*(y - P^*)| + \\ + |f^*(P^*)| = p(y - P^*) + p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$$

и, значит, f^* и P^* — экстремальные элементы. Теорема 2 доказана.

Будем называть вектор $x_0 \neq 0$ экстремальным для функционала f^*, удовлетворяющего условию (3), если

$$|f(x_0)| = p(x_0).$$

Тогда теорема 2 может быть сформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 2′. *Для того чтобы допустимый функционал f^* и полином P^* были экстремальными элементами в задачах* I *и* II, *необходимо и достаточно, чтобы элемент $y - P^*$ был экстремальным для функционала f^*, а элемент $(\lambda^*) = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$ был экстремальным для функционала $\sum_1^n f^*(x_\nu)\lambda_\nu$ (если $(\lambda^*) \neq 0$) и, кроме того, чтобы выполнялись условие* (41) *и равенство*

$$\arg f^*(y - P^*) = \arg\left[\sum_1^n f^*(x_\nu)\lambda_\nu^*\right].$$

Рассмотрим, в качестве примера, функционал

$$p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_1^n \varepsilon_\nu |\lambda_\nu|.$$

Для экстремального полинома получаем в этом случае:

$$|f^*(P^*)| = \left|\sum_1^n \lambda_\nu^* f^*(x_\nu)\right| = \sum_1^n \varepsilon_\nu |\lambda_\nu^*|, \tag{42′}$$

хотя, согласно постановке задачи $\mathrm{II}_{[p, \{\varepsilon_\nu\}, 1]}$ (см. (18)), мы должны

были иметь:

$$|f^*(x_\nu)| \leqslant \varepsilon_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{43}$$

Поэтому соотношения (42') и (43) эквивалентны следующим:

$$\begin{gathered} f^*(x_\nu) = \varepsilon_\nu e^{i(\theta - \alpha_\nu)}, \text{ если } \lambda_\nu^* \neq 0, \text{ причем } \alpha_\nu = \arg \lambda_\nu^*, \\ f^*(x_\nu) = \delta_\nu, \end{gathered} \tag{44}$$

где δ_ν — произвольное число, для которого $|\delta_\nu| \leqslant \varepsilon_\nu$, если $\lambda_\nu^* = 0$.

Следствие. *Если функционал $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ достаточно велик, а именно, если при всех f, удовлетворяющих* (3), *и всех $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ имеет место строгое неравенство*

$$\left| \sum_1^n \lambda_\nu f(x_\nu) \right| < p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

то единственным экстремальным элементом в задаче I *будет $P^* = 0$, а экстремальными в задаче* II *будут все те функционалы f^*, удовлетворяющие* (3), *для которых*

$$|f^*(y)| = p(y).$$

Рассмотрим, например,

$$p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_1^n \varepsilon_\nu |\lambda_\nu|.$$

Если при всех $\nu = 1, \ldots, n$

$$\varepsilon_\nu > \sup_f |f(x_\nu)|, \quad |f(x)| \leqslant p(x),$$

то из (44) найдем, что у экстремального полинома

$$\lambda_\nu^* = 0, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

т. е. экстремальный полином есть нуль. Более того, в этом случае, если вообще

$$\varepsilon_{\nu_0} > \sup_f |f(x_{\nu_0})|, \quad |f(x)| \leqslant p(x),$$

то $\lambda_{\nu_0}^* = 0$.

Расширяя терминологию М. Г. Крейна ([1]), будем называть функционал $f(x)$, удовлетворяющий условию (3), нормальным, если он имеет экстремальный элемент и все его экстремальные элементы отличаются лишь скалярными множителями. Элемент $x_0 \in E$ ($x_0 \neq 0$) назовем нормальным по полунорме $p(x)$), если функционалы $f(x)$, удовлетворяющие условиям

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in E, \quad |f(x_0)| = p(x_0), \tag{45}$$

определяются единственным образом с точностью до постоянного множителя k, $|k| = 1$. Известно, что хоть один функционал, удовлетворяющий условиям (45), всегда существует [см., например, ([27]), стр. 24].

Имеют место следующие критерии единственности, аналогичные полученным М. Г. Крейном в работе ([1]) для изучавшихся там задач.

ТЕОРЕМА 3. *Если среди решений задачи I существует хоть одно решение P^* такое, что $y - P^*$ есть нормальный элемент, то решение задачи II единственно с точностью до постоянного множителя k, $|k| = 1$. Если среди решений задачи II имеется хоть одно нормальное, то решение задачи I единственно. В частности, если E — пространство типа B и $p(x)$ — его норма, то в случае, когда E — строго нормированное пространство, решение задачи I единственно, если же строго нормированным оказывается пространство E^*, то решение задачи II единственно.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы являются непосредственным следствием теоремы 2. Докажем последнее утверждение. Если E строго нормировано, то всякий функционал над E нормален [см. ([1]), стр. 178—179], а если E^* строго нормировано, то всякий элемент из E, будучи линейным функционалом для E^*, нормален. Теорема доказана.

Интересно отметить, что строгая нормировка функционала $p_1(\lambda)$ не обеспечивает единственности. В самом деле, пусть, например, E — пространство суммируемых на $[0, 3]$ функций:

$$E = L_1([0, 3]), \quad p(x) = \int_0^3 |x(t)|\, dt.$$

Положим $p_1(\lambda) = |\lambda|$, $x_1(t) \equiv 1$,

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2], \\ 0, & t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Тогда легко доказать, что

$$\alpha = \min_{\lambda} [p(y - \lambda x_1) + p_1(\lambda)]$$

достигается при любом λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Приведем простую теорему об абсолютном характере экстремумов в задачах I и II. Для задачи I в том простейшем ее случае, когда $p_1(\lambda) \equiv 0$ (обыкновенная аппроксимация), эта теорема совпадает с результатом С. И. Зуховицкого ([7]).

ТЕОРЕМА 4. 1°. *Если точка $(\lambda^*) = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*)$ такова, что для всех $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, лежащих в некоторой окрестности точки (λ^*),*

$$p\left(y - \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu\right) + p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \leqslant p\left(y - \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu\right) + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \tag{46}$$

то полином $P^* = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu$ дает решение задачи I.

2°. *Пусть A — множество всех функционалов из E^*, удовлетворяющих условиям (3) и (4). Если для некоторого функционала $f^* \in A$ существует такая окрестность $S \subset E^*$, что при всех $f \in S \cap A$*

$$|f^*(y)| \geqslant |f(y)|, \tag{47}$$

то f^* дает решение задачи II.

Доказательство. Пусть $P^{**} = \sum_1^n \lambda_\nu^{**} x_\nu$ есть решение задачи I, а P^* таковым не является, огда при любом t, $0 < t < 1$, имеем:

$$p(y - tP^* - (1-t)P^{**}) + p_1(t(\lambda^*) + (1-t)(\lambda^{**})) \leqslant$$
$$\leqslant t[p(y - P^*) + p_1(\lambda^*)] + (1-t)[p(y - P^{**}) + p_1(\lambda^{**})] <$$
$$< p(y - P^*) + p_1(\lambda^*). \quad (48)$$

Но при t, близком к единице, точка $t(\lambda^*) + (1-t)(\lambda^{**})$ попадает в окрестность точки (λ^*), упомянутую в условиях теоремы, и неравенство (48) придет в противоречие с неравенством (46).

Пусть теперь функционал $f^{**} \in A$ дает решение задачи II, а f^* не дает. При этом можно считать, что

$$\arg f^*(y) = \arg f^{**}(y).$$

Мы имеем:

$$|tf^*(y) + (1-t)f^{**}(y)| = t|f^*(y)| + (1-t)|f^{**}(y)| > |f^*(y)|. \quad (49)$$

Но (49) противоречит (47), ибо при t, близком к единице, функционал $tf^* + (1-t)f^{**} \in S \cap A$.

Нижеследующая теорема 5 играет важную роль в исследовании ряда вопросов в разбираемых нами задачах, и хотя эта теорема, по сути дела является известной [см. ([1]), а также ([28])], мы, в целях полноты изложения, приведем ее доказательство.

Рассмотрим в n-мерном вещественном или комплексном пространстве R_n множество B точек $(c_1, \ldots, c_n)$, имеющих представление:

$$c_\nu = f(x_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

где $f(x)$ — некоторый функционал, удовлетворяющий неравенству (3), причем $p(x)$ — норма (т. е. $p(x) = 0$ равносильно $x = 0$).

ТЕОРЕМА 5. *B есть замкнутое, ограниченное, симметричное выпуклое тело, содержащее начало координат в качестве внутренней точки. Если $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$ — граничная точка B, то ей соответствует функционал f^*, имеющий в качестве экстремального элемента некоторый полином $P^* = \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu^*$. Обратно, всякому функционалу f^*, имеющему в качестве экстремального элемента некоторый полином P^*, соответствует в B граничная точка.*

Доказательство. Выпуклость, симметрия и ограниченность B очевидны. Чтобы доказать замкнутость, можно рассуждать следующим образом. Множество A всех функционалов f, удовлетворяющих неравенству (3), как известно, бикомпактно в слабой топологии пространства E^* [см. ([27]), стр. 57)]. Оператор $T(f)$, ставящий в соответствие каждому функционалу $f \in A$ точку $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ пространства R_n, дает непрерывное отображение A в R_n. Но непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен [см. ([27]), стр. 31]. Всякое же бикомпактное множество в R_n ограничено и замкнуто. Докажем теперь, что B — тело,

т. е. содержит внутренние точки. Будем считать, что R_n комплексное (вещественный случай только проще) и будем смотреть на R_n как на $2n$-мерное вещественное пространство. Если бы B не содержало внутренних точек, то оно все лежало бы в некоторой гиперплоскости

$$\sum_1^n \alpha_k X_k + \beta_k Y_k = 0$$

($X_k + iY_k = C_k$, $k = 1, \ldots, n$, α_k, β_k — коэффициенты, не все равные нулю). Положив $\gamma_k = \alpha_k - i\beta_k$, запишем уравнение гиперплоскости в комплексной форме:

$$\operatorname{Re} \sum_1^n \gamma_k C_k = 0.$$

Наше допущение о B ведет, таким образом, к тождеству

$$\operatorname{Re} \sum_1^n f(\gamma_k x_k) = 0$$

или, в силу симметрии B, к тождеству

$$\sum_1^n f(\gamma_k x_k) = 0$$

при всех функционалах f, удовлетворяющих (3). Но так как $p(x)$ — норма, то отсюда следует, что

$$\sum_1^n \gamma_k x_k = 0$$

и, значит,

$$\gamma_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Действительно, если бы

$$\sum_1^n \gamma_k x_k \neq 0,$$

то

$$p\left(\sum_1^n \gamma_k x_k\right) \neq 0.$$

Но тогда во множестве A функционалов, удовлетворяющих неравенству (3), найдется такой, для которого

$$\left| f\left(\sum_1^n \gamma_k x_k\right) \right| = p\left(\sum_1^n \gamma_k x_k\right) \neq 0.$$

Итак, B — выпуклое тело. Пусть $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$ — граничная точка B. По теореме Минковского, через нее можно провести гиперплоскость

$$\sum^n \alpha_k^* X_k + \beta_k^* Y_k = \delta^*$$

так, что для всех точек $(C_1 = X_1 + iY_1, \ldots, C_n = X_n + iY_n) \in B$ будем иметь:

$$\sum_1^n \alpha_k^* X_k + \beta_k^* Y_k \leqslant \delta = \sum_1^n \alpha_k^* X_k^* + \beta_k^* Y_k^* \quad (C_k^* = X_k^* + iY_k^*, k = 1, \ldots, n),$$

или, введя $\gamma_k^* = \alpha_k^* - i\beta_k^*$,

$$\operatorname{Re} \sum_1^n \gamma_k^* C_k \leqslant \operatorname{Re} \sum_1^n \gamma_k^* C_k^*.$$

Так как B симметрично, то предыдущее неравенство эквивалентно следующему:

$$\left| \sum_1^n \gamma_k^* C_k \right| \leqslant \left| \sum_1^n \gamma_k^* C_k^* \right|.$$

Построив полином

$$R^* = \sum_1^n \gamma_k^* X_k \neq 0,$$

получаем:

$$|f(R^*)| \leqslant |f^*(R^*)|$$

для всех $f \in A$. Но известно (частный случай леммы 2), что

$$|f^*(R^*)| = \max_{f \in A} |f(R^*)| = p(R^*).$$

Значит, функционал f^*, соответствующий граничной точке $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$, имеет в качестве экстремального элемента некоторый полином R^*. Проводя последние рассуждения в обратном порядке, можно заключить, что, наоборот, всякому функционалу f^*, имеющему в качестве экстремального элемента некоторую линейную комбинацию

$$R^* = \sum_1^n \gamma_k^* x_k,$$

соответствует в B граничная точка. Поскольку же началу координат не может соответствовать никакой функционал f^*, имеющий в качестве экстремального элемента нетривиальную линейную комбинацию

$$\sum_1^n \gamma_k^* x_k \neq 0,$$

то $O(0, \ldots, 0)$ есть внутренняя точка B.

В качестве следствия мы получаем для интересующей нас проблемы такой результат:

ТЕОРЕМА 6. *Если E — строго нормированное пространство и $p(x)$ — норма в нем, а $f^*(x)$ — функционал, экстремальный в проблеме* II, *то точка $(f^*(x_1), \ldots, f^*(x_n))$ является внутренней для тела B (построенного в теореме* 5).

Доказательство. Допустим, что $(f^*(x_1), \ldots, f^*(x_n))$ — граничная точка тела B. Тогда, то теореме 5, функционал f^* имеет экстремальный элемент

$$R^* = \sum_1^n \gamma_k^* x_k.$$

С другой стороны, по теореме 2, экстремальным для f^* является элемент $y - P^*$, где

$$P^* = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu.$$

Поскольку пространство E строго нормировано, то все экстремальные элементы f^* могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем [см. ([1])], а это ведет к линейной зависимости y от $x_1, \ldots, x_n$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечание. Если $p(x)$ не является нормой строго нормированного пространства E, то точка $(f^*(x_1), \ldots, f^*(x_n))$ может лежать на границе тела B — это следует из некоторых предложений § 2.

§ 2. Задачи $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q),\, p_1]}$ и $\mathrm{II}_{[L_\mu^q(Q),\, p_1]}$

Пусть линейно независимые функции $y(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$ входят в $L_\mu^p(Q)$.

Рассмотрим сперва случай $p > 1$. С помощью общих теорем § 1 получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы полином* $P^*(t) = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^* x_\nu(t)$ *был решением задачи* $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q),\, p_1]}$, $p > 1$, *а функция* $\alpha^*(t)$ *была решением задачи* $\mathrm{II}_{[L_\mu^q(Q),\, p_1]}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы множество* Q_1, *на котором равна нулю функция* $\alpha^*(t)$, *совпадало с точностью до множества меры* (μ) *нуль с множеством* Q_2, *где* $y(t) - P^*(t) = 0$, *и чтобы на множестве* $Q \setminus Q_1$ *выполнялось равенство*:

$$\alpha^*(t) = Ae^{i\theta} \frac{|y(t) - P^*(t)|^p}{y(t) - P^*(t)}, \quad A > 0, \quad \theta \text{ — вещественное}, \tag{50}$$

или, что то же,

$$y(t) - P^*(t) = Be^{i\theta} \frac{|\alpha^*(t)|^q}{\alpha^*(t)}, \quad B > 0. \tag{51}$$

Кроме того, должны удовлетворяться условия:

$$\int_Q |\alpha^*(t)|^q \, d\mu = 1, \tag{52}$$

$$\int_Q \alpha^*(t) P^*(t) \, d\mu = e^{i\theta} p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*), \tag{53}$$

а для произвольного $P(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t)$ — *условие*

$$\left| \int_Q \alpha^*(t) P(t)\, d\mu \right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{54}$$

При этом экстремальный многочлен $P^*(t)$ *и экстремальная функция* $\alpha^*(t)$ *определяются единственным образом.*

Доказательство. Пусть $\alpha^*(t)$ и $P^*(t)$ — экстремальные функции. Так как, по неравенству Гёльдера — Рисса,

$$\left| \int_Q \alpha^*(t)\,[y(t) - P^*(t)]\, d\mu \right| \leqslant \int_Q |\alpha^*(t)\,[y(t) - P^*(t)]|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_Q |\alpha^*(t)|^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_Q |y(t) - P^*(t)|^q d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int_Q |y(t) - P^*(t)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{55}$$

а в силу теоремы 2 в этой цепочке неравенств всюду должны быть равенства, то прежде всего выполняется условие (52). Отсюда следует совпадение множеств нулей $\alpha^*(t)$ и $y(t) - P^*(t)$ с точностью до множеств меры нуль. Действительно, если бы, например, на Q_2, где $y(t) - P^*(t) = 0$, не было равенства $\alpha^*(t) = 0$ почти везде, то мы имели бы:[3]

$$\left| \int_Q \alpha^*(t)\,[y(t) - P^*(t)]\, d\mu \right| = \left| \int_{Q \setminus Q_2} \alpha^*(t)\,[y(t) - P^*(t)]\, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_Q |\alpha^*(t)|^q d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_Q |y(t) - P^*(t)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} < \left\{ \int_Q |y(t) - P^*(t)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Но строгое неравенство здесь невозможно.

Далее,

$$\arg\{\alpha^*(t)\,[y(t) - P^*(t)]\} = \text{const} = \theta$$

почти везде (μ) на $Q \setminus Q_1$ и

$$|\alpha^*(t)|^q = C\,|y(t) - P^*(t)|^p, \quad C > 0,$$

опять-таки в силу наличия равенств во всех звеньях цепочки (55) [см. ([30])], а это эквивалентно равенствам (50) и (51). Наконец, условия (53) и (54) представляют собой конкретизацию условий (40) и (41) теоремы 2.

Мы доказали, что экстремальные функции $\alpha^*(t)$ и $y(t) - P^*(t)$ удовлетворяют всем соотношениям (50)—(54). Обратно, если все эти соотношения выполнены для какой-нибудь функции $\alpha^*(t)$ и разности $y(t) - p^*(t)$, то из (50) и (52) будет следовать выполнение равенств в цепочке (55), а значит, и экстремальность элемента $y(t) - P^*(t)$ для функционала, порождаемого функцией $\alpha^*(t)$. Но это вместе с (53) и (54) означает, в силу теоремы 2, экстремальность $\alpha^*(t)$ и $P^*(t)$ в задачах II и I соответственно.

Единственность экстремальных функций $\alpha^*(t)$ и $P^*(t)$ вытекает из теоремы 3, так как пространство $L^p_\mu(Q)$, $p>1$, строго нормировано.

Совершенно так же устанавливается

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы полином* $P^*(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^*_\nu x_\nu(t)$ *был экстремальным в задаче* $\mathrm{I}_{[L^1_\mu(Q),\,p_1]}$, *а функция* $\alpha^*(t)$, $|\alpha^*(t)|\leqslant 1$, *почти везде на* Q *была экстремальной в задаче* $\mathrm{II}_{[L^\infty_\mu(Q),\,p_1]}$, *необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на* Q *имели место равенство*

$$\alpha^*(t)\,[y(t)-P^*(t)]=e^{i\theta}\,|y(t)-P^*(t)| \tag{56}$$

(θ — *вещественное*) *и соотношения* (53) *и* (54).

Замечание. Если $p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\equiv 0$, то теоремы 7 и 8 дают характеристический признак полинома наименьшего уклонения в метриках $L^p_\mu(Q)$, $p\geqslant 1$ [см. ([1]), ([2]), ([9]), ([10]), ([11]), ([15]), ([16]), ([30])].

Вопрос о единственности экстремальных функций в задаче $\mathrm{I}_{[L^1_\mu(Q),\,p_1]}$ и задаче $\mathrm{II}_{[L^\infty_\mu(Q),\,p_1]}$ труднее, чем в теореме 5, и требует специального изучения. Мы уже исследовали в свое время эту проблему (см. ([9]) и ([10]), где приведена библиография предшествующих работ) для $p_1(\lambda)=0$ — обычной аппроксимации в L^1. Здесь мы приведем некоторые результаты для общего случая. Заметим, что пример, показывающий возможность отсутствия единственности для P^*, уже был приведен. Это же следует из известных примеров [см. ([1])] в случае, когда $p_1(\lambda)\equiv 0$. Дальнейшие примеры множественности экстремальных функций $P^*(t)$ будут даны ниже.

Из теоремы 5 вытекает нужная нам для дальнейшего

ТЕОРЕМА 9. *Пусть* B_q, $1\leqslant q\leqslant+\infty$, — *множество точек* $(C_1,\ldots,C_n)$ n-*мерного (комплексного или вещественного) пространства* R_n, *координаты которых* C_ν, $\nu=1,\ldots,n$, *имеют представление*

$$C_\nu=\int_Q \alpha(t)\,x_\nu(t)\,d\mu,\quad \nu=1,\ldots,n, \tag{57}$$

где

$$\int_Q|\alpha(t)|^q\,d\mu\leqslant 1\quad(1\leqslant q<+\infty), \tag{58}$$

или

$$|\alpha(t)|\leqslant 1\quad(q=\infty). \tag{59}$$

Тогда B_q *есть замкнутое, ограниченное, выпуклое, симметричное тело в* R_n, *содержащее начало координат в качестве внутренней точки. Каждой граничной точке в* B_q, $1<q<+\infty$, *соответствует в* (57) *единственная функция* $\alpha^*(t)$ *и единственный полином*

$$R^*(t)=\sum_{1}^{n}\gamma^*_k x_k(t)$$

такие, что $\alpha^*(t) = 0$ *там и только там, где* $R^*(t) = 0$ *и*

$$\alpha^*(t) = A\frac{|R^*(t)|^p}{R^*(t)}, \quad R^*(t) \neq 0, \qquad A > 0, \tag{60}$$

а в (58) *для* $\alpha^*(t)$ *имеет место равенство.*

Далее, всякая функция $\alpha^*(t)$, *соответствующая некоторой граничной точке в* B_∞, *удовлетворяет соотношению*

$$\alpha^*(t)\, R^*(t) = |R^*(t)| \text{ почти везде } (\mu), \tag{61}$$

причем эта функция единственна, если связанный с нею в (61) *многочлен* $R^*(t) \neq 0$ *почти везде* (μ) *на* Q.

Обратно, всякой функции $\alpha^*(t)$, *удовлетворяющей* (60) *или* (61), *отвечает граничная точка в* B_q, *соответственно в* B_∞.

Теорема 9 доказывается на основе теоремы 5 с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства теоремы 7.

Заметим, что в случае, когда $Q = [a, b]$, функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ образуют систему П. Л. Чебышева на (a, b), а мера μ такова, что каждая непустая порция $[a, b]$ имеет положительную меру, утверждение нашей теоремы, относящееся к B_∞, является частным случаем одной теоремы М. Г. Крейна [см. ([32]), теорема 1.3, гл. II].

ТЕОРЕМА 10. *Пусть* $Q = [a, b]$, *вещественные функции* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *непрерывны на* (a, b) *и образуют там систему П. Л. Чебышева, вещественная функция* $y(t)$ *непрерывна на* (a, b), *мера* μ *такова, что каждая непустая порция* $[a, b]$ *имеет положительную меру (т. е.* $[a, b]$ *есть приведенное множество относительно меры* μ), *а мера всякого одноточечного множества равна нулю. Пусть, далее, функционал* $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *таков, что если функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет неравенствам* (24) *и* (25), *то внутри тела* B_∞ *существует точка* $(C_1, \ldots, C_n)$ *такая, что*

$$C_\nu = \int_Q \alpha(t)\, x_\nu(t)\, d\mu, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Тогда экстремальный полином $P^*(t)$ *в задаче* $\mathrm{I}_{[L^1_\mu([a,b]),\, p_1]}$ *единственен.*

В самом деле, допустим, что существуют два экстремальных полинома

$$P^*(t) = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu(t)$$

и

$$P^{**}(t) = \sum_1^n \lambda_\nu^{**} x_\nu(t).$$

Возьмем числа $0 < s_1 < s_2 < 1$ и образуем полиномы P_i:

$$P_i(t) = s_i P^*(t) + (1 - s_i) P^{**}(t), \quad i = 1, 2. \tag{62}$$

Так как

$$|y(t) - P_i(t)| \leqslant s_i |y(t) - P^*(t)| + (1 - s_i)|y(t) - P^{**}(t)|, \tag{63}$$

$$p_1(s_i(\lambda^*) + (1 - s_i)(\lambda^{**})) \leqslant s_i p_1(\lambda^*) + (1 - s_i)\, p_1(\lambda^{**}), \tag{63'}$$

то P_1 и P_2 являются также экстремальными многочленами и, кроме того,

в (63) имеют место равенства. Но тогда из (63) следует, что разности $y(t) - P_i(t)$ обращаются в нуль лишь в тех точках, в которых одновременно

$$y(t) - P^*(t) = 0 \text{ и } y(t) - P^{**}(t) = 0,$$

а эти точки составляют часть тех точек, где

$$P^*(t) = P^{**}(t).$$

Так как функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ образуют систему П. Л. Чебышева на (a, b), то число упомянутых сейчас точек на (a, b) не превосходит $n - 1$. Пусть $t_1, \ldots, t_s$ — те из этих точек ($s \leqslant n - 1$), в которых разность $y(t) - P_1(t)$ меняет знак. Построим полином

$$R(t) = \sum_1^n \delta_\nu x_\nu(t),$$

меняющий знак в точках $t_1, \ldots, t_s$ и только в них. Такой полином, в силу свойств систем П. Л. Чебышева, всегда существует. Пусть $\alpha^*(t)$ — функция, решающая проблему $\mathrm{II}_{[L_\mu^\infty([a,b]),\, p_1]}$. В силу теоремы 7 имеем:

$$\alpha^*(t)\,[y(t) - P_i(t)] = |\,y(t) - P_i(t)\,|, \quad i = 1, 2, \tag{64}$$

почти всюду (μ), а значит, $\alpha^*(t)\,R(t) = |\,R(t)\,|$ почти всюду (μ), так как последнее равенство может нарушаться дополнительно по сравнению с предыдущим лишь в тех нулях $y(t) - P_1(t)$, в которых не происходит смены знака этой разности, но мера всякого конечного множества точек равна, по условию теоремы, нулю. В силу теоремы 9 отсюда следует, что точка $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$, где

$$C_\nu^* = \int_a^b x_\nu(t)\,\alpha^*(t)\,d\mu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

— граничная для B_∞, а это противоречит предположениям о функционале $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

З а м е ч а н и е. Если $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv 0$, то теорема 10 верна для любой меры μ, удовлетворяющей лишь первому из наложенных в теореме на μ требований [см. ([10]), теорема 8]. Доказательство следует из того, что в этом случае для любого полинома $P(t)$ имеет место равенство

$$\int_a^b \alpha^*(t)\,P(t)\,d\mu = 0,$$

в то время как для построенного нами полинома $R(t)$

$$\int_a^b \alpha^*(t)\,R(t)\,d\mu \neq 0.$$

Приведем простой пример, показывающий, что условие, наложенное в теореме на p_1, существенно.

Пусть $Q = [0, 1]$, система П. Л. Чебышева на $(0, 1)$ состоит из одной функции $x_1(t) \equiv t$, $y(t) = t + 1$, $p_1(\lambda) = \frac{1}{2}|\lambda|$, $d\mu = dt$. При $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$ имеем:

$$s(\lambda) = \int_0^1 |y(t) - \lambda x_1(t)|\, dt + p_1(\lambda) = \int_0^1 (t+1)\, dt - \lambda \int_0^1 t dt + \frac{1}{2}\lambda = \frac{3}{2}.$$

При $\lambda > 2$

$$s(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda-1}} [t + 1 - \lambda t]\, dt + \int_{\frac{1}{\lambda-1}}^1 [\lambda t - t - 1]\, dt + \frac{1}{2} = \lambda + \frac{1}{\lambda-1} - \frac{3}{2} > \frac{3}{2}.$$

Таким образом, любая функция λt, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$, является экстремальной, и единственности здесь нет. Точка $\frac{1}{2}$ является граничной для тела B_∞.

ТЕОРЕМА 11. *Если в условиях теоремы* 10 *экстремальная разность* $y(t) - P^*(t)$ *обращается в нуль лишь на множестве меры* (μ) *нуль, то она меняет знак не менее чем в* n *точках. Если же* $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv 0$ (*обычное наилучшее приближение в* $L^1_\mu([a, b])$), *то экстремальная разность меняет знак не менее чем в* n *точках, причем на меру* μ *в этом случае достаточно наложить лишь первое требование из теоремы* 10.

Доказательство. Пусть, сначала, $p_1 \not\equiv 0$. Обозначим через $t_1, \ldots, t_s$, $s \leqslant n - 1$, те нули разности $y(t) - P^*(t)$, в которых она меняет знак, и пусть

$$R(t) = \sum_1^n \delta_\nu x_\nu(t)$$

— полином, меняющий знак в этих и только в этих точках.

Так как

$$\alpha^*(t)\, [y(t) - P^*(t)] = |y(t) - P^*(t)|$$

почти везде (μ), то и

$$\alpha^*(t)\, R(t) = |R(t)|$$

почти везде (μ), ибо последнее равенство могло бы нарушаться дополнительно по сравнению с предыдущим лишь в некоторых нулях разности $y(t) - P^*(t)$ (не вошедших в $t_1, \ldots, t_s$), а множество всех нулей имеет нулевую меру. Мы получили такое же противоречие, как в конце доказательства теоремы 10. Если теперь $p_1 \equiv 0$, то

$$\int_a^b \alpha^*(t)\, P(t)\, d\mu = 0$$

для любого полинома $P(t)$. Но очевидно, что

$$\int_a^b \alpha^*(t)\, R(t)\, d\mu \neq 0.$$

Теорема доказана. (Случай $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) \equiv 0$ известен [см. ([31])], когда мера $d\mu = dt$.)

Заметим, что, несмотря на теорему 6, аналог теоремы 11 несправедлив для задачи $\mathrm{I}_{[L_\mu^p, p_1]}$ при $p > 1$.

Пример. Пусть $Q = [0, 1]$, $y(t) = t$, $x_1(t) \equiv 1$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $d\mu = dt$.

Положим

$$\alpha^*(t) = (p+1)^{-\frac{1}{q}} t^{\frac{p}{q}}.$$

Тогда

$$\int_0^1 |\alpha^*(t)|^q \, dt = 1.$$

Функция $\alpha^*(t)$ дает решение задачи:

$$\max \left| \int_0^1 \alpha(t) \; y(t) \, dt \right| \tag{65}$$

по всем функциям $\alpha(t)$, для которых

$$\int_0^1 |\alpha(t)|^q \, dt \leqslant 1, \tag{66}$$

ибо

$$\alpha^*(t) = A \frac{|y(t)|^p}{y(t)} \quad \left(A = (p+1)^{-\frac{1}{q}}\right).$$

Далее,

$$C = \int_0^1 \alpha^*(t) x_1(t) \, dt = \int_0^1 (p+1)^{-\frac{1}{q}} t^{\frac{p}{q}} \, dt = (p+1)^{-\frac{1}{q}} \left(\frac{p}{q} + 1\right)^{-1} < 1.$$

Но легко видеть, что тело B_q в нашем случае есть отрезок $[-1, 1]$. Поэтому точка C есть внутренняя точка тела B_q. Рассмотрим функционал $p_1(\lambda) = \varepsilon |\lambda|$, где $C < \varepsilon < 1$. Тогда в задаче $\mathrm{II}_{[L_\mu^q([0,1]), p_1]}$, в которой требуется найти (65) при $\alpha(t)$, удовлетворяющих условию (66) и неравенству

$$\left| \int_0^1 \alpha(t) \cdot 1 \cdot dt \right| \leqslant \varepsilon, \tag{67}$$

экстремальной будет функция $\alpha^*(t)$, ибо ее момент C удовлетворяет неравенству (67) и она дает абсолютный максимум (64) лишь при единственном условии (66). Так как

$$\alpha^*(t) = A \frac{|y(t)|^p}{y(t)},$$

то экстремальная разность в задаче $\mathrm{I}_{[L_\mu^p([0,1]), p_1]}$ есть сама функция $y(t)$, но она ни разу не меняет знака.

Тем не менее справедлива следующая

ТЕОРЕМА 12. *Пусть* $Q=[a,b]$, $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, $y(t)$ *непрерывны на* (a,b), $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ — *система П. Л. Чебышева на* (a,b), μ — *такая мера, что каждая непустая порция отрезка* $[a,b]$ *имеет положительную меру,* $p>1$. *Тогда, каков бы ни был функционал* $p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, *найдется число* $\delta_0>0$ *такое, что при всех* $\delta\leqslant\delta_0$ *в задаче* $\mathrm{I}_{[L_\mu^p([a,b]),\,\delta p_1]}$ *экстремальная разность* $y(t)-P^*(t)$ *меняет знак не менее чем* n *раз на интервале* (a,b).

Допуская противное, мы найдем последовательность чисел $\{\delta_k\}$, $\delta_k\to 0$, для которой экстремальные разности $y(t)-P_k^*(t)$ в задачах $\mathrm{I}_{[L_\mu^p([a,b]),\,\delta_k p_1]}$ меняют знак не более чем в $n-1$ точке. Можно считать, что таких точек у всех задач одно и то же количество $s\leqslant n-1$. Пусть $t_1^k,\ldots,t_s^k$ — точки перемены знака разности $y(t)-P_k^*(t)$. Мы можем также считать, что при любом k на интервале (a,t_1^k) знак разности положительный. Тогда на любом интервале (t_i^k,t_{i+1}^k) при любом k знаки разностей будут совпадать. Знак функции $\alpha_k^*(t)$, решающей проблему $\mathrm{II}_{[L_\mu^q([a,b]),\,\delta_k p_1]}$, совпадает, на основании теоремы 7, со знаком разности $y(t)-P_k^*(t)$. В силу слабой компактности сферы в $L_\mu^q([a,b])$, можно считать, что последовательность $\{\alpha_k^*(t)\}$ слабо сходится к функции $\alpha^*(t)$. Заметим, прежде всего, что $\alpha^*(t)\not\equiv 0$. Действительно, число β_k, решающее задачу $\mathrm{II}_{[L_\mu^q([a,b]),\,\delta_k p_1]}$:

$$\beta_k=\max_{\alpha(t)}\left|\int_a^b\alpha(t)\,y(t)\,d\mu\right|$$

при условиях

$$\int_a^b|\alpha(t)|^q\,d\mu\leqslant 1,\quad \left|\int_a^b P(t)\,\alpha(t)\,d\mu\right|\leqslant\delta_k p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\quad P(t)=\sum_1^n\lambda_\nu x_\nu(t),$$

больше, чем число

$$\beta=\max_{\alpha(t)}\left|\int_a^b\alpha(t)\,y(t)\,d\mu\right|$$

при условиях

$$\int_a^b|\alpha(t)|^q\,d\mu\leqslant 1,\quad \int_a^b P(t)\,\alpha(t)\,d\mu=0\ \text{ для всех }\ P(t)=\sum_1^n\lambda_\nu x_\nu(t).\tag{67'}$$

Но $\beta>0$, ибо $y(t)$ не зависит линейно от $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, и, значит,

$$\left|\int_a^b\alpha^*(t)\,y(t)\,d\mu\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\int_a^b\alpha_k^*(t)\,y(t)\,d\mu\right|=\lim_{k\to\infty}\beta_k\geqslant\beta>0.$$

Далее, в силу (67′), для любого многочлена

$$P(t)=\sum_1^n\lambda_\nu x_\nu(t)$$

имеем:

$$\int_a^b \alpha^*(t) P(t)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_a^b \alpha_k^*(t) P(t)\, d\mu = 0, \tag{68}$$

ибо $\delta_k \to 0$.

Можно считать, что при любом i последовательность точек t_i^k имеет предел. Обозначим пределы, лежащие внутри (a, b), через

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_r, \quad r \leqslant s \leqslant n-1.$$

В интервале t_j, t_{j+1} знак функции $\alpha^*(t)$ не меняется. Действительно, пусть i_0 — наибольший индекс среди тех последовательностей $\{t_i^k\}$, $i = 1, \ldots, s$, которые сходятся к точке t_j. Тогда последовательность $t_{i_0}^k$ сходится к t_j, а последовательность $t_{i_0+1}^k$ сходится к t_{j+1}. Пусть, например, $\alpha_k^*(t) \geqslant 0$ в интервале $(t_{i_0}^k, t_{i_0+1}^k)$. Покажем, что $\alpha^*(t) \geqslant 0$ почти везде (μ) в (t_j, t_{j+1}). Будем считать, для определенности, что интервал $(t_{i_0}^k, t_{i_0+1}^k)$ лежит внутри интервала (t_j, t_{j+1}). Если на некотором множестве $E \subset (t_j, t_{j+1})$ $\mu(E) > 0$, $\alpha^*(t) < 0$, то

$$0 > \int_E \alpha^*(t)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \alpha_k^*(t)\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap\left(t_{i_0}^k,\, t_{i_0+1}^k\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu \geqslant 0. \tag{69}$$

Последнее равенство вытекает из того, что

$$\int_E \alpha_k^*(t)\, d\mu = \int_{E\cap\left(t_{i_0}^k;\, t_{i_0+1}^k\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu + \int_{E\cap\left(t_j,\, t_{i_0}^k\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu + \int_{E\cap\left(t_{i_0+1}^k,\, t_{j+1}\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu;$$

но

$$\left| \int_{E\cap\left(t_j,\, t_{i_0}^k\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu \right| \leqslant \{\mu\,[E \cap (t_j, \; t_{i_0}^k)]\}^{\frac{1}{p}} \to 0$$

и точно так же

$$\int_{E\cap\left(t_{i_0+1}^k,\, t_{j+1}\right)} \alpha_k^*(t)\, d\mu \to 0.$$

Противоречие в (69) показывает, что $\alpha^*(t)$ сохраняет знак в (t_j, t_{j+1}). Аналогично показывается, что $\alpha^*(t)$ сохраняет знак в (a, t_1) и (t_r, b). Таким образом, у $\alpha^*(t)$ не более $n-1$ точки перемены знака. Построив полином $R(t)$, меняющий знак в тех же точках, что и $\alpha^*(t)$ и только в них, получим:

$$\int_a^b \alpha^*(t) R(t)\, d\mu \neq 0.$$

Но это противоречит равенству (68). Теорема доказана.

Приведем еще одну теорему о единственности экстремали в задаче $\mathrm{I}_{[L_\mu^1(Q),\, p_1]}$.

ТЕОРЕМА 13. *Пусть $Q = D$ — область плоскости комплексного переменного, $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — аналитические в D функции, μ — мера такая, что каждая непустая порция D имеет положительную меру, и мера одноточечных множеств равна нулю. Пусть, далее, функционал $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ таков, что если функция $\lambda(t)$ удовлетворяет неравенствам (24) и (25), то внутри тела B_∞ существует точка $(C_1, \ldots, C_n)$ такая, что*

$$C_\nu = \int_D \alpha(t)\, x_\nu(t)\, d\mu, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Тогда для любой непрерывной в D функции $y(t)$ экстремальный многочлен $P^*(t)$ в задаче $\mathrm{I}_{[L^1_\mu(D), p_1]}$ единственен. Если $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv 0$, то единственность имеет место и тогда, когда мера μ удовлетворяет лишь первому из наложенных требований. Наконец, если функция $y(t)$ аналитична, то единственность имеет место при любом $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы 10 и рассуждая, как в начале ее доказательства, мы получим, что функция $\alpha^*(t)$ непрерывна всюду, кроме счетного множества точек, где $P_1^*(t) = P_2^*(t)$. Далее, вычитая из одного равенства (64) другое, найдем:

$$\alpha^*(t)\, Q(t) = \pm |\, Q(t)\,|, \tag{70}$$

где $Q(t) = P_1(t) - P_2(t)$. В силу непрерывности $\alpha^*(t)$ и $\frac{|Q(t)|}{Q(t)}$ всюду, кроме нулей $Q(t)$, знак в (70) постоянен и, значит, считая его для определенности плюсом, имеем почти везде в D:

$$\alpha^*(t)\, Q(t) = |\, Q(t)\,|.$$

Но это значит, что функции $\alpha^*(t)$ соответствует в B_∞ граничная точка, что противоречит условию. Если же $y(t)$ также аналитична в D, то мы имели бы:

$$\alpha^*(t) = \frac{|\, y(t) - P_1(t)\,|}{y(t) - P_1(t)} = \frac{|\, Q(t)\,|}{Q(t)}$$

всюду, кроме нулей $Q(t)$. Но тогда для аналитических функций $Q(t)$ и $y(t) - P_1(t)$ выполнялось бы равенство

$$\arg\,[y(t) - P_1(t)] = \arg Q(t)$$

и, значит,

$$y(t) - P_1(t) \equiv Q(t),$$

что противоречит линейной независимости $y(t)$ от функций $x_1, \ldots, x_n(t)$. Наконец, если $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv 0$, то

$$\int_D \alpha^*(t)\, Q(t)\, d\mu \neq 0,$$

что невозможно, ибо функция $\alpha^*(t)$ ортогональна к $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Этот последний случай уже доказан нами ранее [см. ([10])].

Из предшествующих теорем следует

ТЕОРЕМА 14. *Экстремальная функция $\alpha^*(t)$ в задаче $\mathrm{II}_{[L^\infty_\mu(Q), p_1]}$ единственна, если экстремальная разность $y(t) - P^*(t)$ в задаче $\mathrm{I}_{[L^1_\mu(Q), p_1]}$*

имеет множество нулей меры нуль. $\alpha^*(t)$ *единственна также, если всякий многочлен* $P(t)=\sum_1^n \lambda_\nu x_\nu(t)$ *имеет множество нулей меры нуль, а задача* $\mathrm{I}_{[L^1_\mu(Q),\,p_1]}$ *имеет два решения.*

В дополнительных разъяснениях нуждается лишь вторая часть теоремы. Если $P_1^*(t)$ и $P_2^*(t)$ — два экстремальных полинома, то полином

$$P_1(t)=sP_1^*(t)+(1-s)P_2^*(t),\quad 0<s<1,$$

также будет экстремальным и, как показано в доказательстве теоремы 10, разность $y(t)-P_1(t)$ обращается в нуль лишь там, где $P_1^*(t)=P_2^*(t)$, но последнее множество, по условию теоремы, имеет нулевую меру.

§ 3. Задачи $\mathrm{I}_{[C(Q),\,p_1]}$ и $\mathrm{II}_{[C(Q),\,p_1]}$

Пусть Q — компакт. Будем для непрерывной на Q функции $f(t)$ обозначать через D_f множество тех точек из Q, в которых $|f(t)|$ достигает максимума.

ТЕОРЕМА 15. *Для того чтобы полином* $P^*(t)=\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^* x_\nu(t)$ *был экстремальным в задаче* $\mathrm{II}_{[C(Q),\,p_1]}$, *а мера* dg^* *была экстремальной в задаче* $\mathrm{II}_{[C(Q),\,p_1]}$, *необходимо и достаточно, чтобы мера* dg^* *была сосредоточена на некотором подмножестве* $\mathscr{E}$ *множества* D_{y-P^*}, *и если*

$$M=\max_{t\in Q}|y(t)-P^*(t)|,$$

то должно выполняться равенство

$$[y(t)-P^*(t)]\,dg^*=Me^{i\theta}\,|dg^*| \tag{71}$$

почти всюду по мере $|dg^*|$. *Кроме того, должны удовлетворяться условия:*

$$\int_{\mathscr{E}}|dg^*|=1, \tag{72}$$

$$\int_{\mathscr{E}}P^*(t)\,dg^*=e^{i\theta}p_1(\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*), \tag{73}$$

а для произвольного $P(t)=\sum_1 \lambda_\nu x_\nu(t)$ — *условие*

$$\left|\int_{\mathscr{E}}P(t)\,dg^*\right|\leqslant e^{i\theta}p_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n). \tag{74}$$

В соотношениях (71), (73) *и* (74) θ — *произвольное вещественное число.*

Доказательство. Согласно теореме 2, элемент $y(t)-P^*(t)$ должен быть экстремальным для функционала $f(x)=\int_Q x(t)\,dg^*$. Поэтому, с одной стороны,

$$\left|\int_Q[y(t)-P^*(t)]\,dg^*\right|\leqslant\int_Q|y(t)-P^*(t)|\,|dg^*|\leqslant M\int_Q|dg^*|, \tag{75}$$

а с другой,— в цепочке (75) должны иметь место равенства. Это немедленно дает, что точки роста меры dg^* лежат на D_{y-P^*} и выполняются соотношения (71) и (72). Соотношения же (73) и (74) являются простой конкретизацией условий (40) и (41).

ТЕОРЕМА 16. *Существует подмножество $Q_r \subset Q$, состоящее из r точек ($r \leqslant n+1$ в вещественном случае и $r \leqslant 2n+1$ в комплексном) такое, что решения задач $\mathrm{I}_{[C(Q_r), p_1]}$ и $\mathrm{II}_{[C(Q_r), p_1]}$ совпадают соответственно с решениями задач $\mathrm{I}_{[C(Q), p_1]}$ и $\mathrm{II}_{[C(Q), p_1]}$* (функции $y(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$ заданы и непрерывны на Q).

Доказательство для задачи I следует из общей теоремы Л. Г. Шнирельмана ([33]), а для задачи II — из ее связи с задачей I, выведенной в теореме 1.

Следующая теорема дает более конструктивную, чем теорема 15, форму характеристического признака экстремального полинома $P^*(t)$.

ТЕОРЕМА 17. *Для того чтобы полином $P^*(t) = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu(t)$ был экстремальным в задаче $\mathrm{I}_{[C(Q), p_1]}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали r точек ($r \leqslant n+1$ в вещественном случае и $r \leqslant 2n+1$ в комплексном) $t_1, \ldots, t_r$ из D_{y-P^*}, положительные числа $\mu_1, \ldots, \mu_r$ и вещественные числа $\theta_1, \ldots, \theta_r$ такие, чтобы выполнялись соотношения:*

$$y(t_j) - P^*(t_j) = Me^{-i\theta_j}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad M = \max_{t \in Q} |y(t) - P^*(t)|, \tag{76}$$

$$\sum_{j=1}^r P^*(t_j)\mu_j e^{i\theta_j} = p_1(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*), \qquad \sum_{j=1}^r \mu_j = 1, \tag{77}$$

а для любого многочлена $P(t) = \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu(t)$ — соотношение

$$\left|\sum_{j=1}^r P(t_j)\mu_j e^{i\theta_j}\right| \leqslant p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{78}$$

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теорем 15 и 16, если в теореме 15 взять за $\mathscr{E}$ множество Q_r из теоремы 16. Пусть dg^* — та из экстремальных для Q_r мер, у которой θ в (71) равно нулю. Обозначив «атом» меры dg^*, находящийся в точке t_j, через g_j^* и положив

$$|g_j^*| = \mu_j, \quad \arg g_j^* = \theta_j,$$

мы и приходим к соотношениям, указанным в теореме.

Теорема 17 является обобщением теоремы Е. Я. Ремеза ([34]), ([35]), дающей признак полинома наилучшего приближения в комплексной области. Из теоремы Е. Я. Ремеза вытекает, в частности, классическая теорема П. Л. Чебышева (заметим, что в другой форме характеристика полинома наилучшего приближения была ранее Е. Я. Ремеза найдена А. Н. Колмогоровым ([36]); см. также ([37]), ([40])). Чтобы получить из теоремы 16 теорему Е. Я. Ремеза, достаточно положить $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \equiv 0$ и тогда условия (77) и (78) заменятся одним соотношением:

$$\sum_{j=1}^r P(t_j)\mu_j e^{i\theta_j} = 0 \tag{79}$$

для любого полинома $P(t)$.

Рассмотрим еще случай, когда

$$p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu |\lambda_\nu|$$

($\varepsilon_\nu \geqslant 0$ заданы). В силу (44), в этом случае соотношения (77) и (78) эквивалентны таким:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j e^{i\theta_j} x_\nu(t_j) = \varepsilon_\nu e^{-i\alpha_\nu}, \text{ если } \lambda_\nu^* \neq 0, \quad \alpha_\nu = \arg \lambda_\nu^*,$$

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j e^{i\theta_j} x_\nu(t_j) = \delta_\nu, \quad |\delta_\nu| \leqslant \varepsilon_\nu, \text{ если } \lambda_\nu^* = 0. \tag{80}$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $C_\nu = \sum_{j=1}^{r} g(t_j) x_\nu(t_j)$, $g(t_j) \neq 0$, $j = 1, \ldots, r$, $\sum_{1}^{r} |g(t_j)| = 1$, $\nu = 1, \ldots, n$, *причем функции* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *образуют систему П. Л. Чебышева на* Q. *Тогда в* n*-мерном (комплексном или вещественном — смотря по тому, какой случай мы рассматриваем) пространстве* R_n *существует такая окрестность* S *начала координат, что если* $(C_1, \ldots, C_n) \in S$, *то* $r \geqslant n + 1$.

Доказательство. Допуская противное, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в теореме 12, мы придем к мере dg^*, сосредоточенной в $r \leqslant n$ точках и ортогональной ко всем многочленам

$$P(t) = \sum_{1}^{n} \lambda_\nu x_\nu(t),$$

для которых

$$\sum_{j=1}^{r} P(t_j) g^*(t_j) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{r} |g^*(t_j)| = 1, \quad g^*(t_j) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{81}$$

Но, построив многочлен $R(t)$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$R(t_j) = \frac{|g^*(t_j)|}{g^*(t_j)}, \quad j = 1, \ldots, r,$$

мы получим, что полином $R(t)$ не ортогонален к dg^*.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 18. *Если* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — *система П. Л. Чебышева на* Q, *то для произвольного функционала* $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *существует такое число* η_0, *что при всех* $0 < \eta \leqslant \eta_0$ *множество* Q_r (см. теорему 16) *для задач* $\mathrm{I}_{[C(Q), \eta p_1]}$ *и* $\mathrm{II}_{[C(Q), \eta p_1]}$ *с произвольной функцией* $y(t)$ *содержит* $r = n + 1$ *точек в вещественном случае и* $n + 1 \leqslant r \leqslant 2n + 1$ — *в комплексном.*

Для доказательства надо взять такое η_0, чтобы при всяком $\eta \leqslant \eta_0$ неравенство (4) с заменой $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ на $\eta p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ обеспечи-

вало принадлежность точки $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ окрестности S из леммы 3, а затем сопоставить лемму 3 и теорему 16.

Приведем простой пример, показывающий, что при отсутствии достаточной малости у η ни теорема 18, ни единственность экстремального полинома P^*, вообще говоря, не имеют места.

Пусть $Q = [0, 1]$, $y(t) = t$, $x_1(t) = 1$, $p_1(\lambda) = |\lambda|$. Легко видеть, что здесь для задачи I $\alpha = 1$ и inf достигается для всякой функции $\lambda x_1(t) = \lambda$, если $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$. Значит, здесь нет единственности, хотя $y(t)$ и $x_1(t)$ образуют систему П. Л. Чебышева на $[0, 1]$. Кроме того, при $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{2}$ множество Q_r состоит из одной точки, а не из двух, как должно было быть, если бы теорема 18 была справедлива при всяком η [ср. ([41])].

Из теоремы 5 легко получается

ТЕОРЕМА 19. *Множество $B_{C(Q)}$ точек $(C_1, \ldots, C_n)$, где*

$$C_\nu = \int\limits_Q x_\nu(t)\, dg, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

и

$$\int\limits_Q |dg| \leqslant 1, \tag{82}$$

есть ограниченное, симметричное, замкнутое, выпуклое тело. Для того чтобы точка $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$ была граничной в $B_{C(Q)}$, необходимо и достаточно, чтобы ей соответствовала мера dg^* со следующими свойствами:

1) $\int\limits_Q |dg^*| = 1,$

2) *существует полином $R^*(t)$ такой, что множество $\mathscr{E}$ точек роста меры dg^* содержится в D_{R^*}, причем*

$$R^*(t)\, dg^* = M\, |dg^*|, \quad M = \max_{t \in Q} |R^*(t)|.$$

ЛЕММА 4. *Пусть Q_r ($r = n + 1$ в вещественном случае и $n + 1 \leqslant r \leqslant 2n + 1$ — в комплексном) — произвольное подмножество Q, состоящее из r точек и такое, что существует мера dg, сосредоточенная на Q_r, $\sum\limits_{j=1}^{r} |g(t_j)| = 1$, для которой точка $(C_1, \ldots, C_n)$, где*

$$C_\nu = \sum_{j=1}^{r} g(t_j)\, x_\nu(t_j), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

принадлежит окрестности S из леммы 3. Тогда пересечение всех тел $B_{C(Q_r)}$ по всем таким множествам Q_r есть выпуклое тело в R_n.

З а м е ч а н и е. То, что любое $B_{C(Q_r)}$, $r \geqslant n + 1$, есть выпуклое тело, т. е. содержит внутренние точки, следует из линейной независимости функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ на Q_r, ибо они образуют систему П. Л. Чебышева на Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем разбирать комплексный случай, как более громоздкий. Отметим, прежде всего, существование такого числа

$h > 0$, что в любом из множеств Q_r найдется по крайней мере $n+1$ точек, попарно удаленных друг от друга на расстояние, не меньшее чем h. Если бы такого числа $h > 0$ не существовало, то, применяя обычные рассуждения, основанные на компактности, мы пришли бы к точке из S, в представлении которой мера была бы сосредоточена менее чем в $n+1$ точке. Но это противоречит определению S. Покажем теперь, что все тела $B_{C(Q_r)}$ содержат некоторую общую окрестность нуля. Допустим противное; тогда мы получим последовательность множеств $\{Q_{r_k}\}$, для которых радиус максимальной окрестности нуля в теле $B_{C(Q_{r_k})}$ стремится к нулю. Без ограничения общности можно считать, что множества Q_{r_k} сходятся к множеству Q_r, состоящему из точек

$$t_1, \ldots, t_r, \quad n+1 \leqslant r \leqslant 2n+1.$$

Это означает, что точки каждого множества Q_{r_k} можно разбить на r групп $Q^1_{r_k}, \ldots, Q^r_{r_k}$ так, что точки из группы $Q^j_{r_k}$ сходятся к точке t_j. Тело $B_{C(Q_r)}$ содержит окрестность нуля S_0. Пусть радиус этой окрестности есть $q > 0$. В силу непрерывности функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, какое бы число $\varepsilon > 0$ ни было задано, в ε-окрестности всякой точки из $B_{C(Q_r)}$ найдутся точки из $B_{C(Q_{r_k})}$ и, наоборот, в ε-окрестности всякой точки из $B_{C(Q_{r_k})}$ найдутся точки из $B_{C(Q_r)}$, если только $k > k_0(\varepsilon)$.

Пусть M_k — такая граничная точка $B_{C(Q_{r_k})}$, что $M_k \to 0$ при $k \to \infty$. Проведем через M_k опорную гиперплоскость π_k к телу $B_{C(Q_{r_k})}$ и опустим из O на π_k перпендикуляр, который продолжим до пересечения с границей окрестности S_0 в точке N_k. Если расстояние от O до π_k будет меньше $\frac{q}{2}$, то в $\frac{q}{2}$-окрестности точки $N_k \in B_{C(Q_r)}$ нет точек из $B_{C(Q_{r_k})}$. Мы получили противоречие, которое показывает, что все тела $B_{C(Q_{r_k})}$ содержат некоторую общую окрестность нуля. Лемма полностью доказана.

Обозначим тело, описанное в лемме 4, через

$$B^* = \bigcap_{Q_r} B_{C(Q_r)}.$$

ТЕОРЕМА 20. *Если $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ — система П. Л. Чебышева на Q, то для произвольного функционала $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ существует такое число $0 < \eta_1 \leqslant \eta_0$ (η_0 определено в теореме 18), что при всех $0 < \eta \leqslant \eta_1$ решение задачи $\mathrm{I}_{[C(Q), \eta p_1]}$ с произвольной функцией $y(t) \in C(Q)$ единственно.*

Пусть $\eta_1 \leqslant \eta_0$ выбрано так, что если выполняется неравенство (4) с заменой $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ на $\eta p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\eta \leqslant \eta_1$, то внутри тела B^* существует точка $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$.

Пусть Q_r, $n+1 \leqslant r \leqslant 2n+1$ — множество из теоремы 16 для задачи $\mathrm{I}_{[C(Q), \eta p_1]}$ и $t_1, \ldots, t_r$ — точки Q_r. Обозначив через $P^*_1(t)$ и $P^*_2(t)$ два экстремальных полинома в задаче I, будем иметь по теореме 17:

$$y(t_j) - P^*_k(t_j) = M_k e^{-i\theta_j}, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Если бы $M_1 = M_2$, то мы имели бы:

$$P^*_1(t_j) = P^*_2(t_j), \quad j = 1, \ldots, r \geqslant n+1,$$

откуда следовало бы, что $P_1^*(t) = P_2^*(t)$. Значит, $M_1 \neq M_2$; предположим, для определенности, что $M_1 > M_2$. Для многочлена

$$R(t) = P_2^*(t) - P_1^*(t)$$

будем иметь:

$$R(t_j) = (M_1 - M_2)\, e^{-i\theta_j}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Для меры dg^* (см. обозначения в теореме 17), сосредоточенной на Q_r и такой, что

$$g^*(t_j) = \mu_j e^{i\theta_j}, \quad \sum_1^r \mu_j = 1,$$

всегда найдется многочлен $R(t)$, для которого

$$R(t_j)\, g^*(t_j) = (M_1 - M_2)\, |\, g^*(t_j)\,|, \tag{83}$$

причем

$$M_1 - M_2 = \max_{t \in Q_r} |\, R(t)\,|. \tag{84}$$

Значит, по теореме 19, точка $(C_1^*, \ldots, C_n^*)$, отвечающая в теле $B_{C(Q_r)}$ мере dg^*, будет граничной для этого тела. Но, с другой стороны, эта точка является внутренней для тела $B^* \subset B_{C(Q_r)}$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 21. *Пусть* $P^*(t) = \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu(t)$ *— полином наилучшего приближения для функции* $y(t)$ *(задача* $\mathrm{I}_{[C(Q),0]}$*) и* Q_r *— то множество, для которого выполняются условия* (76) *и* (79) (см. теорему 17, переходящую в этом случае в теорему Е. Я. Ремеза или П. Л. Чебышева). *Предположим, что система* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *удовлетворяет следующему требованию: не существует полинома* $R(t) \not\equiv 0$, *для которого*

$$\mathrm{Re}\,[R(t_j)\, e^{i\theta_j}] = 0, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{85}$$

Тогда найдется такое $\eta_2 > 0$, $\eta_2 \leqslant \eta_1$, *что при всех* $0 < \eta \leqslant \eta_2$ *единственным экстремальным полиномом в задаче* $\mathrm{I}_{[C(Q),\eta p_1]}$ *будет полином* $P^*(t)$. *В частности, это всегда будет так в вещественном случае, если* $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ *— система П. Л. Чебышева на* Q.

Доказательство. Рассмотрим выпуклое множество D точек $(C_1, \ldots, C_n)$ в n-мерном (комплексном или вещественном — смотря по тому, какой случай рассматривается) пространстве R_n, имеющих представление:

$$C_\nu = \sum_{j=1}^r \gamma_j e^{i\theta_j} x_\nu(t_j), \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{86}$$

$$\gamma_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, r, \quad \sum_{j=1}^r \gamma_j = 1. \tag{87}$$

Заметим, прежде всего, что точка $O(0, \ldots, 0) \in D$ — это непосредственно следует из равенства (79).

Покажем теперь, что O есть внутренняя точка D. В самом деле, в противном случае через O можно было бы провести гиперплоскость

$$\mathrm{Re}\left(\sum_1^n \delta_\nu C_\nu\right) = 0$$

такую, что для всех точек множества D мы имели бы:

$$\mathrm{Re}\left(\sum_1^n \delta_\nu C_\nu\right) \leqslant 0$$

или, при всех $\{\gamma_j\}$, удовлетворяющих (87),

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^r \gamma_j e^{i\theta_j} R\ (t_j)\right) \leqslant 0,$$

где $R\ (t) = \sum_1^n \delta_\nu x_\nu (t)$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\ (e^{i\theta_j} R\ (t_j)) \leqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Так как, кроме того,

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^r \mu_j e^{i\theta_j} R\ (t_j) = 0$$

(через μ_j, $j = 1, \ldots, r$, мы обозначили здесь числа, фигурирующие в (79), чтобы отличить их от произвольных γ_j, удовлетворяющих (87)) и все $\mu_j > 0$, то

$$\mathrm{Re}\ [e^{i\theta_j} R\ (t_j)] = 0, \quad j = 1, \ldots, r,$$

что невозможно.

Пусть теперь η_2 таково, что при любом $\eta \leqslant \eta_2$ точка $(f\ (x_1), \ldots, f\ (x_n))$, удовлетворяющая неравенству (4) с заменой p_1 на ηp_1, лежит в теле D. Тогда для полинома $P^*\ (t)$ выполняется характеристический признак теоремы 17 и, значит, $P^*\ (t)$ есть экстремальный полином в задаче $\mathrm{I}_{[C\,(Q),\,\eta p_1]}$.

Если рассматривается вещественный случай, то условие (85) для $R\ (t)$ дает:

$$R\ (t_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Но если $x_1\ (t), \ldots, x_n\ (t)$ — система П. Л. Чебышева, то $r = n + 1$ и, значит, $R\ (t) \equiv 0$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Если бы условие (85) не выполнялось, то D не было бы выпуклым телом и теорема не была бы справедливой при произвольном функционале p_1; в этом случае для того чтобы точка $(f\ (x_1), \ldots, f\ (x_n))$ попадала в D, надо было бы накладывать на p_1 дополнительные ограничения. То, что условие (85) не всегда выполняется в комплексном случае, показывает следующее рассуждение. Пусть $x_1\ (t), \ldots, x_n\ (t)$ — вещественные функции на Q, образующие систему П. Л. Чебышева (но пространство рассматриваем комплексное!). Возьмем непрерывную функцию $iy\ (t)$, где функция $y\ (t)$ вещественна. Нетрудно видеть [см., например,

([36]), теорема 4], что наилучшим приближением к $iy(t)$ будет некоторый полином $iP^*(t)$, где $P^*(t)$ — полином с вещественными коэффициентами. Значит, числа $e^{i\theta_j}$ равны $\pm i$. Взяв теперь в качестве $R(t)$ произвольный полином с вещественными коэффициентами, получим для него:

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta_j}(t_j)] = \mathrm{Re}\,[\pm iR(t_j)] = 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

В то же время условие (85) действительно выполняется и в некоторых случаях комплексных задач. Рассмотрим простейший пример: пусть Q состоит из точек t_1 и t_r, $x_1(t) \equiv 1$, $y(t_1) = i$, $y(t_2) = 1 + i$. Легко видеть, что требование (85) здесь осуществляется.

Считая (в обозначениях теоремы 21) $r = n + 1$, положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{i\theta_1}x_1(t_1) & \ldots & e^{i\theta_{n+1}}x_1(t_{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i\theta_1}x_n(t_1) & \ldots & e^{i\theta_{n+1}}x_n(t_{n+1}) \\ 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

и обозначим через $\Delta_\nu(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ определитель, получающийся из Δ заменой элементов, стоящих в первых n строках ν-го столбца, на $\delta_1, \ldots, \delta_n$ соответственно.

Рассмотрим задачу $\mathrm{II}_{[C(Q),\{\varepsilon_\nu\},1]}$, в которой требуется найти

$$\beta = \max \left| \int_Q y(t)\, dg \right| \tag{88}$$

при условиях:

$$\int |dg| \leqslant 1, \qquad \left| \int_Q x_\nu(t)\, dg \right| \leqslant \varepsilon_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{89}$$

ТЕОРЕМА 22. *Пусть выполнены все условия теоремы 21 и* $P^*(t) = \sum_1^n \lambda_\nu^* x_\nu(t)$ *— полином наилучшего приближения к функции* $y(t)$. *Пусть* $r = n + 1$, $\alpha_\nu^* = \arg \lambda_\nu^*$ *(если* $\lambda_\nu^* \neq 0$) *и* ε_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, *в* (89) *таковы, что числа*

$$\mu_\nu = \frac{\Delta_\nu(\delta_1, \ldots, \delta_n)}{\Delta} > 0, \tag{90}$$

где $\delta_\nu = \varepsilon_\nu e^{-i\alpha_\nu}$, *если* $\lambda_\nu \neq 0$, *и* $|\delta_\nu| \leqslant \varepsilon_\nu$, *если* $\lambda_\nu = 0$ (из теоремы 21 следует, что условие (90) всегда выполняется при достаточно малых ε_ν). *Тогда*

$$\beta = \left| \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j e^{i\theta_j} y(t_j) \right| = M + \sum_1^n \varepsilon_\nu |\lambda_\nu^*|, \qquad M = \max_{t\in Q} |y(t) - P^*(t)|, \tag{91}$$

т. е. мера dg^*, *определенная равенствами*

$$g^*(t_j) = \mu_j e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \ldots, n + 1, \tag{92}$$

экстремальна для (88). *Если же все* $\lambda_\nu^* \neq 0$, *то всякая экстремальная мера, распределенная на данном* Q_{n+1}, *совпадает с* (92) *с точностью до множителя* k, $|k| = 1$.

Эта теорема следует из формул (80) и теоремы 21.

Теорема 22 позволяет решать задачу $\mathrm{II}_{[C(Q),\{\varepsilon_\nu\},1]}$ в ряде случаев вполне эффективно. Например, при малых ε_ν эффективно решается следующая задача: найти

$$\beta = \max \left| \int_0^1 t^n \, dg \right|, \tag{93}$$

если

$$\int_0^1 |dg| \leqslant 1, \quad \left| \int_0^1 t^\nu \, dg \right| \leqslant \varepsilon_\nu, \quad \nu = 0, \ldots, n-1. \tag{94}$$

Решение дается формулой:

$$\beta = \left| \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j (-1)^j t_j^n \right| = \frac{1}{2^{2n-1}} + n \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon_\nu 2^{2\nu-2n+1} \frac{(n+\nu-1)!}{(n-\nu)!\, 2\nu!}, \tag{95}$$

где

$$t_j = \frac{1 + \cos \frac{j\pi}{n}}{2}, \quad j = 1, \ldots, n+1,$$

— точки максимального уклонения полинома Чебышева порядка n и

$$2^{2\nu-2n+1} \frac{(n+\nu-1)!}{(n-\nu)!2\nu!} n = \lambda_\nu^*$$

— коэффициенты этого полинома. Решение единственно, так как все $\lambda_\nu^* \neq 0$.

Аналогичные рассмотрения можно без особых затруднений провести и для задач $\mathrm{II}_{[C(Q),\{\varepsilon_\nu\},r]}$, $r > 1$.

Приведем в заключение теорему, обобщающую один результат В. С. Виденского ([40]).

ТЕОРЕМА 23. *Экстремальный в задаче* $\mathrm{I}_{[C(Q),p_1]}$ *полином* $P^*(t)$ *является также экстремальным для задачи*:

$$\min_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \left[\sum_1^r \mu_j \left| y(t_j) - \sum_1^n \lambda_\nu x_\nu(t_j) \right|^p + p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \right], \tag{96}$$

где t_j, $j = 1, \ldots, r$, *и числа* μ_j *определены в теореме* 17, *а* $p \geqslant 1$ — *любое*.

Доказательство. Задача (96), согласно нашим обозначениям, является задачей $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q_r)p_1]}$, где мера μ определена с помощью чисел $\mu_1, \ldots, \mu_r$, фигурирующих в соотношениях (77) и (78). С помощью равенств (76), (77) и (78) легко проверить, что для полинома $P^*(t)$ выполняются все требования, налагаемые теоремой 7 (или 8) на экстремальный полином задачи $\mathrm{I}_{[L_\mu^p(Q_r),p_1]}$, чем теорема доказана. Результат В. С. Виденского получится, если взять $p_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$ и $p \geqslant 2$.

Следствие. *Пусть p — произвольное число $\geqslant 1$, $\alpha_p(\mu)$ — решение задачи* $\mathrm{I}_{[L^p_\mu(Q), p_1]}$ *для меры* μ, *удовлетворяющей соотношению*

$$\int\limits_Q d\mu = 1 \quad (d\mu \geqslant 0), \tag{97}$$

а α *— решение задачи* $\mathrm{I}_{[C(Q), p_1]}$. *Тогда*

$$\alpha = \max_\mu \alpha_p(\mu), \tag{98}$$

где max *берется по всем мерам* μ, *удовлетворяющим соотношению* (97).

Доказательство следует из неравенства

$$\left\{\int\limits_Q |y(t) - P(t)|^p \, d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \max_{t \in Q} |y(t) - P(t)|$$

и теоремы 23.

Поступило
30.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн М. Г., L-проблема моментов в абстрактном нормированном пространстве, статья IV в книге: Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., L-проблема моментов, Харьков, 1938.

[2] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 207—256.

[3] Вороновская Е. В., Нормирование конечных функционалов, I и II, Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 5 (1938), 11—20 и № 3 (1941), 23—33.

[4] Вороновская Е. В., Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 1 (1954), 5—8.

[5] Вороновская Е. В., Экстремальные полиномы некоторых простейших функционалов, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 2 (1954), 193—196.

[6] Вороновская Е. В., Экстремальные полиномы конечных функционалов, докторская диссертация, ЛГУ, 1955.

[7] Зуховицкий С. И., О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева, Успехи матем. наук, XI, 2(68) (1956), 125—159.

[8] Зуховицкий С. И., О минимальных расширениях линейных функционалов в пространстве непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 409—422.

[9] Хавинсон С. Я., К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1, Доклады Ак. наук СССР, 105, № 6 (1955), 1159—1161.

[10] Хавинсон С. Я., О единственности функции наилучшего приближения в метрике пространства L_1, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 243—270.

[11] Эскин Г. Ш., Об одной минимум-задаче в пространстве L, Доклады Ак. наук СССР, 111, № 5 (1956), 547—249.

[12] Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я., Качественные свойства решений экстремальных задач некоторых типов, статья в сборнике «Современные проблемы ТФКП», М.— Л., Физматгиз, 1959.

[13] Ptak Vlastimil, On approximation of continuous functions in the metric $\int\limits_a^b |x(t)|\,dt$, Чехословацкий матем. журнал, 8(83) (1958), 267—273.

[14] Ptak Vlastimil, A remark on approximation of continuous functions, Чехословацкий матем. журнал, 8 (83) (1958), 251—256.

[15] Rogosinski W. W., Continuous linear functionals on subspaces L^p and C, Proc. London Math. Soc. (3), 6, № 2 (1956), 175—190.

[16] Rogosinski W. W., Extremum problems for polynomials and trigonometrical polynomials, Journ. London Math. Soc., 29, № 3 (1954), 259—275.

[17] Rogosinski W. W., Linear extremum problems for real polynomials and trigonometrical polynomials, Arch. Math., 5, № 1—3 (1954), 182—190; Corrigenda 6, № 1 (1955), 87.

[18] Rogosinski W. W., On finite systems of linear equations, with an infinity of unknowns, Math. Zeitschrift, 63, № 1 (1955), 97—108.

[19] Singer Ivan, Caractérisation des éléments de meilleure approximation avec un espace de Banach quelconque, Acta Sci. Math. Szeged, 17, № 3—4 (1956), 181—189.

[20] Singer Ivan, Propriétés de la surface de la sphère unitaire et applications à la résolution du problème de l'unicité du polynôme de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques, Acad. R. P. Romîne. Stud. Cerc. Math., 7, № 1 (1956), 95—145.

[21] Singer Ivan, Sur l'extension des fonctionnelles linéaires, Revue de Mathém. pures et appl., Acad. R. P. Romîne, 1, № 2 (1956), 99—106.

[22] Singer Ivan, Un dual théorème de Hahn—Banach, C. r. Acad. Sci., 247, № 4 (1958), 408—411.

[23] Singer Ivan, Quelques application d'un dual du théorème de Hahn — Banach, C. r. Acad. Sci., 247, № 12 (1958), 846—849.

[24] Singer Ivan, Sur le L-problème de la théorie des moments dans les espaces de Banach, Acad. R. P. Romîne, Bul. Şti. Şect. Şti. Mat. Fiz., 9, № 1 (1957), 19—28.

[25] Singer Ivan, Sur l'unicité de l'élément de meilleure approximation dans des espaces de Banach quelconques, Acad. R. P. Romîne, Stud. Cerc. Mat. № 8, 1—2 (1957), 235—244.

[26] Singer Ivan, Sur quelques théorèmes de W. W. Rogosinski et S. I. Zoukhovitsky, Revue de Mathém. pures et appl. Acad. R. P. Romine, III, № 1 (1958) 117—130.

[27] Наймарк М. А., Нормированные кольца, Гостехиздат, 1959.

[28] Сакс С., Теория интеграла, Москва, ИЛ, 1949.

[29] Хавинсон С. Я., О задаче Каратеодори — Фейера для аналитических функций в многосвязных областях, Уч. зап. Влад. пед. ин-та, вып. 2 (1956), 33—41.

[30] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.— Л, Гостехиздат, 1947.

[31] Ценов И. В., О некоторых вопросах теории приближения функций, Известия ВУЗов, серия математика, 4 (11) (1959), 184—197.

[32] Крейн М. Г., Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие, Успехи матем. наук, VI, вып. 4 (44) (1951), 3—120.

[33] Шнирельман Л. Г., О равномерных приближениях, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 2 (1938), 53—60.

[34] Ремез Е. Я., О чебышевских приближениях в комплексной области, Доклады Ак. наук СССР, 77, № 6 (1951), 965—968.

[35] Ремез Е. Я., Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной плоскости, Укр. матем. журнал, 5, № 1 (1953), 3—49.

[36] Колмогоров А. Н., Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции, Успехи матем. наук, III, № 1 (1948), 216—221.

[37] Иванов В. К., Задача о минимаксе системы линейных функций, Матем. сборн., 28 (70) : 3 (1951), 685—706.

[38] Иванов В. К., О равномерных приближениях непрерывных функций, Матем. сборн., 30 (72) : 3 (1952), 543—558.

[39] Иванов В. К., Письмо в редакцию, Матем. сборн., 33(75) : 3(1953), 676.

[40] Виденский В. С., О равномерном приближении в комплексной плоскости, Успехи матем. наук, XI, № 5 (71) (1956), 169—175.

[41] Виденский В. С., О наименее уклоняющихся от нуля многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют данной линейной зависимости, Доклады Ак. наук СССР, 126, № 2 (1959), 248—250.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 591—600

А. Л. БРУДНО

О СУЩЕСТВОВАНИИ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ БОЛЕЕ СИЛЬНОГО, ЧЕМ ЗАДАННЫЕ

В работе находятся необходимые и достаточные условия для существования матрицы Тёплица, более сильной, чем конечное или счетное число заданных (как методов суммирования ограниченных последовательностей).

В работе рассматриваются матрицы Тёплица как методы суммирования только для ограниченных последовательностей. Общие обозначения берутся из работы ([1]). Напомним, что *полем* называется множество ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей Тёплица. Мы говорим, что матрица B сильнее (равносильна) матрицы A, если она суммирует все (соответственно те же), ограниченные последовательности, которые суммирует A.

ТЕОРЕМА 1. *Для существования матрицы Тёплица A, более сильной, чем конечное или счетное число заданных матриц Тёплица A_1, $A_2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись окрестности $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ матриц $A_1, A_2, \ldots$, выпуклая оболочка которых не содержит всей прямой λe $(-\infty < \lambda < \infty,\ e = \{1, 1, \ldots\})$.*

Этой теореме можно дать и другую формулировку:

Для существования матрицы Тёплица A, более сильной, чем конечное или счетное число заданных матриц Тёплица $A_1, A_2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы существовала выпуклая топологизация линейного пространства ограниченных последовательностей, более слабая, чем каждая A_n-топология, и разделяющая точка 0 и e.

Действительно, пусть выпуклая оболочка $\mathscr{E}$-окрестностей $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ не содержит всей прямой λe. Примем систему множеств $\{\gamma\mathscr{E}\}$, где γ — всевозможные положительные числа, в качестве окрестностей нуля линейного пространства R. Тогда при некотором $\gamma > 0$ окрестность $\gamma\mathscr{E}$ не будет содержать точку e. Кроме того, при любом γ в окрестности $\gamma\mathscr{E}$ будет содержаться множество $\gamma\mathscr{E}_n$, являющееся окрестностью A_n-топологии [(см. ([1]), § 1]. Обратно, пусть существует топологизация пространства R с нужными свойствами. Тогда в этой топологии найдется окрестность $\mathscr{E}$ точки 0, не содержащая точки e. Так как эта топология слабее любой A_n-топологии, то для каждого натурального n найдется окрестность $\mathscr{E}_n$ из A_n-топологии, содержащаяся в $\mathscr{E}$. Но $\mathscr{E}$ — выпуклое множество. Следовательно, $\mathscr{E}$ содержит и общую выпуклую оболочку множеств $\{\mathscr{E}_n\}$.

Доказательство необходимости условий теоремы 1. Пусть существует требуемая матрица A. Возьмем в A-топологии окрестность

$$\mathscr{E} = \{\|A(x)\| < 1\}.$$

Тогда $e \notin \mathscr{E}$, ибо

$$\|A(e)\| = A^\infty(e) = 1.$$

Далее, согласно ([1]), для каждого $n = 1, 2, \ldots$ в A_n-топологии найдется окрестность $\mathscr{E}_n \subset \mathscr{E}$. Так как множество $\mathscr{E}$ выпукло, то необходимость условий теоремы 1 доказана.

Доказательству достаточности предпошлем замечание и лемму.

Замечание. Без уменьшения общности доказательства теоремы 1 можно предполагать, что матрицы $\{A_n\}$ точно треугольны, нормированы, усечены и имеют общую грань усечения. Действительно, согласно результатам работы ([2]), матрицы A_n можно привести к нужному виду N-преобразованиями. Но N-преобразование не меняет множества $\{\|x\| < \infty, \|A_n(x)\| < \varepsilon\}$ преобразуемой матрицы, а следовательно, и ее окрестностей.

Так же без уменьшения общности теоремы 1 можно предполагать, что окрестность $\mathscr{E}_n$ матрицы A_n задана последовательностью [см. ([1])] и что матриц A_n бесконечно много ($n = 1, 2, \ldots$). В противном случае одну из матриц A_n можно было бы повторить счетное число раз.

Введем следующие обозначения.

Общую грань усечения матриц $\{A_n\}$ обозначим через $s_* = s_*(s)$. Напомним, что $s_*(s)$ определена для всех натуральных s, монотонно не убывает и принимает все натуральные значения. Для нее

$$a_{n\tau}^\sigma = 0, \text{ если } \sigma \geqslant s \text{ и } \tau < s_*(s)$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Здесь, как и в дальнейшем, $a_{n\tau}^\sigma$ обозначает элемент строки σ столбца τ матрицы A_n. Таким образом,

$$A_n^s(s) = \sum_{\tau=s_*(s)}^{s} a_{n\tau}^s x^\tau \text{ при любых } s \text{ и } n.$$

Пусть $\varepsilon_n = \{\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \ldots\}$ — последовательность, задающая окрестность $\mathscr{E}_n$ матрицы A_n, и пусть $\mathscr{E}_{mn}(s_*k)$ — общая выпуклая оболочка множеств $(s_* = s_*(s))$

$$\{|x(s_*k)| \leqslant \mu; \quad |A_n[x(s_*k)]|_s^k \leqslant \varepsilon_n^\mu\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

векторов

$$x(s_*k) = \{x^{s_*}, x^{s_*+1}, \ldots, x^{k-1}\}, \quad |x|_s^k = |x(sk)| = \max_{s \leqslant \sigma < k} |x^\sigma|.$$

Так как матрица A_n треугольна и имеет грань усечения $s_*(s)$, то $A_n^\sigma(x)$ при $s \leqslant \sigma < k$ зависит только от членов последовательности $x = \{x^\tau\}$

с номерами τ, для которых $s_*(s) \leqslant \tau < k$. Поэтому для $s \leqslant \sigma < k$ однозначно определено выражение

$$A_n^\sigma [x(s_* k)] = A_n^\sigma (x).$$

ЛЕММА 1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — треугольные, нормированные и усеченные матрицы Тёплица, а $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ — их окрестности, заданные последовательностями $\{\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \ldots\}$, причем общая выпуклая оболочка всех множеств $\{\mathscr{E}_n\}$ не содержит ограниченной последовательности y. Пусть $s_* = s_*(s)$ — общая грань усечения матриц $\{A_n\}$. Тогда для любого фиксированного $\varkappa > 1$ и натуральных m, n, s можно указать такое $k > s$, что общая выпуклая оболочка $L(m, n, s, k)$ множеств*

$$\mathscr{E}_{m\nu}(s_* k) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ s_* = s_*(s))$$

не содержит точки $\varkappa y(s_* k)$.

Доказательство. $L(m, n, s, k)$ есть общая выпуклая оболочка множеств векторов

$$\{|\bar{x}|_{s_*}^k \leqslant \mu,\ |A_\nu(\bar{x})|_s^k \leqslant \varepsilon_\nu^\mu\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n; \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Если лемма 1 неверна, то для некоторых $\varkappa < 1$, m, n, s и любого $k > s$ будет

$$\varkappa y(s_* k) \in L(m, n, s, k),$$

вследствие чего $\varkappa y(s_* k)$ представляется в виде конечной суммы:

$$\varkappa y(s_* k) = \sum_{\mu, \nu=1}^{m,n} \lambda_k^{\mu\nu} \bar{x}_{\mu\nu k} \quad \left(\lambda_k^{\mu\nu} \geqslant 0,\ \sum_{\mu, \nu} \lambda_k^{\mu\nu} = 1\right),$$

а для векторов $\bar{x}_{\mu\nu k} \in R(s_* k)$ имеем:

$$|\bar{x}_{\mu\nu k}|_{s_*}^k \leqslant \mu,$$

$$|A_\nu(\bar{x}_{\mu\nu k})|_s^k \leqslant \varepsilon_\nu^\mu.$$

Пусть k принимает значения $l = s, s+1, \ldots$. Выберем такую подпоследовательность значений $k^1, k^2, \ldots \to \infty$, чтобы существовали пределы

$$\lambda_{k^i}^{\mu\nu} \to \lambda^{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\bar{x}_{\mu\nu k}^\tau \to x_{\mu\nu}^\tau \quad (\tau \geqslant s_*). \tag{2}$$

Такую подпоследовательность k^i действительно можно выбрать, так как все $\lambda_{k^i}^{\mu\nu}$ положительны и не превосходят единицы, а числа $\bar{x}_{\mu\nu k^i}^\tau$ (определенные для всех τ, заключенных в пределах $s_* \leqslant \tau < k^i$) по модулю не превосходят $\mu \leqslant m$. Доопределим $x_{\mu\nu}^\tau$ для $\tau < s_*$, положив $x_{\mu\nu}^\tau = \varkappa y^\tau$ для всех $\mu \leqslant m$, $\nu \leqslant n$, и рассмотрим получившиеся последовательности $x_{\mu\nu}$. Для них, как это легко проверить, имеем:

$$|x_{\mu\nu}|_{s_*}^\infty \leqslant \mu, \quad |A_\nu(x_{\mu\nu})|_s^\infty \leqslant \varepsilon_\nu^\mu \quad (\nu \leqslant n, \mu \leqslant m).$$

При этом у суммарной последовательности

$$\sum_{\mu, \nu=1}^{m,n} \lambda^{\mu\nu} x_{\mu\nu} \quad \left(\lambda^{\mu\nu} \geqslant 0,\ \sum \lambda^{\mu\nu} = 1\right)$$

все члены совпадают с членами последовательности $\varkappa y$. Таким образом, для последовательности y мы имеем представление

$$y = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{m,n} \lambda^{\mu\nu}(x_{\mu\nu} : \varkappa) \quad \left(\lambda^{\mu\nu} \geqslant 0,\ \sum \lambda^{\mu\nu} = 1\right),$$

и вследствие того, что $\varkappa > 1$,

$$\|x_{\mu\nu} : \varkappa\| < \mu, \quad \|A_\nu(x_{\mu\nu} : \varkappa)\| < \varepsilon_\nu^\mu.$$

Поэтому $x_{\mu\nu} \in \mathscr{E}_\nu$ при любых $\mu \leqslant m$ и $\nu \leqslant n$, а, значит, y входит в общую выпуклую оболочку $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n$, вопреки условию леммы 1. Лемма доказана.

Доказательство достаточности условий теоремы 1. По условию, общая выпуклая оболочка $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ не содержит всей прямой λe $(-\infty < \lambda < \infty)$ и, следовательно, не содержит некоторой фиксированной точки $\lambda_1 e$ этой прямой. Так как наша оболочка центрально-симметрична относительно нуля, то мы можем считать $\lambda_1 > 0$. Более того, мы можем считать, что $\lambda_1 = 1 : 2$. Действительно, вместе с $\mathscr{E}_n$ окрестностью матрицы A_n является и множество $\varkappa\mathscr{E}_n$, где $\varkappa$ — любое положительное число. Уменьшив заданные окрестности $\{\mathscr{E}_n\}$ в $2\lambda_1$ раз, мы добьемся того, что выпуклая оболочка новых окрестностей (за которыми, разумеется, можно сохранить старые обозначения $\mathscr{E}_n$) не будет содержать точку $(1 : 2)\, e$. Теперь, применяя лемму 1, мы можем каждому натуральному числу r поставить в соответствие числа $m, n, s\,(s_*(s))$ и k так, чтобы

$$m = n = s = r \quad (\text{т. е. } s_* = s_*(s) = s_*(r)) \tag{3}$$

и чтобы выпуклая оболочка $L(r)$ множеств

$$\mathscr{E}_{m\nu}(s_* k) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

не содержала точки $e(s_*, k)$.

Рассмотрим $k - s_*$-мерное пространство $R(s_* k)$ векторов

$$x(s_* k) = \{x^{s_*}, x^{s_*+1}, \ldots, x^{k-1}\},$$

выпуклое центрально-симметрическое множество $L(r)$ с центром в нуле и точку $e(s_* k)$, которая расположена вне $L(r)$. Проведем в $R(s_* k)$ через $e(s_* k)$ гиперплоскость $\Gamma = \Gamma(r)$, не пересекающую $L(r)$. Так как $L(r)$ содержит точку нуль, то Γ не проходит через начало координат, свободный член уравнения гиперплоскости Γ отличен от нуля, и это уравнение можно записать в виде

$$\Gamma(r) : a_{s_*}^r x^{s_*} + a_{s_*+1}^r x^{s_*+1} + \ldots + a_{k-1}^r x^{k-1} = 1$$
$$(k = k(r),\ s_* = s_*(s),\ s = r).$$

Так как точка $e(s_* k) = \{1, 1, \ldots, 1\}$ удовлетворяет уравнению $\Gamma(r)$, то

$$a_{s_*}^r + a_{s_*+1}^r + \ldots + a_{k-1}^r = 1.$$

Все множество $L(r)$, в силу центральной симметрии относительно нуля расположено между гиперплоскостями $\Gamma(r)$ и $-\Gamma(r)$,

$$-\Gamma(r): a^r_{s_*}x^{s_*} + a^r_{s_*+1}x^{s_*+1} + \ldots + a^r_{k-1}x^{k-1} = -1.$$

Введем матрицу $A = (a^r_\sigma)$, где a^r_σ имеют уже определенные значения при $s_*(r) \leqslant \sigma < k(r)$ и равны нулю при других натуральных значениях r и σ. Докажем, что A — матрица Тёплица и притом более сильная, чем любая матрица $A_1, A_2, \ldots$. Прежде всего отметим, что для любой последовательности x

$$A^r(x) = \sum_{\sigma=s_*(r)}^{k(r)-1} a^r_\sigma x^\sigma.$$

Кроме того,

$$\{A^r[x(s_*(r), k(r))] = 1\} = \Gamma(r), \quad \{A^r[x(s_*(r), k(r))] = -1\} = -\Gamma(r)$$

и

$$|A^r(x)| < 1, \text{ если } x(s_*(r), k(r)) \in L(r).$$

1°. $A^r(e) = 1$ при всех r, так что, в частности, матрица A суммирует e к пределу, равному единице.

2°. Рассмотрим окрестность $\mathscr{E}$ матрицы A, определенную с помощью последовательности $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \ldots = 1$:

$$\mathscr{E} = \{\|x\| < \infty;\ \|A(x)\| < 1\}.$$

Выясним, из каких последовательностей x она состоит. Для того чтобы индивидуальная последовательность x входила в $\mathscr{E}$, необходимо и достаточно, чтобы, начиная с некоторого $R(x)$, было $|A^r(x)| < 1$ при $r \geqslant R(x)$. Это, в свою очередь, означает, что для любого $r \geqslant R(x)$ вектор $x(s_*k)$ лежит между гиперплоскостями Γ и $-\Gamma$, где $s_* = s_*(r)$, $k = k(r)$ и $\Gamma = \Gamma(r)$ — соответственно числа и гиперплоскость, построенные для этого значения r [см. (3)].

3°. Отсюда вытекает, что окрестность $\mathscr{E}$ содержит все окрестности $\{\mathscr{E}_n\}$. Действительно, пусть последовательность x содержится в $\mathscr{E}_n$. Тогда, начиная с некоторого $m(x)$, $x \in \mathscr{E}_{\nu m(x)}$ и, значит, начиная с достаточно большого $s(x)$, $x(s_*k) \in \mathscr{E}_{\nu m(x)}(s_*k)$ при всех $k\ (> s(x))$.

Если теперь взять r столь большим, чтобы

$$n(r) = r \geqslant \nu, \quad m(r) = r \geqslant m(x), \quad s(r) = r \geqslant s(x),$$

то

$$x[s_*(r), k(r)] \in L(r).$$

Таким образом, вектор $x[s_*(r), k(r)]$ будет лежать между гиперплоскостями $\Gamma(r)$ и $-\Gamma(r)$, и, как мы видели в п.2°, последовательность $x \in \mathscr{E}$.

4°. Матрица A суммирует к нулю всякую последовательность x_1, сходящуюся к нулю. Действительно, $x_1 \in \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}$, следовательно, $\|A(x_1)\| < 1$. Но вместе с x_1 к нулю сходится и всякая последовательность λx_1, где λ — действительное число. Следовательно,

$$|\lambda| \|A(x_1)\| = \|A(\lambda x_1)\| < 1 \text{ при всех } \lambda.$$

Но тогда $\|A(x_1)\| = 0$.

Пункты 1° и 4° вместе означают, что A — матрица Тёплица.

Согласно (¹), для матриц Тёплица A и $\{A_n\}$ п. 3° означает, что A сильнее A_n при всех n. Теорема 1 доказана.

§ 2. Невозможность некоторых усилений теоремы 1

Для существования матрицы Тёплица A, более сильной, чем матрицы Тёплица $A_1, A_2, \ldots$, недостаточно, чтобы существовал линейный функционал $\beta = \beta(x)$, равный

$$\beta(x) = A_n^\infty(x),$$

для каждой ограниченной последовательности x, суммируемой хотя бы одной из матриц $\{A_n\}$.

Действительно, в работе (³) построен пример матриц Тёплица $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, у которых $|A_1| = |A_2| = \ldots = 1$, но не существует матрицы Тёплица, более сильной, чем все $A_1, A_2, \ldots$. Эти матрицы не могут суммировать одну и ту же ограниченную последовательность x к неравным пределам. Значения $\beta(x) = A_n^\infty(x)$, если существует $A_n^\infty(x)$, образуют на объединении полей матриц $\{A_n\}$ линейный функционал с нормой $\|\beta\| \leqslant 1$.

Для существования матрицы Тёплица A, более сильной, чем каждая из двух матриц Тёплица A_1 и A_2, недостаточно, чтобы матрицы A_1 и A_2 не суммировали ограниченных последовательностей к неравным пределам ($A_1^\infty(x) \neq A_2^\infty(x)$). Соответствующий пример см. в работе (⁴).

§ 3. Несколько частных случаев

ЛЕММА 2. *Пусть A и B — матрицы Тёплица, а $\mathscr{E}_\varepsilon$ и $\mathscr{F}_\varepsilon$ — их окрестности, заданные последовательностью* $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \ldots = \varepsilon$:

$$\mathscr{E}_\varepsilon = \{\|x\| < \infty,\ \|A(x)\| < \varepsilon\},$$

$$\mathscr{F}_\varepsilon = \{\|x\| < \infty,\ \|B(x)\| < \varepsilon\}.$$

Если при всех $\varepsilon > 0$ окрестности $\mathscr{E}_\varepsilon$ и $e + \mathscr{F}_\varepsilon$ пересекаются, то:

1) *существует ограниченная последовательность z, суммируемая как матрицей A, так и матрицей B;*

2) *существует (может быть неограниченная) последовательность ζ, суммируемая матрицами A и B к конечным и различным пределам.*

Доказательство. По условию, для каждого $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots$ найдется ограниченная последовательность $\bar{x}_k$ такая, что

$$\|A(\bar{x}_k)\| < 1 : k, \tag{4}$$

$$\|B(\bar{x}_k) - e\| < 1 : k, \tag{5}$$

$$\|\bar{x}_k\| < \infty. \tag{6}$$

Без ограничения общности можно считать, что существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{k\to\infty} |\bar{x}_k|. \tag{7}$$

Действительно, мы можем выбрать подпоследовательность $k^1, k^2, \ldots$, для которой это условие имеет место, и пронумеровать заново выбранные последовательности. Точно так же можно предполагать, что $|x_k| \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и что $\lim |\bar{x}_k| \neq 0$. В самом деле, из условия (5) вытекает, что

$$\|\bar{x}_k\| > \left(1 - \frac{1}{k}\right) : \|B\|.$$

Таким образом, мы получаем последовательности $x_k = \bar{x}_k, : |\bar{x}_k|$, для которых

$$|x_k| = 1,$$

$$\|A(x_k)\| < \delta^k, \quad \delta^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

$$\|B(x_k) - \gamma^k e\| < \delta^k,$$

и существует предел

$$\gamma^k = (1 : |\bar{x}_k|) \xrightarrow[k\to\infty]{} \gamma.$$

Применяя к последовательностям x_k лемму о переползании [см. ([2])], мы получаем последовательность z, для которой

$$|z| \leqslant 1, \quad A^\infty(z) = 0, \quad B^\infty(z) = \gamma.$$

Утверждение 1) леммы 2 доказано. Если бы нам удалось выбрать последовательности $\{\bar{x}_k\}$ так, чтобы предел (7) был конечен, то число γ было бы отлично от нуля. Это дает возможность сформулировать

С л е д с т в и е. *Если матрицы Тёплица A и B не суммируют ограниченных последовательностей к неравным пределам, то точки пересечения тел*

$$\{\|x\| < \infty;\ \|A(x)\| < \varepsilon\} \text{ и } e + \{\|x\| < \infty;\ \|B(x)\| < \varepsilon\}$$

уходят в бесконечность или исчезают при $\varepsilon \to \infty$.

Продолжим доказательство леммы 2. Фиксируем последовательность $N_k = \|\bar{x}_k\|$ и произвольную последовательность, сходящуюся к нулю, например, $1, \frac{1}{2}, \ldots$. Применяя к ним прием, являющийся несущественным изменением леммы о переползании [см. ([2])], мы получаем последовательность z, для которой

$$A^n(z) \lesseqgtr \begin{matrix}\max\\\min\end{matrix} [A^n(\bar{x}_k),\ A^n(\bar{x}_{k+1})] \pm \frac{1}{k},$$

$$B^n(z) \lesseqgtr \begin{matrix}\max\\\min\end{matrix} [B^n(\bar{x}_k),\ B^n(\bar{x}_{k+1})] \pm \frac{1}{k}.$$

Эти неравенства имеют место для всех $n^k \leqslant n < n^{k+1}$, где $n^1, n^2, \ldots$ — любая наперед заданная последовательность, возрастающая достаточно быстро. Последовательность z зависит от выбора $\{n^k\}$ и при всяком их выборе остается (неограниченной в случае $N_k \to \infty$) последовательностью, *преобразуемой* матрицами A и B $\left(\text{все ряды } \sum_s a_s^n z^s,\ \sum_s b_s^n z^s \text{ абсолютно сходятся}\right)$. Беря n^k столь большим, чтобы

$$|A^n(\bar{x}_{k+1})| < 1 : (k+1) \text{ при всех } n \geqslant n^k$$

и

$$|B^n(\bar{x}_{k+1}) - e| < 1 : (k+1) \text{ при всех } n \geqslant n^k,$$

мы получаем последовательность z, для которой

$$A^\infty(z) = 0,$$

$$B^\infty(z) = 1,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Если матрицы Тёплица A и B не суммируют одновременно ни одной ограниченной расходящейся последовательности, то существует матрица Тёплица C, более сильная, чем они обе ($C \supseteq A$, $C \supseteq B$).*

Действительно, в рассматриваемом случае, согласно лемме 2, найдется такое $\varepsilon > 0$, что (выпуклые) окрестности $\mathscr{E}_\varepsilon$ и $e + \mathscr{F}_\varepsilon$ *из условия леммы* 2 *не будут пересекаться. Тогда выпуклая оболочка $\mathscr{E}_\varepsilon$ и $\mathscr{F}_\varepsilon$ не будет содержать точку $\bar{e}$. По теореме* 1 *отсюда вытекает существование искомой матрицы C.*

Из леммы 2 вытекают нижеследующие теоремы 3 и 3′, в условиях которых встречаются неограниченные последовательности.

ТЕОРЕМА 3. *Если матрицы Тёплица A и B не суммируют к различным конечным пределам ни одной (в том числе и неограниченной) последовательности, то существует матрица Тёплица C, более сильная, чем A и B вместе.*

Этой теореме можно придать вид необходимого и достаточного условия:

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть A и B — матрицы Тёплица. Для того чтобы существовала матрица Тёплица C, более сильная, чем они обе, необходимо и достаточно, чтобы их можно было заменить ограниченно эквивалентными матрицами A_* и B_*, которые будут уже неограниченно непротиворечивыми.*

В заключение этого параграфа проведем еще одно рассмотрение, подкрепляющее то соображение, что, как правило, для двух непротиворечивых полей существует поле, охватывающее их.

Рассмотрим множество

$$\alpha(\varepsilon) = \{\|x\| < \infty, \varlimsup_{n\to\infty} A^n(x) \leqslant \varepsilon\} = \varepsilon\{\|x\| < \infty, \varlimsup_{n\to\infty} A^n(x) \leqslant 1\}.$$

Оно представляет собой конус с вершиной в точке εe. Его граница — коническая поверхность.

Рассмотрим, далее, множество

$$-\alpha(\varepsilon) = \{\|x\| < \infty, \varliminf_{n\to\infty} A^n(x) \geqslant -\varepsilon\}$$

и пересечение

$$\alpha(\varepsilon) \cap [-\alpha(\varepsilon)] = \{\|x\| < \infty, \|A(x)\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Всякая точка границы $\{\|x\| < \infty, \|A(x)\| \leqslant \varepsilon\}$ либо принадлежит только одному из множеств $\alpha(\varepsilon)$, $-\alpha(\varepsilon)$, либо им обоим — в последнем случае мы скажем, что она принадлежит побочной грани тела $\{\|x\| < \infty, \|A(x)\| \leqslant \varepsilon\}$.

Пусть матрицы Тёплица A и B ограниченно непротиворечивы. Мы уже знаем, что в этом случае точки пересечения тел

$$\{\|x\| < \infty, \|A(x)\| \leqslant \varepsilon\} \text{ и } \{\|x\| < \infty, \|B(x)\| < \varepsilon\} + e$$

уходят в бесконечность при $\varepsilon \to 0$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A и B — ограниченно непротиворечивые матрицы Тёплица и $\varepsilon^n \underset{\to}{\geq} 0$. Если ближайшие к 0 точки пересечения тел*

$$\{\|x\| < \infty, \ \|A(x)\| \leqslant \varepsilon^n\} \text{ и } \{\|x\| < \infty, \ \|B(x)\| \leqslant \varepsilon^n\} + e$$

не принадлежат побочным граням этих тел, то существует матрица Тёплица C, более сильная, чем A и B.

Доказательства теоремы мы не будем проводить детально и отметим только его основные этапы:

1. Из условий теоремы вытекает, что матрицы A и B можно предполагать точно треугольными, нормированными и усеченными.

2. Для каждого s найдется такое k, что у тел (в $R(s_*k)$)

$$\{|x|_{s_*}^k < \infty, \ |A(x)|_s^k \leqslant \varepsilon^n\}, \ \{|x|_{s_*}^k < \infty, \ |B(x)|_s^k \leqslant \varepsilon^n\} + e(s_*k) \qquad (*)$$

ближайшая к 0 (s_*k) точка пересечения расположена не на их побочных гранях.

3. В $R(s_*k)$ через ближайшую точку $\bar{x}_1$ пересечения тел (*) можно провести $k - s_* - 1$-мерную гиперплоскость Г, которая будет разделять

$$\{|x|_{s_*}^k < \infty; \ |A(x)|_s^k \leqslant \varepsilon^n\} \cap \{|x|_{s_*}^k < |\bar{x}_1|_{s_*}^k\}$$

и

$$(e(s_*k) + \{|x|_{s_*}^k < \infty, \ |B(x)|_s^k \leqslant \varepsilon^n\}) \cap \{|x|_{s_*}^k < |\bar{x}_1|_{s_*}^k\}.$$

4. В гиперплоскости Г через точку $\bar{x}_1$ проведем $k - s_* - 2$-мерную «прямую» l, на которой точка $\bar{x}_1$ была бы ближайшей к 0 точкой.

5. Проведем $k - s_* - 1$-мерную гиперплоскость Γ_0 через l и 0. Запишем ее уравнение и пронормируем его так, чтобы сумма коэффициентов равнялась единице.

В качестве коэффициентов новой матрицы C примем коэффициенты таких нормированных уравнений и покажем, что ограниченное поле $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

6. $\mathfrak{C}$ суммирует e к пределу, равному единице.

7. С уменьшением ε гиперплоскость Γ_0 приближается (по направлению) к гиперплоскости Γ_A (Γ_B), проходящей через l и $\varepsilon e(s_*k)$ $((1 - e)\bar{e}(s_*k))$.

8. Матрица, составленная из коэффициентов нормированных уравнений гиперплоскостей Γ_A (Γ_B), заведомо сильнее A (B).

Этой статьей заканчивается публикация результатов о расходящихся рядах из нашей диссертации ([5]). Некоторые из них в последующий период были получены независимо другими авторами [см. ([6])].

Институт электронных управляющих машин
Ак. наук СССР

Поступило
4.XI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брудно А. Л., Топология полей Тёплица, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 771—780.

[2] Брудно А. Л., Нормы полей, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 1 (1953), 11—14.

[3] Брудно А. Л., Относительные нормы, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 2 (1953), 197—200.

[4] Брудно А. Л., Пример двух матриц Тёплица, ограниченно не противоречивых и ограниченно не покрываемых, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 309—320.

[5] Брудно А. Л., Суммирование ограниченных последовательностей, Диссертация, 1951, Библиотека МГУ.

[6] Lorentz G., Zeller K., Über Paare von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr., 68 (1958), 428—438.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 601—620

А. Д. ТАЙМАНОВ

ХАРАКТЕРИСТИКА АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ. I*

В работе дается характеристика аксиоматизируемых классов моделей и классов моделей, описываемых аксиомами вида $UEUE \ldots \mathfrak{A}$ и $\exists U \exists U \ldots \mathfrak{A}$. Доказываются теоремы, являющиеся усилениями известных теорем Лося—Тарского, Лося—Сушко, Чжана и других авторов.

Настоящая работа была написана в результате изучения работы Чжана ([1]) на семинаре А. И. Мальцева при Ивановском педагогическом институте и, по существу, является продолжением работы ([1]). Обобщая понятие сильной подмодели, введенное впервые Чжаном, и применяя локальную теорему А. И. Мальцева, оказалось возможным обобщить все теоремы, доказанные Чжаном. При этом все теоремы удается сформулировать так, чтобы они включали известные ранее теоремы как частные случаи. Часть этих результатов независимо от автора получена Д. А. Захаровым.

В § 8 дается характеристика аксиоматизируемых классов моделей. Решение этой проблемы анонсировано Мыщельским ([2]) и Лосем ([3]), но подробного изложения этих работ нам изучить не удалось. Понятие арифметической эквивалентности было введено А. Тарским и изучалось Фраиссе ([4]), но арифметической характеристики классов работа ([4]) не содержит.

Особняком стоит теорема С. Р. Когаловского ([5]) о категорийной характеристике универсальных классов моделей. Вопрос А. И. Мальцева о категорийной характеристике аксиоматизируемых классов остается открытым.

§ 1. Определения и обозначения

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, P_1, \ldots, P_k \rangle$ — модель данной сигнатуры $\mu = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, P_i — основные n_i-арные предикаты, $S(\mathfrak{A})$ — класс всех моделей, изоморфных некоторой подмодели модели $\mathfrak{A}$. $S_n(\mathfrak{A})$ — класс всех моделей $\mathfrak{N}$, входящих в $S(\mathfrak{A})$ и содержащих не более чем n элементов,

$$S_\omega(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(\mathfrak{A}).$$

* Содержание работы доложено на семинаре А. И. Мальцева в Ивановском пединституте 2/II—60 г. и на семинаре Н. Г. Чудакова и С. Р. Когаловского в Саратовском гос. университете 1/III—60 г.

Если $\mathfrak{A}_1 \in S_n(\mathfrak{A})$, то m-расширением модели $\mathfrak{A}_1$ называем расширение модели $\mathfrak{A}_1$, входящее в $S_{n+m}(\mathfrak{A})$. Конечную последовательность $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ целых положительных чисел n_i назовем кортежем l-го ранга. Если аксиома α У. И. П. записана в нормальной пренексной форме, то число перемен кванторов, увеличенное на единицу, назовем видимой степенью аксиомы. Например, если $\nu(x_1, \ldots, x_n)$ не содержит кванторов, то видимая степень формулы

$$\forall x_1 \ldots x_n \nu(x_1, \ldots, x_n)$$

равна единице, а видимая степень формулы

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \nu(x_1, x_2, x_3)$$

равна трем.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ называется $(n_1 n_2 n_3 n_4)$-накрытием модели $\mathfrak{N}$ относительно подмодели

$$\mathfrak{N}_{n_1} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n_1}),$$

если существует такое изоморфное отображение φ_1,

$$\varphi^{\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l} = \varphi_1 \colon \mathfrak{N}_{n_1} \to \mathfrak{M}_{n_1} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_{n_1}) \in S_{n_1}(\mathfrak{M}),$$

что для любого n_2-расширения

$$\mathfrak{M}_{n_1 n_2} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{n_1}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n_2}) \in S_{n_1+n_2}(\mathfrak{M})$$

существует изоморфное отображение φ_2,

$$\varphi_2 : \mathfrak{M}_{n_1 n_2} \to \mathfrak{N}_{n_1 n_2} = (a_1, \ldots, a_{n_1}, b_1, \ldots, b_{n_2}) \in S_{n_1+n_2}(\mathfrak{N}),$$

совпадающее с φ_1^{-1} на $\mathfrak{M}_{n_1}$; для любого n_3-расширения

$$\mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3} = (a_1, \ldots, a_{n_1}, b_1, \ldots, b_{n_2}, c_1, \ldots, c_{n_3}) \in S_{n_1+n_2+n_3}(\mathfrak{N})$$

существует изоморфное отображение φ_3,

$$\varphi_3 : \mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3} \to \mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3} \in S_{n_1+n_2+n_3}(\mathfrak{M}),$$

совпадающее с φ_2^{-1} на $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$; для любого n_4-расширения $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3 n_4}$ модели $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3}$ существует изоморфное отображение φ_4,

$$\varphi_4 : \mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3 n_4} \to \mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3 n_4} \in S_{n_1+n_2+n_3+n_4}(\mathfrak{N}),$$

совпадающее с φ_3^{-1} на $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3}$.

Если модель $\mathfrak{M}$ является $(n_1 n_2 n_3 n_4)$-накрытием модели $\mathfrak{N}$ относительно подмодели $\mathfrak{N}_{n_1}$, то будем писать

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2, n_3, n_4)\, \mathfrak{M}. \qquad (1)$$

Отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ назовем допустимыми отображениями. Они связаны между собой следующим образом:

$$\varphi_1(\mathfrak{N}_{n_1}) = \mathfrak{M}_{n_1} \in S_{n_1}(\mathfrak{M});$$

для данного n_2-расширения $\mathfrak{M}_{n_1 n_2}$ модели $\mathfrak{M}_{n_1}$ φ_2 подбирается так, что

$$\varphi_2(\mathfrak{M}_{n_1 n_2}) = \mathfrak{N}_{n_1 n_2}$$

и $\varphi_2 = \varphi_1^{-1}$ на $\mathfrak{M}_{n_1}$; для данного n_3-расширения $\mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3}$ модели $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$ φ_3 подбирается так, что

$$\varphi_3(\mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3}) = \mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3}$$

и $\varphi_3 = \varphi_2^{-1}$ на $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$; для данного n_4-расширения $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3 n_4}$ модели $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n}$ φ_4 подбирается так, что

$$\varphi_4(\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3 n_4}) = \mathfrak{N}_{n_1 n_2 n_3 n_4},$$

и $\varphi_4 = \varphi_3^{-1}$ на $\mathfrak{M}_{n_1 n_2 n_3}$.

Определение 2. Пусть дан кортеж (n_1, n_2, n_3, n_4). Если для любой подмодели $\mathfrak{N}_{n_1} \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$ имеет место условие (1), то

$$\mathfrak{N} \leqslant (n_1, n_2, n_3, n_4)\, \mathfrak{M}. \tag{2}$$

Если для любого кортежа (n_1, n_2, n_3, n_4) имеет место неравенство (2), то

$$\mathfrak{N} \leqslant [4]\, \mathfrak{M}. \tag{3}$$

Аналогично определяются соотношения:

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}\, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{N} \leqslant (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{N} \leqslant [l]\, \mathfrak{M}. \tag{6}$$

§ 2. Основные леммы

ЛЕММА 1. *Класс моделей* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющих условию*

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M} \tag{4}$$

при данных $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{n_1}$, $(n_1, \ldots, n_l)$, *описывается аксиомой*

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l} \tag{7}$$

видимой степени $l+1$, *начинающейся с* $\exists$.

Доказательство. Пусть нам даны кортеж $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_l)$, модель $\mathfrak{N}$ и подмодель $\mathfrak{N}_{n_1} \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$. Обозначим через $\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})$ конъюнкцию всех формул, стоящих в левом столбце следующей таблицы:

$$P_i(x_1, \ldots, x_{n_i}), \text{ если } P_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \text{ истинно в } \mathfrak{N}_{n_1},$$

$$\sim P_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \text{ в противном случае},$$

$$x_1 = x_2, \text{ если } a_1 \equiv a_2,$$

$$x_1 \neq x_2, \text{ если } a_1 \neq a_2.$$

Формула $\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})$ называется описанием модели $\mathfrak{N}_{n_1}$.

Аксиома $\xi = (\exists x_1 x_2 \ldots x_{n_1})\, \nu(x_1, \ldots, x_{n_1})$ описывает класс моделей $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенству

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1)\, \mathfrak{M}.$$

Среди n_2-расширений модели $\mathfrak{N}_{n_1}$ есть конечное число $N_1, \ldots, N_{k_1}$ таких, что они попарно не изоморфны и для любого n_2-расширения $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$

модели $\mathfrak{N}_{n_1}$ существует изоморфное отображение ψ модели $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$ на одну из моделей N_i, $i = 1, 2, \ldots, k_1$, тождественное на $\mathfrak{N}_{n_1}$, т. е.

$$\psi\mathfrak{N}_{n_1} = N_i, \quad \psi a_i = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1.$$

Описания моделей N_i, $i = 1, 2, \ldots, k_1$, обозначим через

$$\nu_i(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k_1.$$

Аксиома

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2} = (\exists x_1 \ldots x_{n_1})\{(\forall y_1, \ldots, y_{n_2})\ [\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})\ \&$$

$$\&\ \bigvee_{i=1}^{k_1} \nu_i(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2})]\} = \exists x_1 \ldots x_{n_1} \forall y_1 \ldots y_{n_2} \cdot$$

$$\cdot [\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})\ \&\ \bigvee_{i=1}^{k_1} \nu_i(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2})]$$

описывает класс моделей, являющихся $(n_1 n_2)$-покрытиями модели $\mathfrak{N}$ относительно подмодели $\mathfrak{N}_{n_1}$, т. е. таких моделей $\mathfrak{M}$ которые удовлетворяют неравенству

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2)\,\mathfrak{M}.$$

Среди n_3-расширений модели N_i есть конечное число расширений $N_{i_1 i_2}$, $i_2 = 1, 2, \ldots, k(i_1)$, таких, что любое n_3-расширение модели N_{i_1} изоморфно одной из этих моделей. При этом существует изоморфное отображение, тождественное на N_{i_1}. Описания этих моделей обозначим через

$$\nu_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2}; z_1, \ldots, z_{n_3}), \quad i_2 = 1, 2, \ldots, k(i_1).$$

Рассмотрим аксиому

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1 n_2 n_3} = (\exists\ x_1 \ldots x_{n_1})\ (\forall\ y_1 \ldots y_{n_2})\{\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})\ \&$$

$$\&\ \bigvee_{i_1=1}^{k_1} \nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2})\ \&$$

$$\mathop{\&}_{i_1=1}^{k_1} [\nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}) \to \mathop{\&}_{i_2=1}^{k(i_1)} (\exists\ z_1^{i_1 i_2} \ldots z_{n_3}^{i_1 i_2}) \cdot$$

$$\cdot \nu_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2}; z_1^{i_1 i_2}, \ldots, z_{n_3}^{i_1 i_2})]\} =$$

$$= (\exists\ x_1 \ldots x_{n_1})\ (\forall\ y_1 \ldots y_{n_2})\ (\exists\ z_1^{11} \ldots z_{n_3}^{11} \ldots z_1^{k_1 k(k_1)} \ldots z_{n_3}^{k_1 k(k_1)}) \cdot$$

$$\cdot [\nu(x_1, \ldots, x_{n_1})\ \&\ \bigvee_{i_1=1}^{k_1} \nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2})\ \&$$

$$\mathop{\&}_{i_1=1}^{k_1} (\nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2}) \to \mathop{\&}_{i_2=1}^{k(i_1)} \nu_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_{n_1}; y_1, \ldots, y_{n_2}, z_1, \ldots, z_{n_3}))] =$$

$$= (\exists\ x_1 \ldots x_{n_1})\ (\forall y_1 \ldots y_{n_2})\ (\exists\ z_1^{11} \ldots z_{n_3}^{11} \ldots z_1^{k_1 k(k_1)} \ldots z_{n_3}^{k_1 k(k_1)})\ \mathfrak{A}_3(x, y, z).$$

Она описывает класс моделей, являющихся (n_1, n_2, n_3)-покрытиями модели $\mathfrak{N}$ относительно $\mathfrak{N}_{n_1}$.

Допустим, что для $l = 1, 2, \ldots, m$ класс решений неравенства (3) при заданных $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{n_1}$, $n_1, \ldots, n_l$ описывается начинающейся с $\exists$ аксиомой $\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2, \ldots, n_l}$ видимой степени l вида $\underbrace{\exists\forall \ldots \forall}_{m} \nu$, если m четно, и вида $\underbrace{\exists\forall \ldots \exists}_{m} \nu$, если m нечетно. Докажем лемму 1 для $l = m + 1$.

Случай 1. $m = 2s$. Аксиома

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_m, n_{m+1}}$$

получается из аксиомы

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_m} = (\exists\, x_1, \ldots, x_{n_1})\, (\forall\, y_1 \ldots y_{n_2}) \ldots$$
$$\ldots (\forall\, v_1 \ldots v_{n_m})\, \mathfrak{A}_m\, (x, y, \ldots, v)$$

добавлением в $\mathfrak{A}_m$ выражения

$$\mathop{\&}_{i_1 \ldots i_m} \{ \mathrm{v}_{i_1 \ldots i_m} \to \mathop{\&}_{i_{m+1}=1}^{k(i_1 \ldots i_m)} (\exists w_1^{i_1 \ldots i_m} \ldots w_{n_{m+1}}^{i_1 \ldots i_m})\, \mathrm{v}_{i_1 \ldots i_m\, i_{m+1}} \}.$$

Вынося все кванторы вперед, мы получим формулу

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_{m+1}}$$

вида

$$\underbrace{\exists \ldots \exists}_{m+1} \mathfrak{A}_{m+1},$$

которая описывает класс всех $(n_1 n_2 \ldots n_{m+1})$-покрытий модели $\mathfrak{N}$ относительно $\mathfrak{N}_{n_1}$.

Случай 2. $m = 2s + 1$. Аксиома

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_m, n_{m+1}}$$

получается из аксиомы

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_m}$$

добавлением в $\mathfrak{A}_m$ выражения

$$\mathop{\&}_{i_1 \ldots i_m} (\forall\, v_1 \ldots v_{i_{m+1}}) \bigvee_{i_{m+1}=1}^{k_1(i_1 \ldots i_m)} \mathrm{v}_{i_1 \ldots i_m\, i_{m+1}}.$$

Вынося кванторы вперед, получаем формулу

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_{m+1}}$$

вида

$$\underbrace{\exists \forall \ldots \forall}_{m+1} \mathfrak{A}_{m+1},$$

описывающую класс всех $(n_1 n_2 \ldots n_m n_{m+1})$-покрытий модели $\mathfrak{N}$ относительно $\mathfrak{N}_{n_1}$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Класс моделей* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющих условию*

$$\mathfrak{M} \leqslant (n_1, n_2, \ldots, n_l)\, \mathfrak{N} \tag{4}$$

при данных $(n_1, \ldots, n_l)$, $\mathfrak{N}$, *описывается аксиомой*

$$\eta_{\mathfrak{N}, n_1, \ldots, n_l} \tag{8}$$

видимой степени $l + 1$, *начинающейся с* $\forall$.

Доказательство. Пусть даны кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ и модель $\mathfrak{N}$. Среди моделей из $S_{n_1}(\mathfrak{N})$ существует конечное число моделей $N_1, \ldots, N_k$ таких, что каждая модель из $S_{n_1}(\mathfrak{N})$ изоморфна одной из них.

Как в доказательстве леммы 1, построим модели

$$N_{i_1},\quad i_1 = 1, 2, \ldots, k_1,\quad N_{i_1 i_2},\quad i_2 = 1, 2, \ldots, k(i_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_l},\ i_l = 1. 2, \ldots, k(i_1, \ldots, i_{l-1}),$$

и их описания

$$\nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}),\quad \nu_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu_{i_1 i_2, \ldots, i_l}(x_1, \ldots, x_{n_1};\ y_1, \ldots, y_{n_2}; \ldots; v_1, \ldots, v_{n_l}).$$

Аксиома

$$\eta_{\mathfrak{N}, n_1} = (\forall x_1 \ldots x_{n_1}) \bigvee_{i_1=1}^{k_1} \nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1})$$

описывает класс моделей, у которых каждая подмодель, содержащая не более n_1 элементов, изоморфно вложима в $\mathfrak{N}$.

Аксиома

$$\eta_{\mathfrak{N}, n_1, n_2} = (\forall\ x_1, \ldots x_{n_1}) \{ \bigvee_{i_1=1}^{k_1} \nu_{i_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \;\&$$

$$\mathop{\&}_{i_1=1}^{k_1} [\nu_{i_1}(x_1, \ldots, x_{n_1}) \to \mathop{\&}_{i_2=1}^{k(i_1)} (\exists y_1^{i_2} \ldots y_{n_2}^{i_2})\, \nu_{i_1 i_2}(x_1, \ldots, x_{n_1};\ y_1^{i_1}, \ldots, y_{n_2}^{i_2})]\} =$$
$$= (\forall\ x_1 \ldots x_{n_1})(\exists\, y_1^1 \ldots y_{n_2}^1 \ldots y_1^{k(i_1)} \ldots y_{n_2}^{k(i_1)})\, \mathfrak{A}_2(x, y)$$

описывает класс моделей $\mathfrak{M}$, у которых любая подмодель $\mathfrak{M}_{n_1}$ из n_1 элементов изоморфно вложима в $\mathfrak{N}$ с помощью такого изоморфизма φ, что для любого n_2-расширения $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$ модели $\mathfrak{N}_{n_1} = \varphi(\mathfrak{M}_{n_1})$ в $\mathfrak{N}$ найдется изоморфное отображение φ_1 модели $\mathfrak{N}_{n_1 n_2}$ в $\mathfrak{M}$, совпадающее с φ^{-1} на $\mathfrak{N}_{n_1}$.

Аксиома

$$\eta_{\mathfrak{N}, n_1, n_2, n_3} = (\forall\ x_1 \ldots x_{n_1})\ (\exists\ y_1^1 \ldots y_{n_2}^1 \ldots$$
$$\ldots y_1^{k(i_1)} \ldots y_{n_2}^{(k i_1)})\ \{\mathfrak{A}_2\ \&\ (\forall\ z_1 \ldots z_{n_3}) \cdot$$
$$\cdot \bigvee_{i_1 i_2 i_3} \nu_{i_1 i_2 i_3}(x_1, \ldots, x_{n_1},\ y_1^{i_2}, \ldots, y_{n_2}^{i_2},\ z_1, \ldots, z_{n_3})\} =$$

$$= (\forall\ x_1, \ldots x_{n_1})\ (\exists\, y_1^1 \ldots y_{n_2}^1 \ldots y_1^{k(i_1)} \ldots y_{n_2}^{k(i_1)})\ (\forall\ z_1 \ldots z_{n_3})\, \mathfrak{A}_3(x, y, z)$$

описывает класс моделей $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M} \leqslant (n_1, n_2, n_3)\, \mathfrak{N}$.

Продолжая наше рассуждение так же, как в доказательстве леммы 1, получаем, что класс моделей $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M} \leqslant (n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{N}$, описывается аксиомой

$$\eta_{\mathfrak{N}, n_1, n_2, \ldots, n_{2s}}$$

вида

$$\underbrace{\forall \exists \ldots \exists}_{2s} \nu,$$

если $l = 2s$, и аксиомой вида

$$\underbrace{\forall \exists \ldots \forall}_{2s+1} \nu$$

если $l = 2s + 1$.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\mathfrak{M} \leqslant (n_1, n_2, \ldots, n_l)\,\mathfrak{N}$. *Тогда всякая аксиома вида*

$$\exists\, x_1^1 x_2^1 \ldots x_{n_1}^1 \forall\, x_1^2 \ldots x_{n_2}^2 \exists\, x_1^3 \ldots x_{n_3}^3 \ldots \nu\,(x_1^1 \ldots x_{n_1}^1, \ldots, x_1^l, \ldots, x_{n_l}^l)$$

видимой степени l, *истинная в* $\mathfrak{M}$, *истинна в* $\mathfrak{N}$, *а всякая аксиома вида*

$$\forall\, x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \exists\, x_1^2 \ldots x_{n_2}^2 \forall\, x_1^3 \ldots x_{n_3}^3 \ldots \nu\,(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^l, \ldots, x_{n_l}^l)$$

видимой степени l, *истинная в* $\mathfrak{N}$, *истинна в* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть аксиома

$$\alpha = \forall\, x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \exists\, x_1^2 \ldots x_{n_2}^2 \ldots \nu\,(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots)$$

истинна в $\mathfrak{N}$. Покажем, что α истинна в $\mathfrak{M}$. Возьмем в $\mathfrak{M}$ произвольные элементы $(a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1) = \mathfrak{M}'$ и отобразим модель $\mathfrak{M}'$ на $\mathfrak{N}(\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1)$ допустимым изоморфизмом $\varphi_1 = \varphi^{\mathfrak{M}', n_1 \ldots n_k}$. Тогда аксиома

$$\exists\, x_1^2 \ldots x_{n_2}^2 \ldots \nu\,(\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1, x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots)$$

истинна в $\mathfrak{N}$. В $\mathfrak{N}$ можно выбрать элементы $\bar{\bar{a}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{a}}_{n_2}^2$ так, чтобы аксиома

$$\forall\, x_1^3 \ldots x_{n_3}^3 \exists\, x_1^4 \ldots x_{n_4}^4 \ldots \nu\,(\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1, \bar{\bar{a}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{a}}_{n_2}^2, x_1^3, \ldots, x_{n_3}^3, \ldots)$$

была истинна в $\mathfrak{N}$. Существует допустимый изоморфизм φ_2, отображающий

$$\mathfrak{N}^2 = (\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1, \bar{\bar{a}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{a}}_{n_2}^2)$$

на

$$\mathfrak{M}^2 = (a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1, \bar{a}_1^2, \ldots, \bar{a}_{n_2}^2).$$

Добавим к $\mathfrak{M}^2$ произвольные элементы $a_1^3, \ldots, a_{n_3}^3$ и отобразим

$$\mathfrak{M}^3 = (a_1^1, \ldots, \bar{a}_1^2, \ldots, a_1^3, \ldots, a_{n_3}^3)$$

допустимым способом на

$$\mathfrak{N}^3 = (\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1, \bar{\bar{a}}_1^2, \ldots, \bar{\bar{a}}_{n_2}^2, \bar{a}_1^3, \ldots, \bar{a}_{n_3}^3).$$

Тогда в $\mathfrak{N}$ истинна аксиома

$$\exists\, x_1^4 \ldots x_{n_4}^4 \forall\, x_1^5 \ldots x_{n_5}^5 \ldots \nu\,(\bar{a}_1^1, \ldots, \bar{a}_{n_1}^1, \bar{\bar{a}}_1^2, \ldots, \bar{a}_1^3, \ldots, x_1^4, \ldots, x_1^5, \ldots).$$

Продолжая наше рассуждение, через k шагов убеждаемся, что аксиома α истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично доказывается первая часть леммы.

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{N} \leqslant [l]\,\mathfrak{M}$, *то всякая аксиома видимой степени* l, *начинающаяся с* $\forall$, *истинная в* $\mathfrak{N}$, *истинна в* $\mathfrak{M}$ *и всякая аксиома видимой степени* l, *начинающаяся с* $\exists$, *истинная в* $\mathfrak{M}$, *истинна в* $\mathfrak{N}$.

Определение 3. $\mathfrak{N} \overset{l}{=} \mathfrak{M}$ равносильно тому, что

$$\mathfrak{N} \leqslant [l]\,\mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{M} \leqslant [l]\,\mathfrak{N}.$$

$\mathfrak{N}$ арифметически эквивалентно $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда

$$(\forall\, l)\,(\mathfrak{N} \overset{l}{=} \mathfrak{M}).$$

Определение арифметической эквивалентности введено А. Тарским, определение $\mathfrak{N} \overset{l}{=} \mathfrak{M}$ введено Фраиссе.

Из леммы 3 следует, что если $\mathfrak{M} \overset{l}{=} \mathfrak{N}$, то всякая аксиома видимой степени $\leqslant l$, истинная в $\mathfrak{N}$, будет истинной в $\mathfrak{M}$, и обратно.

§ 3. Усиление теоремы Хенкина

Определение 4. Класс моделей K называется l-классом, если он обладает следующим свойством: если для модели $\mathfrak{N}$, любого кортежа l-го ранга $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ и любой модели $\mathfrak{N}_{n_1}$ из $S_{n_1}(\mathfrak{N})$ в K найдется модель $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l}$ такая, что

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l}, \tag{9}$$

то в K существует модель $\mathfrak{M}$, содержащая $\mathfrak{N}$, и $\mathfrak{N} \leqslant [l]\mathfrak{M}$.

Следующая теорема является усилением известной теоремы Хенкина, доказанной им при $l = 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $K \in AC_\Delta$, то K является l-классом для любого $l > 0$.*

Доказательство. Пусть $K \in AC_\Delta$ и модель $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию определения 4. Рассмотрим систему аксиом Σ, состоящую из:

1) Σ_K — системы аксиом, определяющей класс K,

2) атомарного описания модели $\mathfrak{N}$,

3) всех аксиом $\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_l}$ для всех $\mathfrak{N}_{n_1} \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$ и кортежей $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$, $l = \mathrm{const}$.

Покажем, что система Σ совместна. Возьмем произвольную конечную подсистему Σ_1 системы Σ. В Σ_1 входит конечное число формул из 2), а следовательно, конечное число элементов из $\mathfrak{N}$, образующее подмодель $\mathfrak{N}^1$. Далее, в Σ_1 войдет конечное число формул из 3):

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_{n_1^i}, n_1^i, n_2^i, \ldots, n_l^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Пусть

$$\mathfrak{N}^0 = \bigcup_i \mathfrak{N}_{n_1^i} \cup \mathfrak{N}^1, \ \ N_1 = \max\{n_1^i\}, \ \ N_2 = \max_i\{n_2^i\}, \ldots, N_l = \max\{n_l^i\}.$$

Возьмем модель $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}^0, N_1, \ldots, N_l}$ из K, удовлетворяющую условию (9). Очевидно, она удовлетворяет системе Σ_1. По локальной теореме существует модель $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая всем аксиомам из Σ. Легко заметить, что $\mathfrak{M}$ содержит $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leqslant [l]\,\mathfrak{M}$.

§ 4. Теорема Лося — Тарского

Определение 5. Модель $\mathfrak{N} \in S(\mathfrak{M})$ называется l-подмоделью модели $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{N} \leqslant [l]\,\mathfrak{M}$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_l(\mathfrak{M})$ класс всех l-подмоделей модели $\mathfrak{M}$, а через $\mathfrak{S}_l(K)$ — класс всех моделей, являющихся l-подмоделями модели класса K.

Класс K называется l-определимым, если он является l-классом и $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$.

Следующая теорема является усилением известной теоремы Лося и Тарского [см. ([4]) и ([5])] о характеристике универсального класса.

ТЕОРЕМА 2. *Следующие условия эквивалентны*:

1. $K \in \underbrace{UE \ldots}_{l} C_\Delta$.

2. *K есть l-определимый класс.*

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1 следует условие 2. Из условия 1 и теоремы 1 следует, что K есть l-класс при любых $l > 0$. Покажем, что $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$. Пусть $\mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_l(K)$. Тогда существует модель $\mathfrak{M} \in K$ такая, что

$$\mathfrak{N} \leqslant [l]\, \mathfrak{M} \,\&\, \mathfrak{N} \in S(\mathfrak{N}).$$

Если аксиома

$$\alpha = \forall x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \exists x_1^2 \ldots x_{n_2}^2 \ldots \nu(x_1^1, \ldots, x_1^2, \ldots, x_1^3, \ldots)$$

видимой степени $\leqslant l$ истинна на классе K, то она истинна в $\mathfrak{M}$ и, по лемме 3, истинна в $\mathfrak{N}$. Это означает, что $\mathfrak{N} \in K$ и $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$.

Докажем теперь, что из условия 2 следует условие 1. Рассмотрим класс

$$M = \bigcap \{L, K \subset L, \; L \in \underbrace{UE \ldots}_{l} C_\Delta\}.$$

Очевидно, $K \subset M$. Допустим, что существует модель $\mathfrak{N} \in M \setminus K$ и в K выполнено условие 2. Если для модели $\mathfrak{N}$, любых $(n_1, \ldots, n_l)$ и любой подмодели $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{N}^1 \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$, в K существует модель $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}$, удовлетворяющая условию

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}, \tag{11}$$

то в K существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{M})$ и, в силу $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$, модель $\mathfrak{A}$ принадлежит классу K. Но это противоречит допущению $\mathfrak{N} \in M \setminus K$. Значит, существуют последовательность $(n_1^0\, n_2^0 \ldots n_l^0)$ и модель $\mathfrak{N}_0^1 \in S_{n_1^0}(\mathfrak{N})$ такие, что никакая модель $\mathfrak{M}$ из K не удовлетворяет условию

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_0^1, n_1^0, \ldots, n_l^0)\, \mathfrak{M}. \tag{11*}$$

Класс L всех $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию (11), по лемме 1, описывается аксиомой

$$\xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0^1 n_1^0, \ldots, n_l^0}.$$

В классе K истинна аксиома

$$\sim \xi_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}_0^1 n_1^0, \ldots, n_l^0},$$

ложная на модели $\mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{N} \,\overline{\in}\, M$, т. е. $M = K$.

Замечание. Из теоремы 2 при $l = 1$ мы получаем теорему Лося и Тарского.

При $l=2$ из теоремы 2 мы получаем теорему Чжана [см.([1]), теорема 4]. В то же время при $l = 2$ теорема 2 является усилением теоремы 6

работы ([1]), где условие 2 заменено условием $K \in AC_\Delta$ и $S^*(K) \subset K$. В самом деле, легко показать, что

$$S^*(K) = \mathfrak{S}_2(K);$$

в то же время условие, что K есть 2-класс, слабее условия $K \in AC_\Delta$.

ТЕОРЕМА 3. *Если K есть l-класс, то*

$$\mathfrak{S}_l(K) \in \underbrace{UE\ldots}_{l} C_\Delta.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_l(K) = L$. Тогда $\mathfrak{S}_l(L) = L$. Действительно, если $\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}_l(L)$, то для некоторого $\mathfrak{N} \in L$ $\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{N})$. В то же время существует модель $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathfrak{B} \in K$, $\mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{B})$. Очевидно, из

$$\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{N}) \,\&\, \mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{B})$$

следует $\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{B})$ и $\mathfrak{M} \in L$. Покажем, что L есть l-класс. Пусть для модели $\mathfrak{N}$, любой последовательности $(n_1, \ldots, n_l)$ и любой модели $\mathfrak{N}^1 \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$ в L найдется модель $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}$ такая, что

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}.$$

Для модели $\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}$ существует модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}$ из K такая, что

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l} \leqslant [l]\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^1, n_1, \ldots, n_l}.$$

По условию, K есть l-класс и существует модель $\mathfrak{B} \in K$ такая, что

$$\mathfrak{N} \leqslant [l]\, \mathfrak{B} \ \text{ и } \ \mathfrak{N} \in S(\mathfrak{B}).$$

Это означает, что

$$\mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_l(K) = L.$$

Таким образом, L есть l-класс и $\mathfrak{S}_l(L) = L$. Из теоремы 2 находим

$$L \in \underbrace{UE\ldots}_{l} C_\Delta.$$

При $l = 2$ получаем усиление теоремы 7 работы ([1]).

§ 5. Теорема Лося — Сушко

Определение 6. Последовательность $\{\mathfrak{M}_i\}$ моделей $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, назовем l-цепью, если $\mathfrak{M}_i \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{M}_{i+1})$ при $i = 1, 2, 3, \ldots$ и для любой подмодели $\mathfrak{M}'$ из $S(\mathfrak{M}_i)$ тождественное вложение $\mathfrak{M}'$ в $\mathfrak{M}_{i+1}$ является допустимым отображением $\varphi_1^{\mathfrak{M}', n_1, \ldots, n_l}$.

Через $U_l(K)$ обозначим совокупность моделей, являющихся суммами l-цепей $\{\mathfrak{M}_i\}$ при $\mathfrak{M}_i \in K$. Очевидно $K \subset U_l(K)$ при любом $l > 0$.

ЛЕММА 4. *Если K есть $l+1$-класс, то*

$$U_l(K) \subset \mathfrak{S}_{l+1}(K).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_i \in K$, $\{\mathfrak{M}_i\}$ — l-цепь, $\mathfrak{N} = \bigcup_i \mathfrak{M}_i$. Возьмем произвольный кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_{l+1})$ $l+1$-ранга и модель $\mathfrak{N}_{n_1} \in S_{n_1}(\mathfrak{N})$. Тогда найдется модель $\mathfrak{M}_{i_1}$, содержащая $\mathfrak{N}_{n_1}$. Покажем, что $\mathfrak{M}_{i_1}$ удовлетворяет условию

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, n_2, \ldots, n_{l+1})\, \mathfrak{M}_{i_1}.$$

Нужно найти все допустимые отображения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{l+1}$ для пары $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}_{i_1}$. Тождественное отображение модели $\mathfrak{N}_{n_1}$ в модель $\mathfrak{M}_{i_1}$ обозначим через φ_1:

$$\varphi_1 : \mathfrak{N}_{n_1} \to \mathfrak{N}_{n_1} = \mathfrak{B}_{n_1} \subset \mathfrak{M}_{i_1}$$

(модель $\mathfrak{N}_{n_1}$ обозначается через $\mathfrak{B}_{n_1}$, если она рассматривается как подмодель $\mathfrak{M}_{i_1}$). Для любого n_2-расширения $\mathfrak{B}_{n_1n_2}$ модели $\mathfrak{B}_{n_1}$ в $\mathfrak{M}_{i_1}$ тождественное отображение $\mathfrak{B}_{n_1n_2}$ в $\mathfrak{N}$ обозначим через φ_2:

$$\varphi_2 : \mathfrak{B}_{n_1n_2} \to \mathfrak{B}_{n_1n_2} = \mathfrak{N}_{n_1n_2} \subset \mathfrak{N}.$$

Возьмем n_3-расширение $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3}$ модели $\mathfrak{N}_{n_1n_2}$ в $\mathfrak{N}$. Оно лежит в некотором $\mathfrak{M}_{i_2}$. Обозначим через $\psi^1, \psi_2^1, \ldots, \psi_l^1$ допустимые отображения, соответствующие паре моделей $\mathfrak{M}_{i_1}$, $\mathfrak{M}_{i_2}$ и подмодели $\mathfrak{B}_{n_1n_2}$. При этом мы полагаем, что ψ_1^1 — тождественное отображение. Тогда

$$\varphi_2 = \psi_1^1 : \quad \mathfrak{B}_{n_1n_2} \to \mathfrak{N}_{n_1n_2} \subset \mathfrak{M}_{i_2}.$$

Для $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3}$ полагаем $\varphi_3 = \psi_2^1$, где ψ_2^1 есть допустимое отображение пары $\mathfrak{M}_{i_1}$, $\mathfrak{M}_{i_2}$. Тогда

$$\varphi_3 = \psi_2^1 : \quad \mathfrak{N}_{n_1n_2n_3} \to \mathfrak{B}_{n_1n_2n_3} \in S(\mathfrak{M}_{i_1}).$$

Для произвольного n_4-расширения $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3n_4}$ модели $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3}$ в $\mathfrak{M}_{i_1}$ существует допустимое отображение ψ_3^1, отображающее $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3n_4}$ в $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4} \in S(\mathfrak{M}_{i_2})$. Положим $\varphi_4 = \psi_3^1$. Произвольное n_5-расширение $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4n}$ модели $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4}$ в $\mathfrak{N}$ лежит в некотором $\mathfrak{M}_{i_3}$, содержащем $\mathfrak{M}_{i_2}$.

Допустимые отображения, соответствующие паре моделей $\mathfrak{M}_{i_2}$, $\mathfrak{M}_i$ и подмодели $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3n_4} \in S(\mathfrak{M}_{i_2})$, обозначим через $\psi_1^2, \psi_2^2, \ldots$. При этом мы полагаем, что отображение ψ_1^2 тождественное. Тогда ψ_2^2 отображает $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4n_5}$ в $\mathfrak{M}_{i_2}$, оставляя неподвижными элементы из $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4}$. Таким образом отображение $\psi_2^2 \cdot \psi_4^1$ будет допустимым отображением φ_5. Произвольное n_6-расширение $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3n_4n_5n_6}$ модели $\mathfrak{B}_{n_1n_2n_3n_4n_5}$ в $\mathfrak{M}_{i_1}$ отображается в $\mathfrak{N}_{n_1n_2n_3n_4n_5n_6}$ посредством отображения $\psi_5^1\psi_3^2$ в $\mathfrak{M}_{i_3}$. Продолжая наше рассуждение, мы построим все отображения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{l+1}$. Это означает, что

$$\mathfrak{N} \leqslant (\mathfrak{N}_{n_1}, n_1, \ldots, n_{l+1})\, \mathfrak{M}_{i_1}.$$

По условию леммы, K есть $l+1$-класс. Следовательно, существует модель $\mathfrak{M} \in K$ такая, что $\mathfrak{N} \in \mathfrak{S}_{l+1}(\mathfrak{M})$, т. е. $U_l(K) \subset \mathfrak{S}_{l+1}(K)$.

ЛЕММА 5. *Если $\mathfrak{A} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{B})$, $l > 1$, то существует модель $\mathfrak{A}_1$, арифметически эквивалентная $\mathfrak{A}$ и содержащая $\mathfrak{B}$ как подмодель, и $\mathfrak{B} \in \mathfrak{S}_{l-1}(\mathfrak{A})$.*

Доказательство. Рассмотрим класс K моделей, описываемых системой всех аксиом, истинных на $\mathfrak{A}$. Из условия леммы и теоремы 1 следует, что модель $\mathfrak{B}$ вложима в некоторую модель $\mathfrak{A}_1$ из K.

ЛЕММА 6. *Если класс K есть l-класс для $l > 1$, то всякая модель $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{S}_l(K)$ арифметически эквивалентна сумме некоторой $l-1$-цепи K-моделей.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{S}_l(K)$, то существует модель $\mathfrak{H}_0 \in K$ и $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{H}_0)$. Поскольку $l > 1$, всякая конечная подмодель $\mathfrak{H}_0$ изоморфно вложима в $\mathfrak{A}_0$. По лемме 5, найдется модель $\mathfrak{A}_1$, арифметически эквивалентная $\mathfrak{A}_0$ и содержащая $\mathfrak{H}_0$. Очевидно, $\mathfrak{A}_0 \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{A}_1)$. По теореме 3,

$$\mathfrak{S}_l(K) \in \underbrace{UE\ldots C}_{l}{}_\Delta$$

и $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_l(K)$. Следовательно, существует модель $\mathfrak{H}_l \in K$ такая, что $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{H}_1)$.

Допустим, что построены модели $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{H}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{H}_n$ такие, что все $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ арифметически эквивалентны, все $\mathfrak{H}_i \in K$ и $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{H}_i)$.

Существует модель $\mathfrak{A}_{n+1}$ такая, что $\mathfrak{A}_{n+1}$ арифметически эквивалентна $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{H}_n \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{A}_{n+1})$, $\mathfrak{H}_n \in S(\mathfrak{A}_{n+1})$. Из аксиоматизируемости $\mathfrak{S}_l(K)$ следует существование модели $\mathfrak{H}_{n+1}$ в K такой, что $\mathfrak{A}_{n+1} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{H}_{n+1})$. Продолжая рассуждение, мы получим последовательность моделей $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{H}_0, \ldots, \mathfrak{A}_i, \mathfrak{H}_i, \ldots$ таких, что $\mathfrak{A}_i$ арифметически эквивалентна $\mathfrak{A}_0$ при $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathfrak{H}_i \in K$, $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{H}_i)$ и $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{A}_{i+1})$.

Очевидно,

$$\bigcup \mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{H}_i.$$

По теореме Тарского, модель $\mathfrak{A}_0$ арифметически эквивалентна $\bigcup \mathfrak{A}_i$ и $\bigcup \mathfrak{H}_i$.

Рассмотрим последовательность $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, и покажем, что

$$\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{S}_{l-1}(\mathfrak{H}_{i+1}).$$

Возьмем произвольную подмодель $\mathfrak{H}_i^{n_i} \in S_{n_i}(\mathfrak{H}_i)$ и произвольную одноэлементную подмодель $\mathfrak{A}_i^1 \in S_1(\mathfrak{A}_i)$. Пусть паре $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{H}_i$ соответствуют допустимые изоморфизмы φ_j^i, $j = 1, \ldots, l$, паре $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_{i+1}$ — допустимые изоморфизмы ψ_j^i, $j = 1, \ldots, l$, паре $\mathfrak{A}_{i+1}$, $\mathfrak{H}_{i+1}$ — допустимые изоморфизмы φ_j^{i+1}, $j = 1, \ldots, l$. При этом считаем, что в качестве исходных подмоделей берутся соответственно $\mathfrak{A}_i^1$, $\varphi_2^i(\mathfrak{H}_i^{n_i})$ и $\psi_1^i \varphi_2^{i\,\prime}(\mathfrak{H}_i^{n_i})$, а в качестве расширения $\varphi_1^i(\mathfrak{A}_i^1)$ берется $\mathfrak{H}_i^{n_i}$. Тогда отображения

$$\varphi_2^{i+1}\psi_2^i\varphi_3^i = \lambda_2,$$

$$\varphi_4^i\psi_3^i\varphi_3^{i+1} = \lambda_3,$$

$$\varphi_4^{i+1}\psi_4^i\varphi_5^i = \lambda_4,$$

$$\varphi_6^i\psi_5^i\varphi_5^i = \lambda_5,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_{l-1}^{i+1}\psi_{l-1}^i\varphi_l^i = \lambda_{i-1}, \text{ если } l-1 \text{ четно},$$

$$\varphi_l^i\psi_{l-1}^i\varphi_{l-1}^{i+1} = \lambda_{l-1}, \text{ если } l-1 \text{ нечетно},$$

образуют допустимые изоморфизмы для пары $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_{i+1}$. Таким образом, $\bigcup \mathfrak{H}_i \subset U_{l-1}(K)$ и $\mathfrak{S}_l(K) \subset Cl(U_{l-1}(K))$, если K есть l-класс (через

$Cl(K)$ здесь обозначен класс всех моделей $\mathfrak{B}$, арифметически эквивалентных хотя бы одной модели из K).

Лемму 6 можно сформулировать также следующим образом: *если класс K есть l-класс для $l > 1$, то*

$$\mathfrak{S}_l(K) \subset Cl(U_{l-1}(K)).$$

ТЕОРЕМА 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $K \in \underbrace{UE \ldots}_{l} C_\Delta$,
2. *K есть l-класс и* $Cl(U_{l-1}(K)) \subset K$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1 следует условие 2. Из условия 1 и теоремы 1 вытекает, что K есть l-класс для $l > 0$, а в силу леммы 4, $U_{l-1}(K) \subset \mathfrak{S}_l(K)$. По лемме 3, $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$. Следовательно, $U_{l-1}(K) \subset K$. Но $K = ClK$ и $Cl(U_{l-1}(K)) \subset K$.

Докажем теперь, что из условия 2 вытекает условие 1. Из условия 2 и леммы 6 следует, что

$$\mathfrak{S}_l(K) \subset Cl(U_{l-1}(K)) \text{ и } Cl(U_{l-1}(K)) \subset K.$$

Значит, $\mathfrak{S}_l(K) \subset K$. С другой стороны, $K \subset \mathfrak{S}_l(K)$ и $K = \mathfrak{S}_l(K)$. По теореме 3,

$$K = \mathfrak{S}_l(K) \in \underbrace{UE \ldots}_{l} C_\Delta.$$

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $K \in \underbrace{UE \ldots} C_\Delta$,
2. *K есть l-класс и* $ClK = K$, $U_{l-1}(K) \subset K$.

Доказательство. То, что условие 2 вытекает из условия 1, очевидно. Покажем, что условие 1 вытекает из условия 2. В самом деле, из

$$ClK = K \mathbin{\&} U_{l-1}(K) \subset K$$

вытекает

$$Cl(U_{l-1}(K)) \subset K.$$

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $K \in \underbrace{UE \ldots} C_\Delta$.
2. $K \in AC_\Delta$ *и* $U_{l-1}(K) \subset K$.

Утверждение является очевидным следствием теоремы 4. Теорема 4 является усилением теоремы Лося — Сушко.

§ 6. Теорема, дуальная теореме Лося и Тарского

ТЕОРЕМА 5. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $K \in \underbrace{\exists U \ldots}_{l} C_\Delta$.
2. *Если для модели $\mathfrak{A}$ и любого кортежа $(n_1, \ldots, n_l)$ ранга l в K существует модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ такая, что*

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l} \leqslant (n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{A},$$

то $\mathfrak{A} \in K$.

Доказательство. Докажем сначала, что условие 2 вытекает из условия 1. Пусть модель $\mathfrak{A}$ удовлетворяет требованию условия 2 и аксиома

$$\alpha = \underbrace{(\exists x_1 \ldots x_{n_1})(\forall y_1 \ldots y_{n_2}) \ldots}_{l} \nu(x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}, \ldots)$$

истинна в классе K. Тогда для $(n_1, \ldots, n_l)$ найдется модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ в K такая, что

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l} \leqslant (n_1, \ldots, n_l)\,\mathfrak{A}.$$

По лемме 3, аксиома α, истинная в $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$, истинна в модели $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \in K$.

Докажем теперь, что условие 1 вытекает из условия 2. Рассмотрим класс

$$M = \bigcap \{L,\ K \subset L,\ L \in \underbrace{\exists\, U \ldots}_{l}\, C_\Delta\}.$$

Очевидно, $K \subset M$. Допустим, что $\mathfrak{A} \in M \setminus K$. Если $\mathfrak{A} \bar{\in} K$, то существует кортеж $(n_1^0, \ldots, n_l^0)$ такой, что в K нет модели $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей условию

$$\mathfrak{B} \leqslant (n_1^0, \ldots, n_l^0)\,\mathfrak{A}.$$

Аксиома $\eta_{\mathfrak{A}, n_1^0, \ldots, n_l^0}$, определенная в доказательстве леммы 2, определяет класс моделей $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих неравенству

$$\mathfrak{B} \leqslant (n_1^0 \ldots, n_1^0)\,\mathfrak{A}.$$

В классе K истинна аксиома

$$\sim \eta_{\mathfrak{A}, n_1^0, \ldots, n_l^0},$$

а в модели $\mathfrak{A}$ она ложна. Но аксиома

$$\sim \eta_{\mathfrak{A}, n_1^0, \ldots, n_l^0}$$

имеет вид

$$\underbrace{\exists \forall \cdot \ldots}_{l} \cdot \nu$$

и, следовательно, $\mathfrak{A} \bar{\in} M$. Это означает, что $M = K$.

Замечание. При $l = 2$ мы получаем теорему Д. А. Захарова, дуальную теореме 4 работы (1); при $l = 1$ получаем характеристику экзистенциальных классов.

Введем обозначения:

$$\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}^l(\mathfrak{B}) \equiv \mathfrak{B} \in S(\mathfrak{M})\ \&\ \mathfrak{B} \leqslant [l]\,\mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}^l(K) \equiv (\exists \mathfrak{B})(\mathfrak{B} \in K\ \&\ \mathfrak{M} \in \mathfrak{S}^l(\mathfrak{B})).$$

ТЕОРЕМА 6. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $K \in \underbrace{\exists U \exists \ldots}_{l} C_\Delta$.
2. $K \in AC_\Delta$ *и* $\mathfrak{S}^l(K) \subset K$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1 следует условие 2. Если $\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}^l(K)$, то существует $\mathfrak{B} \in K$ и $\mathfrak{B} \leqslant [l]\,\mathfrak{M}$. Тогда, по лемме 3, всякая аксиома α вида

$$\underbrace{\exists\forall \cdot \cdot \cdot}_{l} \nu,$$

истинная в классе K, истинна на $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{S}^l(K) \subset K$.

Докажем теперь, что из условия 2 следует условие 1. Покажем, что в K выполнено условие 2 теоремы 5.

Пусть для модели $\mathfrak{A}$ и любой последовательности $(n_1, \ldots, n_l)$ в K существует модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ такая, что

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l} \leqslant (n_1, \ldots, n_l)\,\mathfrak{A}. \qquad (\alpha)$$

Для модели $\mathfrak{A}$ напишем аксиому

$$\eta_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l} = \forall x_1 \ldots x_{n_1} \exists y_1 \ldots y_{n_2} \forall \ldots \nu,$$

которая описывает класс $K_{n_1 \ldots n_l}$ моделей $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих неравенству (α).

Рассмотрим систему аксиом Σ, состоящую из:

1) Σ_K — системы аксиом, истинных в K,

2) всех аксиом $\eta_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ для всех $(n_1, \ldots, n_l)$.

Возьмем конечную часть Σ' системы Σ. В Σ' входит конечное число аксиом вида 2):

$$\eta_{\mathfrak{A}, n_1^i, \ldots, n_l^i}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Пусть

$$N_1 = \max_i \{n_1^i\}, \ldots, N_l = \max_i \{n_l^i\}.$$

Тогда в K существует модель $\mathfrak{B}_{N_1, \ldots, N_l}$ такая, что

$$\mathfrak{B}_{N_1 \ldots N_l} \leqslant (N_1, \ldots, N_l)\,\mathfrak{A}.$$

Очевидно, модель $\mathfrak{B}_{N_1, \ldots, N_l}$ удовлетворяет системе Σ'. По локальной теореме, в K существует модель $\mathfrak{B}$, удовлетворяющая условию $\mathfrak{B} \leqslant [l]\,\mathfrak{A}$.

Рассмотрим систему S аксиом, состоящую из:

1) $\Sigma_{\mathfrak{A}}$ — множества всех аксиом, истинных в $\mathfrak{A}$,

2) атомарного описания модели $\mathfrak{B}$,

3) всех аксиом $\xi_{\mathfrak{B}', n_1, \ldots, n_l}$ для $\mathfrak{B}' \in S_\omega(\mathfrak{B})$.

Конечная часть S' системы S содержит конечное число аксиом вида 2), в которые входит конечное число элементов из $\mathfrak{B}$, образующих подмодель $\mathfrak{B}_1$, и конечное число формул

$$\xi_{\mathfrak{B}, n_1^i, \ldots, n_l^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Модель $\mathfrak{A}$ удовлетворяет этой системе S'. По локальной теореме, существует модель $\mathfrak{A}_1$, удовлетворяющая системе S. Значит, модель $\mathfrak{A}_1$ ариф-

метически эквивалентна модели $\mathfrak{A}$, содержит модель $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \in S(\mathfrak{A}_1)$, и

$$\mathfrak{B} \leqslant [l]\, \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B} \in \mathfrak{S}_l(\mathfrak{A}_1), \quad \mathfrak{B} \in K,$$
$$\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}^l(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{S}^l(K).$$

По условию 2 теоремы 6, $\mathfrak{S}^l(K) \subset K$. Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_1 \in K$ и $\mathfrak{A} \in K$. Условие 2 теоремы 5 выполнено и

$$\mathfrak{S}^l(K) \in \underbrace{\exists \cup \exists \ldots}\, C_\Delta,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{S}}^l(K)$ класс всех моделей $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{A} \leqslant [l]\, \mathfrak{B}$ хотя бы для одной модели $\mathfrak{B}$ из K. Очевидно,

$$K \subset \mathfrak{S}^l(K) \subset \tilde{\mathfrak{S}}^l(K).$$

ТЕОРЕМА 7. *Если* $K \in AC_\Delta$, *то*

$$\tilde{\mathfrak{S}}^l(K) \in \underbrace{\exists U \ldots}_{l}\, C_\Delta.$$

Доказательство. Покажем, что в $L = \tilde{\mathfrak{S}}^{(l)}(K)$ выполнено условие 2 теоремы 5. Пусть для $\mathfrak{A}$ и любого кортежа $(n_1, \ldots, n_l)$ ранга l в L существует модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ такая, что

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l} \leqslant (n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{A}.$$

Тогда в K существует модель $\mathfrak{B}_1$ такая, что

$$\mathfrak{B}_1 \leqslant [l]\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}.$$

Рассмотрим систему Σ аксиом, состоящую из:

1) Σ_K — системы аксиом, определяющих K,

2) всех аксиом $\eta_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l}$ для всех $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ ранга l.

Возьмем произвольную конечную часть Σ_1 системы Σ. Она содержит конечное число формул

$$\eta_{(\mathfrak{A}, n_1^i, \ldots, n_l^i)}, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{β}$$

Пусть

$$N_j = \max_i \{n_j^i\}, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда для кортежа $\{N_1, \ldots, N_l\}$ в L найдется модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, N_1, \ldots, N_l}$, удовлетворяющая всем формулам (β), и в K существует модель $\mathfrak{B}_2$, удовлетворяющая условию

$$\mathfrak{B}_2 \leqslant [l]\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, N_1, \ldots, N_l}.$$

Очевидно, $\mathfrak{B}_2$ удовлетворяет Σ_1. По локальной теореме, существует модель $\mathfrak{B}_3$ для системы Σ. Это означает, что $\mathfrak{B}_3 \in K$ и $\mathfrak{B}_3 \leqslant [l]\, \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \in \tilde{\mathfrak{S}}^l(K)$.

§ 7. Характеристика экзистенциальных классов

Из теорем 5, 6, 7 для экзистенциальных классов непосредственно получаем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 5а. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in \exists C_\Delta$;

2) *если для модели* $\mathfrak{A}$ *и любого целого положительного числа* n *существует* K*-модель* $\mathfrak{B}$ *такая, что любая подмодель* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1 \in S_n(\mathfrak{B})$, *изоморфно вложима в* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A} \in K$.

ТЕОРЕМА 6а. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in \exists C_\Delta$;

2) $K \in AC_\Delta$ *и* $\mathfrak{S}'(K) \subset K$, *где* $\mathfrak{S}'(K)$ — *класс всех моделей, содержащих подмодель, изоморфную некоторой модели из* K.

ТЕОРЕМА 7а. *Если* $K \in AC_\Delta$, *то* $\tilde{\mathfrak{S}}'(K) \in \exists C_\Delta$.

§ 8. Характеристика аксиоматизируемых классов моделей

ТЕОРЕМА 8. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in AC_\Delta$.

2) *Если для модели* $\mathfrak{A}$, *любого кортежа* $(n_1, \ldots, n_l)$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, *и любой модели* $\mathfrak{A}'$ *из* $S_{n_1}(\mathfrak{A})$ *найдется в* K *модель* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}', n_1, \ldots, n_l}$ *такая, что*

$$\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}', n_1, \ldots, n_l)\ \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}, n_1, \ldots, n_l},$$

то $\mathfrak{A} \in K$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1) следует условие 2). Пусть Σ — система аксиом, определяющая класс K, и

$$\alpha = (\forall x_1^1 \ldots x_{n_1}^1)(\exists x_1^2 \ldots x_{n_2}^2) \ldots \nu(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1, \ldots, x_1^l, \ldots, x_{n_l}^l)$$

входит в систему Σ. Аксиома α определяет кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_l)$. Пусть для модели $\mathfrak{A}$, любого кортежа ранга l и любой модели $\mathfrak{A}' \in S_{n_1}(\mathfrak{A})$ найдется модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}', n_1, \ldots, n_l} \in K$ такая, что

$$\mathfrak{A} < (\mathfrak{A}', n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}', n, \ldots, n_l}.$$

Из условия 1) и теоремы 1 следует, что в K существует модель $\mathfrak{B}$, содержащая $\mathfrak{A}$ и такая, что $\mathfrak{A} \leqslant [l]\, \mathfrak{B}$. Тогда, по лемме 3, аксиома α, истинная на модели $\mathfrak{B}$, будет истинной на модели $\mathfrak{A}$.

Если в систему Σ входит аксиома

$$\beta = (\exists x_1^1 \ldots x_{n_1}^1)(\forall x_1^2 \ldots x_{n_2}^2) \ldots \nu(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, \ldots)$$

видимой степени l, то рассмотрим кортежи ранга $l + 1$. При любом m для кортежа $(m, n_1, \ldots, n_l)$ и любой модели $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}' \in S_m(\mathfrak{A})$, найдется модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}', m, n_1, \ldots, n_l} \in K$, удовлетворяющая условию

$$\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}', m, n_1, \ldots, n_l)\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}', m, n_1, \ldots, n_l}.$$

Класс K есть $(l + 1)$-класс и в K существует модель $\mathfrak{B}$, содержащая $\mathfrak{A}$ и такая, что $\mathfrak{A} \leqslant [l + 1]\, \mathfrak{B}$. Легко заметить, что из $\mathfrak{A} \leqslant [l + 1]\, \mathfrak{B}$ сле-

дует $\mathfrak{B} \leqslant [l]\, \mathfrak{A}$. Тогда, по лемме 3, аксиома β, истинная в $\mathfrak{B}$, будет истинной в $\mathfrak{A}$. Таким образом, всякая аксиома из Σ истинна в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \in K$.

Докажем теперь, что из условия 2) следует условие 1). Пусть в K выполнено условие 2). Рассмотрим класс

$$M = \bigcap \{L,\ K \subset L,\ L \in AC_\Delta\}.$$

Очевидно, $K \subset M$. Если $\mathfrak{A} \in M \setminus K$, то существуют кортеж $(n_1^0, \ldots, n_l^0)$ и модель $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}' \in S_{n_1}(\mathfrak{A})$, такие, что в K нет модели $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей неравенству

$$\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}',\ n_1^0, \ldots,\ n_l^0)\, \mathfrak{B}.$$

Класс моделей $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих этому неравенству, описывается аксиомой

$$\beta = \xi_{\mathfrak{A},\, \mathfrak{A}',\, n_1^0, \ldots, n_l^0}$$

вида

$$\underbrace{\exists\forall\exists \cdots}_{l} \nu$$

(лемма 1). Аксиома $\sim\beta$ истинна на классе K и, следовательно, на M. В то же время аксиома $\sim\beta$ ложна на модели $\mathfrak{A}$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A} \overline{\in} M$ и $M = K$.

Заметим, что теорема 8 является усилением теоремы 1.

§ 9. Конечно-аксиоматизируемые классы

Рассмотрим класс моделей, описываемых одной аксиомой сколемовского вида.

ТЕОРЕМА 9. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in UEC$;

2) *существует пара чисел* n, m *такая, что если для модели* $\mathfrak{A}$ *и любой модели* $\mathfrak{A}' \in S_n(\mathfrak{A})$ *в* K *найдется модель* $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}$, *удовлетворяющая условию* $\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}',\ n,\ m)\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{A}'$, *то* $\mathfrak{A} \in K$.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1) следует условие 2). Пусть класс K определяется аксиомой

$$\alpha = (\forall x_1^1 \ldots x_{n_1}^1 \exists)\, (x_1^2 \ldots x_{n_2}^2)\, \nu\, (x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1,\ x_1^2, \ldots, x_{n_2}^2)$$

и для модели $\mathfrak{A}$ и любой подмодели $\mathfrak{A}'$ из $S_{n_1}(\mathfrak{A})$ найдется модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'} \in K$ такая, что

$$\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}',\ n_1,\ n_2)\, \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}.$$

Тогда аксиома α истинна в $\mathfrak{A}$. Действительно, возьмем произвольные элементы

$$(a_1, \ldots, a_{n_1}) = \mathfrak{A}'.$$

Существует модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}$ из K и такое изоморфное отображение φ модели $\mathfrak{A}'$ на

$$\mathfrak{B}' = (\bar{a}_1, \ldots,\ \bar{a}_{n_1}) \in S_{n_1}(\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}),$$

что любое n_2-расширение

$$\mathfrak{B}'' = (\bar{a}_1, \ldots,\ \bar{a}_{n_1},\ \bar{\bar{b}}_1, \ldots, \bar{\bar{b}}_{n_2})$$

изоморфно вложимо в $\mathfrak{A}$ отображением ψ, совпадающим с φ^{-1} на $\mathfrak{B}'$. Элементы $b_1, \ldots, b_{n_2}$ можно выбрать так, чтобы описание

$$\nu\,(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{\bar{b}}_1, \ldots, \bar{\bar{b}}_{n_2})$$

было истинно. Тогда описание

$$\nu\,(a_1, \ldots, a_{n_1}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n_2})$$

истинно в $\mathfrak{A}$. Это означает, что $\mathfrak{A} \in K$.

Докажем теперь, что из условия 2) следует условие 1). Рассмотрим все аксиомы сколемовского вида, содержащие не более n кванторов всеобщности и не более m кванторов существования, истинные в классе K. Все эти аксиомы определяют некоторый класс M, содержащий K.

Допустим, что существует модель $\mathfrak{A} \in M \setminus K$ и что в K выполнено условие 2). Тогда в $\mathfrak{A}$ существует подмодель $\mathfrak{A}' = (a_1, \ldots, a_{n_1})$ такая, что в K нет модели $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}$, удовлетворяющей условию

$$\mathfrak{A} \leqslant (\mathfrak{A}', n, m)\,\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}'}.$$

Аксиома

$$\alpha = (\exists x_1 \ldots x_n)\,(\forall y_1 \ldots y_m)\,[\nu\,(x_1 \ldots x_n)\,\&\,\bigvee \nu_i\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)],$$

где $\nu\,(x_1, \ldots, x_n)$ — описание $\mathfrak{A}'$, $\nu_i\,(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ — описания m-расширений $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{A}$, истинна в $\mathfrak{A}$ и ложна на классе K. Ее отрицание $\sim \alpha$ истинно на K и ложно в $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A} \bar{\in} M$. Итак, $M = K$. Легко заметить, что класс M определяется одной аксиомой сколемовского вида.

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in UC$;

2) *существует число $n > 0$ такое, что если любая подмодель $\mathfrak{A}'$ модели $\mathfrak{A}$ из $S_n(\mathfrak{A})$ вложена в соответствующую модель $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ из K, то $\mathfrak{A} \in K$.*

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in \exists C$;

2) *существует такое $n > 0$, что если для модели $\mathfrak{A}$ существует модель $\mathfrak{B}$ из K, удовлетворяющая неравенству $\mathfrak{B} \leqslant [n]\,\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} \in K$.*

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $K \in \exists C$;

2) *существует такое положительное число n, что для каждой модели $\mathfrak{M}$ из K пересечение $K \cap S_n(\mathfrak{M})$ непусто и $\mathfrak{S}'(K) \subset K$ (K содержит все надмодели K-моделей).*

Следствия 1, 2, 3 доказываются так же, как теорема 9. Следствие 1 было доказано Воотом ([9]).

Автор выражает искреннюю благодарность А. И. Мальцеву за постановку проблемы и обсуждение работы, а также А. В. Гладкому за ценные замечания и советы.

Поступило
21.III.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chang C. C., On the unions of chains of models, Proc. Am. Math. Soc., 10, № 1 (1959), 120—127.

[2] Mycielski J., A characterisation of arithmetical classes, Bull. Acad. Polon. Sci, Cl. 3, 5, № 11 (1957), 1025—1027.

[3] Łoś J., Quelques théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbras, Math Interpretation Formal Systems, Amsterdam, N. V. Nord — Holl. Uitg, (1955) 98—113.

[4] Łoś J., On the extending of models (1), Fund. Math., XLII, № 1(1955), 38—54.

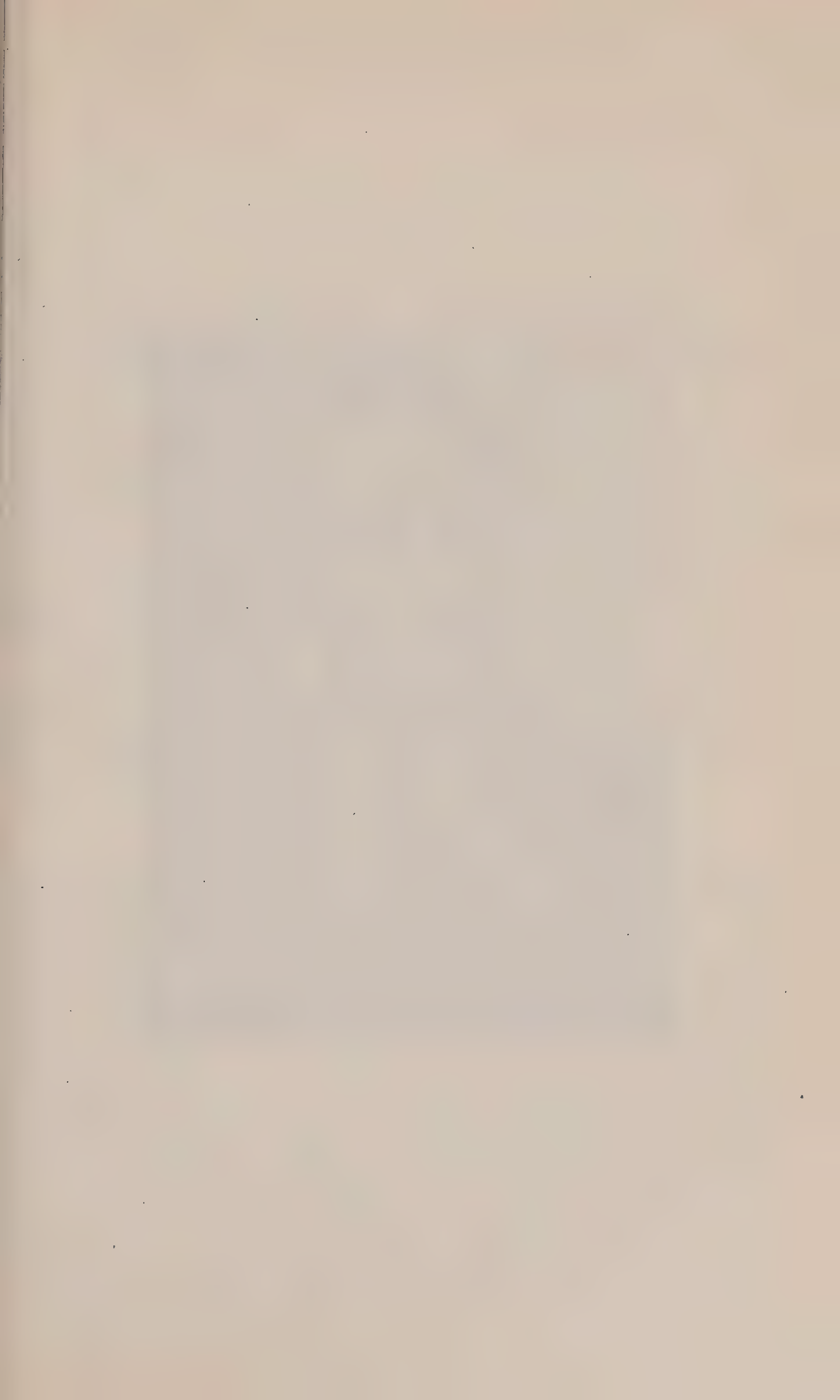
[5] Когаловский С. Р., Об универсальных классах моделей, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 2 (1959), 260—263.

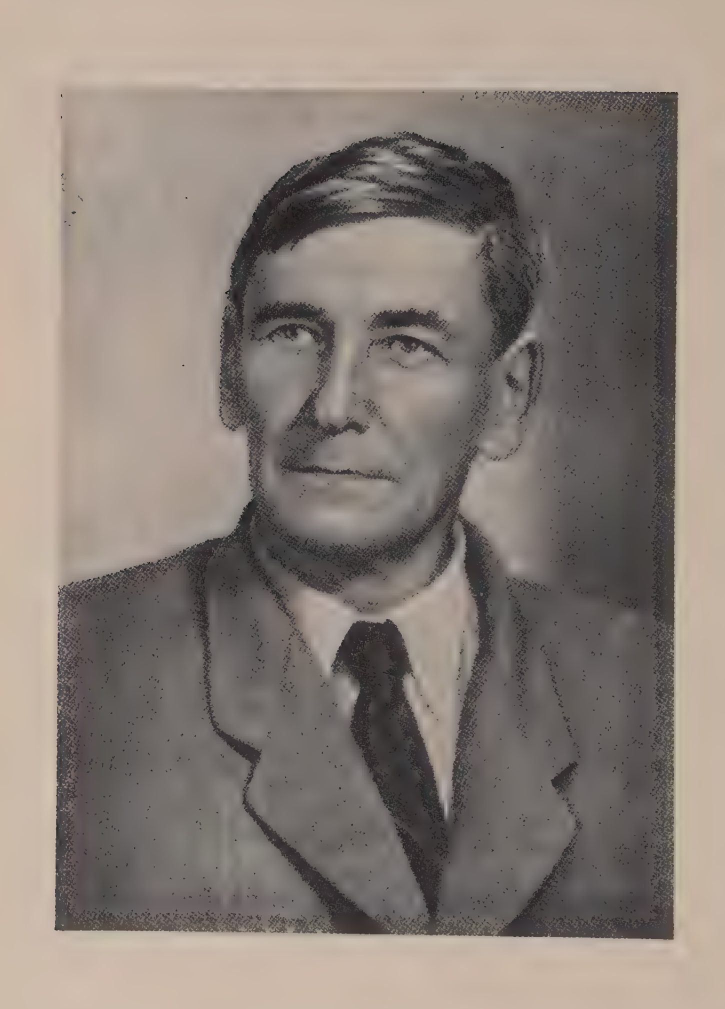
[6] Fraisse R., Sur quelques classifications des systèmes de relations, Publ. sci., Univ. Alger, A1, fasc., 1 (1954), 35—182.

[7] Tarski A., Contribution to the theory of models. II, Proc. Acad. van Wetensh. A. 57, № 5 (1954), 582—588.

[8] Tarski A., Vaught R., Arithmetical Extensions of Relational Systems, Compositio Math., 13 (1957), 81—102.

[9] Vaugth R., Remarks on universal classes of relational systems, Proc. Acad. van Wetensch. A 57, № 5 (1954), 589—591.





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 621—628

А. Г. ПОСТНИКОВ

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ИВАНА МАТВЕЕВИЧА ВИНОГРАДОВА

14 сентября 1961 года исполнилось семьдесят лет со дня рождения крупнейшего творческого работника в области аналитической теории чисел — Ивана Матвеевича Виноградова.

Свою научную деятельность Иван Матвеевич посвятил статистическим задачам теории чисел (так мы будем называть область математики, имеющую дело с неравенствами и асимптотическими формулами в теоретико-числовых вопросах). В таком выборе, кроме личных вкусов, сказалась, по-видимому, и математическая традиция петербургских математиков, оказавших научное влияние на Ивана Матвеевича. Уже свыше четырех десятков лет И. М. Виноградов с огромной целеустремленностью и талантом разрабатывает различные задачи теоретико-числовой статистики.

В одной из своих первых работ (1918 г.) И. М. Виноградов доказал следующий закон распределения вычетов и невычетов степени n по простому модулю p: если n — делитель числа $p-1$, $0<p_1<p$, и a не делится на p, то количество T чисел ряда $1,\dots, p_1$, сравнимых по модулю p с числами вида az^n, выражается формулой

$$T=\frac{p_1}{n}+\theta\sqrt{p}\ln p, \qquad |\theta|\leqslant 1.$$

В этой теореме принципиальный интерес представляет сама постановка задачи. В 19-м веке в теории сравнений ставились почти исключительно вопросы, относящиеся к полной (или приведенной) системе вычетов; рассмотрение же неполной системы вычетов возникало лишь как промежуточный этап в рассуждениях. В теореме Виноградова из системы вычетов выделена часть, а именно классы вычетов, содержащие числа $1, 2,\dots, p_1$, и эта часть самостоятельно изучается. Такого рода задачи будем называть задачами на неполную систему вычетов. И. М. Виноградов поставил и решил целый ряд задач на неполную систему вычетов: задачу о наименьшем невычете, задачу о распределении индексов, задачу о наименьшем первообразном корне. Возможно, что при постановке этих задач И. М. Виноградов исходил из практики — практики составления таблиц, относящихся к классической теории сравнений.

Для исследования задач на неполную систему вычетов Иван Матвеевич, наряду с элементарными методами, употребляет следующий своеобразный аналитический аппарат, аналог ряда Фурье.

Пусть p — простое число. Рассмотрим периодическую с периодом p функцию $\Phi(u)$, определенную для целых u:

$$\Phi(u+p)=\Phi(u),$$

и определим ее «коэффициенты Фурье»

$$a_n=\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}\Phi(t)\,e^{-2\pi i\frac{nt}{p}},\quad n=0,1,\ldots,p-1.$$

Тогда будет справедливо следующее тождество — «разложение Фурье»:

$$\Phi(u)=\sum_{n=0}^{p-1}a_n e^{2\pi i\frac{nu}{p}}.$$

Конечно, эта формула понятна и с точки зрения анализа (тригонометрическая интерполяция) и с точки зрения теории групп (разложение по характерам циклической группы), однако следует подчеркнуть, что она является исходным пунктом при решении задач на неполную систему вычетов. Если положить

$$\Phi(u)=\begin{cases}1, & u=1,2,\ldots,p_1,\\ 0, & u=p_1+1,\ldots,p,\end{cases}$$

то мы получим аналог разложения в ряд Фурье характеристической функции интервала

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{t=1}^{p_1}e^{2\pi i\frac{n(u-t)}{p}}=\begin{cases}1, & u\equiv 1,\ldots,p_1\ (\mathrm{mod}\ p),\\ 0, & u\equiv p_1+1,\ldots,p\ (\mathrm{mod}\ p).\end{cases}$$

Из этой формулы вытекает, что количество T квадратичных вычетов, находящихся среди чисел $1,\ldots,p_1$, будет равно

$$T=\frac{1}{2p}\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{t=1}^{p_1}e^{2\pi i\frac{n(x^2-t)}{p}}.$$

Отсюда становится понятным, что для решения задач на неполную систему вычетов с растущим простым модулем p (или вообще с некоторым растущим модулем q) требуется изучать тригонометрические суммы вида

$$\sum_{x=1}^{p_1}e^{2\pi i\frac{f(x)}{q}},$$

где $f(x)$ — функция, принимающая целочисленные значения. Такие суммы носят название рациональных тригонометрических сумм.

Особенное внимание обращалось на изучение сумм, когда $f(x)$ является многочленом. Если $p_1=q$, то такая сумма называется полной, если $p_1<q$, то неполной. Если p_1 не сильно меньше q (в рамках этой статьи мы не можем точно определить это выражение), то такая сумма называется длинной, если p_1 сильно меньше q, то такая сумма называется короткой. Полная тригонометрическая сумма с многочленом второй степени изучалась Гауссом. Оценки полных (и длинных) тригонометрических сумм с многочленом n-й степени давались Морделлом, Хуа Ло Кеном; глубокие результаты в этом направлении были получены А. Вейлем (в связи с доказательством гипотезы Римана для дзета-функции полей алгебраических функций). Об оценках коротких сумм мы скажем ниже.

Резюмируя, мы должны признать, что работы И. М. Виноградова открыли новое направление в теории сравнений, которое, без сомнения будет развиваться и в будущем.

Задачи на неполную систему вычетов тесно связаны с задачами о распределении дробных долей функций. Этим задачам Иван Матвеевич уделил большое внимание и получил в них результаты принципиального значения.

же в 1917 г. И. М. Виноградов двумя различными способами вывел верхнюю границу для модуля разности

$$\sum_{q<x\leqslant r} \{f(x)\} - \frac{1}{2}(r-q)$$

($\{z\}$ обозначает дробную долю числа z) при единственном условии, что производная $f''(x)$ в интервале $q \leqslant x < r$ подчинена неравенствам

$$\frac{1}{A} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{C}{A},$$

где C — постоянное число и $A \geqslant 2$. Эта граница явилась общим средством установления асимптотических формул для количества целых точек (т. е. точек с целыми координатами) в плоских областях. Первый из упомянутых способов был элементарный, второй основывался на разложении в ряд Фурье функции $\{z\}$ или других периодических функций с периодом 1.

Естественно, что метод изучения распределения дробных долей функций, основанный на разложении в ряд Фурье, сводится к исследованию тригонометрических сумм

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ — вещественная функция, $P \to \infty$. Первой задачей в этом направлении является изучение тригонометрических сумм с многочленом

$$S_{\alpha_n,\ldots,\alpha_1} = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x)},$$

где $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — вещественные числа. Эта задача обобщает задачу об изучении рациональных тригонометрических сумм с многочленом.

И. М. Виноградовым получена прежде всего теорема о нахождении верхней границы для кратного интеграла

$$I_r = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S_{\alpha_n,\ldots,\alpha_1}|^r \, d\alpha_n \ldots d\alpha_1$$

— так называемая теорема И. М. Виноградова о среднем значении:

Пусть $n \geqslant 4$, l — целое положительное и $r = 2\left[nl + \frac{n(n+1)}{4} + 1\right]$. Тогда упомянутая верхняя граница (в упрощенном виде) такова:

$$I_r < UP^{r - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(1-\nu)^l},$$

где

$$U = 2^{nl^2} n^{3n^2 l}, \quad \nu = \frac{1}{n}.$$

При $r \geqslant r_1$, где $r_1 = [20n^2 \ln n]$, указанная граница может быть заме-

нена более простой границей вида

$$I_r < U'P^{r-\frac{n(n+1)}{2}},$$

где U' зависит только от n.

Легко видеть, что I_r равно количеству решений в целых числах $1 \leqslant x_1, \ldots, x_{\frac{r}{2}}, y_1, \ldots, y_{\frac{r}{2}} \leqslant p$ системы диофантовых уравнений

$$x_1^n + \ldots + x_{\frac{r}{2}}^n = y_1^n + \ldots + y_{\frac{r}{2}}^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + \ldots + x_{\frac{r}{2}} = y_1 + \ldots + y_{\frac{r}{2}}.$$

Глубоким арифметическим рассуждением И. М. Виноградов оценил количество решений этой системы. Замечательно, что эта оценка для I_r почти точна.

Обозначим через Π n-мерный куб $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$, через mes $E\{\,\}$ — меру множества тех точек Π, которые обладают свойством, указанным в скобке; обозначим также

$$F(\lambda) = \text{mes}\, E\{|S_{\alpha_n,\ldots,\alpha_1}| < \lambda\}.$$

Ясно, что $F(\lambda)$ — функция распределения, а

$$I_r = \int_0^\infty \lambda^r dF(\lambda)$$

— r-й момент этой функции распределения. Теорема Виноградова о среднем значении — это подсчет момента функции распределения, связанной с тригонометрической суммой. Как известно, с помощью моментов производится оценка функций распределения (это, в сущности, составляет содержание неравенства Чебышева и его обобщений, используемых в теории вероятностей); точно так же с помощью теоремы о среднем значении можно показать, что

$$\text{mes}\, E\{|S_{\alpha_0,\ldots,\alpha_1}| < U_2 P^{0,9}\} > 1 - P^{-\frac{n^2}{10}}$$

(U_2 — константа, зависящая от n). Это утверждение, однако, не дает никакого критерия, относящегося к числам $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (никакой теоремы переноса, как выражаются в теории диофантовых приближений), для того, чтобы тригонометрическая сумма имела ту или иную нетривиальную оценку. Задача же состоит в получении оценок для индивидуальной тригонометрической суммы, а не только в получении метрических результатов.

Для решения этой задачи И. М. Виноградов предложил замечательный прием, который мы здесь можем лишь описать. Каждой тригонометрической сумме сопоставляется точка в n-мерном единичном кубе Π. Для данной тригонометрической суммы находятся другие тригонометрические суммы, мало отличающиеся от нее по величине («товарищи»), и сумма выражается как среднее арифметическое по ее «товарищам» («скажи мне, кто твои товарищи, и я скажу тебе, кто ты сам»). Далее, если эти «това-

рищи» хорошо раскинуты по кубу П, то среднее арифметическое по «товарищам» можно заменить (с допустимой погрешностью) средним по всему кубу П. Таким образом, задача сводится к подсчету момента I_r.

С помощью этого приема И. М. Виноградов доказал (мы берем теорему не в самой общей и сильной форме) такую оценку: если

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| < 1, \quad P < q < P^{n-1},$$

то

$$|S_{\alpha_n, \ldots, \alpha_1}| \leqslant e^{c_1 n \ln^2 n} P^{1 - \frac{c_2}{n^2 \ln n}},$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — постоянные. До получения этой оценки приходилось довольствоваться оценкой Г. Вейля, имевшей вид:

$$c_1(n) P^{1 - \frac{c}{2^n}},$$

где $c_1(n)$, $c > 0$ — постоянные.

В приложении к рациональным тригонометрическим суммам теорема Виноградова дает оценки коротких сумм, для которых результаты Морделла, Хуа Ло Кена, А. Вейля ничего нетривиального не дают.

Метод оценки тригонометрических сумм И. М. Виноградова является блестящим вкладом в науку, и возможности этого метода далеко не исчерпаны. Задачу о распределении дробных долей многочлена можно трактовать как задачу на изучение динамических систем специального вида. Например, если мы за пространство динамической системы возьмем единичный квадрат, за меру — меру Лебега, а преобразование определим так:

$$T(\alpha, \beta) = (\beta, \{2\beta - \alpha + 2\gamma\}),$$

где γ — фиксированное иррациональное число, то при $x = 1, 2, \ldots$

$$T^x(\alpha, \beta) = (\{(x^2 - x)\gamma - (x - 1)\alpha + x\beta\}, \{(x^2 + x)\gamma - x\alpha + (x+1)\beta\}).$$

Мы видим, что задача о распределении дробных долей квадратичного многочлена есть задача о поведении первой координаты точки в специальной динамической системе на торе. Значительная часть теории Виноградова не связана со специальным видом динамической системы, а имеет более общее значение. В этом источник новых приложений идей И. М. Виноградова, касающихся изучения индивидуальных траекторий в динамических системах (в частности, именно так я смотрю на свои работы о распределении дробных долей показательной функции и работы об арифметическом моделировании случайных процессов).

К оценкам тригонометрических сумм с многочленом можно свести (посредством полиномиального приближения) оценки более общих тригонометрических сумм. С их помощью можно изучать рост дзета-функции

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

где $s = \sigma + it$, при увеличении $|t|$ (сама дзета-функция, по сути, есть бесконечная тригонометрическая сумма). Как следствие получается оцен-

ка остатка для количества $\pi(N)$ простых чисел, не превосходящих N. И. М. Виноградов первым получил наиболее сильный результат в этом направлении:

$$\pi(N) = \int_2^N \frac{du}{\ln u} + O\left(Ne^{-\alpha (\ln N)^{0,6}}\right),$$

где $\alpha > 0$ — положительное постоянное.

Есть основания считать, что оценки И. М. Виноградова окажутся полезными и при изучении других специальных функций.

Большой цикл работ И. М. Виноградова относится к аддитивной теории чисел, а именно к проблеме Варинга. Методом исследования здесь являются также тригонометрические суммы с многочленом. И. М. Виноградов получает в решении проблемы Варинга наиболее сильные результаты.

Для наименьшего числа r слагаемых, при котором всякое достаточно большое целое N представляется в виде (n — целое, положительное)

$$N = x_1^n + \ldots + x_r^n$$

с целыми неотрицательными $x_1, \ldots, x_r$, И. М. Виноградов установил верхнюю границу вида:

$$r < 2(1 + \lambda_n)\, n \ln n, \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

Эта граница с возрастанием n растет как величина порядка $n \ln n$ и в этом отношении мало отличается от нижней границы, равной n. Новая граница заменила ранее известную границу порядка $n2^n$.

Для наименьшего числа r, при котором справедлива асимптотическая формула (Харди и Литтльвуда), выражающая количество представлений числа N в виде

$$N = x_1^n + \ldots + x_r^n,$$

Виноградов установил верхнюю границу порядка $n^2 \ln n$ вместо ранее известной границы порядка $n2^n$.

Фундаментальное значение имеют работы И. М. Виноградова в задачах распределения простых чисел или, более точно, в аддитивных задачах с простыми числами. В 1937 году И. М. Виноградов нашел замечательный прием, позволяющий находить нетривиальную верхнюю границу для модуля суммы (p пробегает простые числа)

$$S = \sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i F(p)}$$

приблизительно при тех же ограничениях относительно вида функции $F(x)$, какие делались при рассмотрении аналогичных сумм по числам натурального ряда. В сущности, в оценках этой границы заключены факты о распределении простых чисел в прогрессиях с растущим модулем. Действительно, методом Виноградова получается, например, оценка суммы

$$\sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p},$$

где

$$(a, q) = 1, \quad (\log N)^h \leqslant q \leqslant \frac{N}{(\log N)^{3h}},$$

$h > 3$ — фиксированная постоянная; граница для такой суммы характеризует распределение простых чисел в прогрессиях по модулю q. Оценки сумм по простым числам в случае, когда

$$F(p) = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p,$$

в соединении с известными ранее фактами, касающимися распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с фиксированным модулем, позволили решать аддитивные проблемы с простыми числами того же характера, какие ставились в отношении чисел натурального ряда. Первой Виноградовым была решена простейшая из таких проблем (отвечающая случаю $F(p) = \alpha p$) — знаменитая проблема Гольдбаха для нечетных чисел, т. е. было показано, что всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Эта проблема восходит к 1742 году.

И. М. Виноградовым получены и другие результаты, относящиеся к теории распределения простых чисел.

Для творчества И. М. Виноградова характерно то, что его внимание направлено либо на вековые задачи (проблема Варинга, проблема Гольдбаха), либо на задачи, интересовавшие классиков (Гаусс).

Постановка задач и методы И. М. Виноградова оказали огромное влияние на работу математиков в разных странах мира. Более того, работы Виноградова в сильной степени определили стиль современной аналитической теории чисел. Идеи Виноградова в соединении с другими идеями математической науки имеют большое будущее.

Опыт ученого отражен не только в оригинальных работах И. М. Виноградова, но и в известном его учебнике «Основы теории чисел». Собранные в этом учебнике задачи развивают творческую инициативу у учащихся.

Иван Матвеевич Виноградов ведет большую научно-организационную работу. С 1932 года он (почти бессменно) является директором Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР. Деятельность И. М. Виноградова как научного организатора выходит далеко за рамки его специализации в области теории чисел.

В день семидесятилетия И. М. Виноградова советские математики желают юбиляру долгих лет жизни, научных успехов и плодотворной деятельности на благо науки.

СПИСОК ТРУДОВ И. М. ВИНОГРАДОВА
за период с 1952 по 1960 г.*

1952

117. Избранные труды. М., 1—436.
118. Основы теории чисел. Изд. 6-е. М.—Л., 1—180.
119. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p + k)$ (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 16, стр. 197—210).

* Список работ до 1952 г. опубликован в Известиях Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), стр. 390—394.

1953

120. Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 17, стр. 3—12).
121. Улучшение оценки для сумм значений $\chi(p+k)$ (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 17, стр. 285—290).

1954

122. Распределение по простому модулю простых чисел с заданным значением символов Лежандра (*Известия Ак. наук СССР*, т. 18, стр. 105—112).

1955

123. Улучшение асимптотических формул для числа целых точек в области трех измерений (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 19, стр. 3—10).

1956

124. Особые случаи оценок тригонометрических сумм (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 20, стр. 289—302).
125. Пробема аналитической теории чисел (*Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда*, т. II, стр. 5, М.).
126. Предисловие к сборнику «Карл Фридрих Гаусс», М., стр. 7—10.

1957

127. Тригонометрические суммы, содержащие значение многочлена (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 21, стр. 145—170).

1958

128. О функции $\zeta(1+it)$ (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 118, стр. 631).
129. Особый случай оценки тригонометрических сумм с простыми числами (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 22, стр. 3—14).
130. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 22, стр. 161—164).
131. Об одном кратном интеграле (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 22, стр. 577—584).

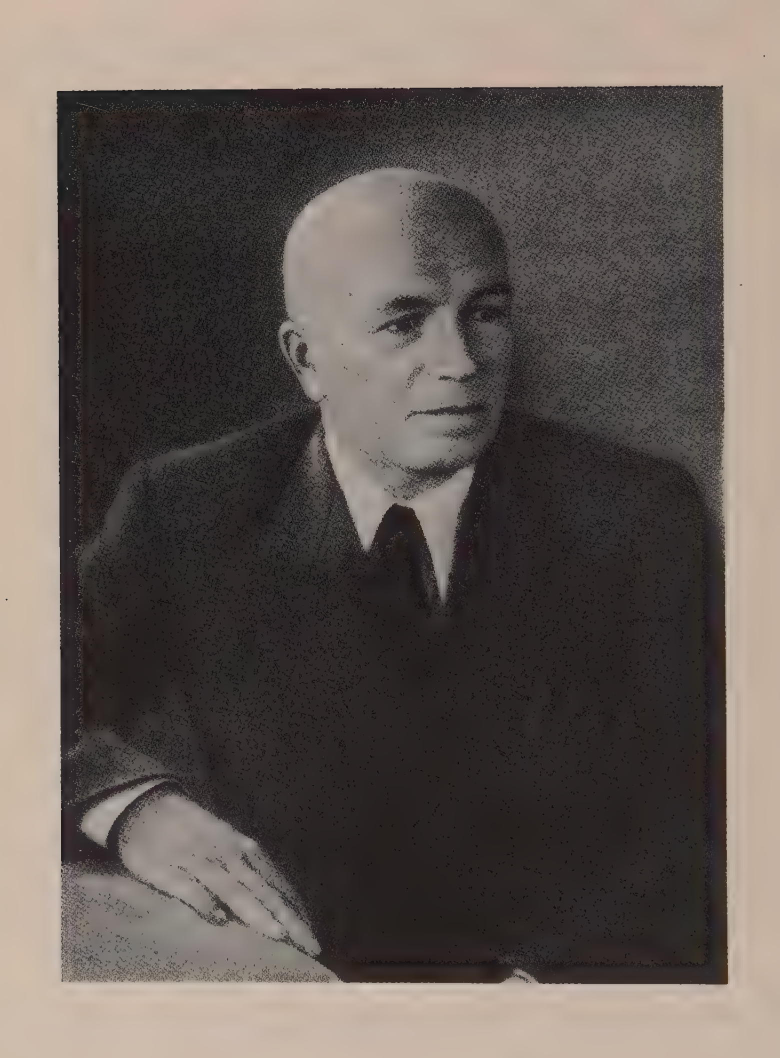
1959

132. Оценка одной тригонометрической суммы по простым числам (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 23, стр. 157—164).
133. К вопросу о верхней границе для $G(n)$ (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 23, стр. 637—642).

1960

134. К вопросу о числе целых точек в заданной области (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 24, стр. 777—786).





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 629—634

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ ПЕТРА СЕРГЕЕВИЧА НОВИКОВА

28 августа 1961 г. Петру Сергеевичу Новикову, одному из крупнейших советских математиков, исполнилось 60 лет.

Свою научную деятельность Петр Сергеевич начал в двадцатые годы в области дескриптивной теории множеств (ДТМ). В конце тридцатых годов в поисках новых средств для решения некоторых проблем ДТМ Петр Сергеевич начинает заниматься проблематикой математической логики, затем его внимание привлекают алгоритмические проблемы алгебры и в самое последнее время — вопросы, относящиеся к более традиционной проблематике алгебры (проблема Бернсайда). Во всех этих областях Петр Сергеевич получил решения труднейших проблем, которые долгое время оставались нерешенными.

Научные интересы Петра Сергеевича начали формироваться в теоретико-множественной школе Н. Н. Лузина, из которой, как известно, выросла целая плеяда выдающихся советских математиков. Уже в эту пору проявилось исключительное дарование Петра Сергеевича. В 1927 г. он полностью исследовал вопрос о природе неявных B-функций, относительно строения которых Лебег в 1904 г. сделал ошибочные утверждения. В основу этого исследования Петр Сергеевич положил новый сильный метод (принцип сравнения индексов), с помощью которого в дальнейшем и он сам и другие авторы решили многие важные проблемы ДТМ. В частности, большое внимание привлекала тогда задача переноса принципов отделимости теории A-множеств на проективные множества. Проблема эта более 10 лет ждала своего решения и казалась почти непреодолимой. В работах П. С. Новикова она получила совершенно неожиданное решение: оказалось, что во втором классе проективных множеств имеет место инверсия законов отделимости.

Н. Н. Лузин поставил задачу об исследовании границ применимости теоретико-множественных методов. Решив ряд важных проблем ДТМ, Петр Сергеевич близко подошел к этим границам. Наряду с континуум-проблемой к этому времени обозначились другие проблемы ДТМ, относительно которых Н. Н. Лузин высказывал гипотезу об их неразрешимости средствами теории множеств. К таким проблемам относились: проблема мощности дополнения к A-множеству, проблема измеримости проективных множеств, проблема отделимости проективных множеств высших классов. Это обстоятельство побудило Петра Сергеевича заняться вопросами обоснования математики, математической логикой. Впоследствии именно на этом пути и были найдены решения названных проблем.

В 1938 г. К. Гёделем было установлено, что континуум-гипотеза не противоречит принципам теории множеств. В работе «О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств», опубли-

кованной в 1951 г., П. С. Новиков доказал, что тем же принципам теории множеств не противоречат следующие гипотезы ДТМ:

1) существует CA-множество без совершенного ядра;

2) существуют неизмеримые проективные множества;

3) законы отделимости для проективных множеств второго класса распространяются и на высшие классы (начиная с некоторого номера).

На пути решения этих вопросов стояли серьезные трудности, для преодоления которых Петр Сергеевич использовал весьма тонкие дескриптивные построения. Методы, разработанные в этой работе, в дальнейшем были использованы в исследованиях других авторов.

В 1943 г. в работе «О непротиворечивости некоторых логических исчислений» Петр Сергеевич, используя предположение о непротиворечивости интуиционистской математики, доказал непротиворечивость арифметики с любыми рекурсивными определениями. Там же он доказал, что если свойство $F(n)$ натуральных чисел проверяемо для всякого n конечным числом операций, то из любого доказательства существования числа N, для которого $F(N)$ истинно, можно извлечь эффективное указание этого числа. В 1949 г. Петр Сергеевич построил алгоритм для распознавания доказуемости формул, не содержащих кванторов существования, в арифметике с рекурсивными определениями без аксиомы полной индукции. В 1947 г. он исследовал вопрос о возможности возникновения парадоксов при построении формализованной теории множеств в результате присоединения к исчислению предикатов тех или иных аксиом, представляющих утверждения экзистенциального характера.

Для научной деятельности Петра Сергеевича в этот период характерно взаимное проникновение идей и методов теории множеств с одной стороны и математической логики и теории алгоритмов — с другой. Решив крупнейшие проблемы ДТМ методами математической логики, Петр Сергеевич одновременно предпринимает исследования в теории алгоритмов, навеянные проблематикой ДТМ. Еще в 1946 г. он обратил внимание своих учеников на «дескриптивную» проблематику теории рекурсивных функций и высказал основные предложения о классификации рекурсивно-проективных множеств, об их отделимости, униформизации и т. п. Хотя эти результаты не были опубликованы в то время и были независимо получены и опубликованы другими авторами (Клини, Мостовский), они оказали большое влияние на учеников Петра Сергеевича и участников его семинаров, побудив их применять эти «дескриптивные» явления теории алгоритмов к исследованию проблем разрешимости и полноты формальных теорий и т. д.

Как известно, к концу сороковых годов уже был получен ряд важных результатов о невозможности алгоритмов для решения некоторых конкретных массовых проблем. Эти массовые проблемы первоначально брались из области самой теории алгоритмов, а потом из области алгебры. После того как А. А. Марков и Э. Пост установили алгоритмическую неразрешимость проблемы тождества для ассоциативных систем (полугрупп), особое внимание привлекала проблема тождества слов теории групп, сформулированная Дэном еще в 1912 г. Требовалось найти алгоритм, который позволял бы по любым двум словам данной группы с

конечным числом образующих и определяющих соотношений проверить, равны они в этой группе или нет. Большие трудности, стоявшие на пути решения этой проблемы, были связаны с тем, что группы с определяющими соотношениями почти не были исследованы. Алгоритм, решающий проблему тождества, и должен был способствовать более детальному исследованию этих групп. В 1952 г. П. С. Новиков доказал неразрешимость проблемы тождества теории групп, построив пример группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений, для которой требуемый алгоритм невозможен. Тот факт, что одну из центральных теоретико-групповых проблем решил специалист по математической логике, не является случайным. Дело в том, что группы с определяющими соотношениями задаются посредством так называемых групповых исчислений, которые родственны логическим формальным системам. Успех был достигнут благодаря детальному исследованию преобразований слов в групповых исчислениях. Ряд лемм, позволяющих устанавливать неравенство слов в групповых исчислениях, нашел применение также в доказательствах других алгоритмических и неалгоритмических результатов Петра Сергеевича и его учеников о группах с определяющими соотношениями.

Результат Петра Сергеевича о неразрешимости проблемы тождества теории групп убедительно показал, что и среди актуальных алгоритмических проблем, касающихся очень распространенных фундаментальных понятий математики, могут быть неразрешимые.

Тривиальным следствием неразрешимости проблемы тождества является неразрешимость известной проблемы сопряженности теории групп. Петр Сергеевич установил также неразрешимость общей проблемы изоморфизма теории групп. Результат о неразрешимости проблемы тождества имеет следующую топологическую интерпретацию. Существует такой полиэдр, что невозможен алгоритм, который позволял бы для любой пары путей, проходящих через фиксированную точку O полиэдра, узнавать, связанно гомотопны они друг другу или нет (т. е. непрерывно деформируемы на полиэдре друг в друга при неподвижной точке O или нет). Из результата о неразрешимости проблемы сопряженности соответственно следует существование полиэдра с неразрешимой проблемой распознавания свободной гомотопии путей на нем.

Продолжая анализировать природу групповых исчислений, Петр Сергеевич заинтересовался одной из труднейших проблем теории групп — проблемой Бернсайда о периодических группах. Эта проблема, сформулированная еще в 1902 г., заключалась в том, чтобы выяснить, может ли быть бесконечной группа, все элементы которой имеют конечный порядок, а сама она порождена конечным числом образующих. Многие видные алгебраисты пытались решить эту проблему. Но до 1959 г. удалось только выяснить, что всякая группа F_p, все элементы которой имеют порядки, являющиеся делителями p, будет конечной при $p = 2, 3, 4, 6$ В 1958 г. П. С. Новиков решил проблему Бернсайда, доказав, что для любого $p \geqslant 72$ можно указать бесконечную группу F_p, которая порождается конечным числом образующих и все элементы которой имеют порядки, не превосходящие p.

Исключительная роль Петра Сергеевича в развитии теории множеств и математической логики в СССР определяется не только его личными научными достижениями, но также его курсами лекций и руководством семинарами. В частности, большое значение имели следующие курсы:

а) ДТМ (в педагогическом институте им. Либкнехта в 30-е годы и в МГУ в послевоенные годы);

б) математическая логика;

в) конструктивная логика.

На материале этих курсов возникли книги П. С. Новикова «Элементы математической логики» (Физматгиз, 1959) и «Конструктивная логика» (готовится к печати), которые имели хождение сначала в рукописном виде и оказали значительное влияние на формирование интересов ряда математиков.

Из семинаров П. С. Новикова отметим следующие:

1. Семинар в Педагогическом институте им. Либкнехта (30-е годы) по дескриптивной теории множеств. К проблематике ДТМ Петр Сергеевич привлек в то время своих учеников В. Я. Арсенина, З. И. Козлову, А. А. Ляпунова, Е. А. Щеголькова и др. На этом же семинаре было начато изучение R-множеств, теория которых была развита впоследствии в докторской диссертации А. А. Ляпунова.

2. С 1936 г. Петр Сергеевич принял активное участие в работе семинара по математической логике (под руководством И. И. Жегалкина, В. И. Гливенко и С. А. Яновской) и вскоре стал одним из его руководителей. Этот семинар объединял и объединяет по существу всех работающих в области математической логики в Москве, а также и в некоторых других городах. Среди активных участников семинара можно назвать Д. А. Бочвара, В. И. Шестакова, А. В. Кузнецова, Б. А. Трахтенброта, Б.Ю. Пильчак, А. С. Есенина-Вольпина, В. А. Успенского, С. В. Яблонского, С. И. Адяна, А. А. Мучника, Б. Я. Фалевича.

3. Семинар в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР в послевоенные годы. Проблематика этого семинара, к которой Петр Сергеевич привлек своих учеников—А. Д. Тайманова, Б. С. Содномова, Ф. А. Кабакова, А. В. Гладкого, Я. С. Сметанича, Б. Я. Фалевича и других, охватывала широкий круг вопросов теории множеств и функций.

4. Семинар по алгоритмическим проблемам алгебры (Педагогический институт им. В. И. Ленина — 1955—1957 гг., Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР — с 1957 г.), работающий при активном участии А. А. Маркова. Тематика этого семинара возникла из исследований А. А. Маркова и П. С. Новикова по проблеме тождества и смежным проблемам алгебры. В этой области стали работать ученики Петра Сергеевича — С. И. Адян, К. А. Михайлова, А. В. Гладкий, А. А. Фридман.

С 1934 г. П. С. Новиков работает в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР; с момента образования в Институте отдела математической логики (1957 г.) заведует этим отделом.

В течение многих лет Петр Сергеевич преподает в московских педагогических институтах — сначала в Институте им. Либкнехта, затем — по настоящее время — в Институте им. В. И. Ленина, где он с 1939 г.

заведует кафедрой математического анализа. Многие из его учеников являются воспитанниками этих институтов. Преподавательская деятельность Петра Сергеевича оказала большое влияние на постановку в педагогических вузах курсов теории функций действительного переменного, математического анализа, математической логики, теории алгоритмов и оснований арифметики.

Петр Сергеевич является членом редакционной коллегии журнала «Известия АН СССР, серия математическая».

В 1953 г. Петр Сергеевич был избран членом-корреспондентом, а в 1960 г. — действительным членом Академии наук СССР.

В 1957 г. за работу о неразрешимости проблемы тождества теории групп Петру Сергеевичу Новикову присуждена Ленинская премия.

СПИСОК ТРУДОВ П. С. НОВИКОВА

1931

1. Sur les fonctions implicités mesurables (B) (*Fund. math.*, t. 17, p. 8—25).

1934

2. К вопросу о существовании функций, не измеримых B на множествах (*Труды 2-го Всесоюзн. матем. съезда*, т. 2, стр. 145, Л.).
3. Об одном свойстве аналитических множеств (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 2, стр. 273—276).
4. К теории релятивного континуума (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 3, стр. 17—20).
5. О счетно-кратной отделимости B-аналитических множеств (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 3, стр. 145—148).
6. О некоторых системах множеств, инвариантных по отношению к A-операции (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 3, стр. 557—560).
7. Обобщение второго принципа отделимости (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 4, стр. 8—11).

1935

8. Sur la séparabilité des ensembles projectifs du seconde classe (*Fund. math.*, t. 25, p. 459—466).
9. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible (*Fund. math.*, t. 25, p. 559—560; совм. с Н. Н. Лузиным).

1937

10. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 1, стр. 231—252).
11. Отделимость C-множеств (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 1, стр. 253—264).
12. Les projections des complémentaires analytiques uniformes (*Матем. сборник*, т. 2(44), стр. 3—16).

1938

13. Об единственности обратной задачи потенциала (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 18, стр. 165—168).

1939

14. О некоторых теоремах существования (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 23, стр. 438—440).
15. О проекциях некоторых B-множеств (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 23, стр. 863—864).
16. О множествах эффективно-несчетных (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 3, стр. 35—40).

1943

17. On the consistency of certain logical calculus (*Матем. сборник*, т. 12(54), стр. 231—261).

1947

18. О логических парадоксах (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 56, стр. 451—453).
19. О мощности множества связных компонент *А*-множеств (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 56, стр. 787—790).
20. О мощности множества компонент (*Успехи матем. наук*, т. 2, вып. 3(19), стр. 181).

1948

21. Дескриптивная теория множеств (*Сборник «Математика в СССР за 30 лет»*, М.—Л., стр. 243—255; совм. с А. А. Ляпуновым).

1949

22. О классах регулярности (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 64, стр. 293—295).
23. Об аксиоме полной индукции (*Доклады Ак. наук*, *СССР*, т. 64, стр. 457—459).
24. Непротиворечивость некоторых положений теории множеств (*Успехи матем. наук*, т. 4, вып. 2(30), стр. 170).

1951

25. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств (*Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, т. XXXVIII, стр. 279—316).

1952

26. Алгоритмическая неразрешимость проблемы тождества теории групп (*Успехи матем. наук*, т. 7, вып. 5(51), стр. 197).
27. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 85, стр. 709—712).

1953

28. Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств (*Успехи матем. наук*, т. 8, вып. 2(54), стр. 93—104; совм. с Л. В. Келдыш).

1954

29. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп (*Известия Ак. наук СССР, сер. матем.*, т. 18, стр. 485—524).

1955

30. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп (*Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР*, т. XLIV, стр. 1—144).

1956

31. О неразрешимости проблемы тождества слов в группе и некоторых других проблем алгебры (*Чехословацкий матем. журнал*, 6(81), стр. 450—454).
32. О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств (*Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда*, т. II, стр. 34; совм. с Л. В. Келдыш).
33. О неразрешимости некоторых проблем алгебры (*Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда*, т. II, стр. 65—66).

1958

34. Проблема тождества для полугрупп с односторонним сокращением (*Zeitschr. für mathem. Logik und Grundlagen der Math.*, t. 4, стр. 66—88; совм. с С. И. Адяном).
35. Об одной полунепрерывной функции (*Ученые записки МГПИ им. В. И. Ленина*, т. 138, вып. 3, стр. 3—10; совм. с С. И. Адяном).
36. Über einige algorithmische Probleme der Gruppentheorie (*Jahresbericht d. Dtsch. Math. Ver.*, t. 61, p. 88—92).

1959

37. О периодических группах (*Доклады Ак. наук СССР*, т. 127, стр. 749—752).
38. Решение проблемы Бернсайда о периодических группах (*Успехи матем. наук*, т. 14, вып. 5(89), стр. 236—237).
39. Элементы математической логики. Физматгиз, М., 1—400 стр.
40. Об одном непрерывном упорядоченном пространстве (*II Всесоюзная топологическая конференция*, Тбилиси, стр. 34).

1961

41. О непротиворечивости некоторых логических исчислений (Infinitistic Methods; *Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics*, Warsaw, 2—9 September (1959), p. 71—74).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 635—644

Ф. И. ШМИДОВ

УСЛОВИЯ (D) И (N) ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОГО И ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В работе приводятся другие доказательства некоторых результатов, касающихся условий (N) Лузина и известного условия (D), вводятся понятия условий (D) и (N) для функции двух переменных и устанавливается ряд новых результатов.

Условие (N) для функции одного действительного переменного было введено Н. Н. Лузиным [см. ([1]), стр. 149], который первым указал на важность этого условия в теории интеграла.

Условие (D) было введено также для функции одного переменного [см. ([2]), стр. 419].

В настоящей работе применяется метод, который позволяет ввести понятие условий (D) и (N) для функции двух действительных переменных и получить относительно этих условий ряд полезных результатов.

§ 1

Пусть E обозначает произвольное ограниченное точечное множество трехмерного пространства Эвклида.

Пусть $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$ — бесконечная последовательность точек множества E и M — предельная точка этой последовательности

Если последовательность лучей $\{M, M_n\}$, выходящая из M, сходится с возрастанием n к определенному лучу ξ, выходящему из M, то луч ξ называется промежуточной полукасательной множества E в точке M.

Множество всех промежуточных полукасательных множества E в точке M называется, по Булигану [см. ([2]), стр. 378], контингенцией множества E в точке M и обозначается символом $\operatorname{contg} M$.

Если E есть плоское множество, то определения промежуточной полукасательной множества E и $\operatorname{contg}_E M$ аналогичны.

ТЕОРЕМА 1. *Если одно из производных чисел Дини конечной функции $f(x)$ конечно в каждой точке множества E, то $f(x)$ необходимо удовлетворяет условию* (N) *на* E [см. ([2]), стр. 392, теорема 4, 6].

Доказательство теоремы можно провести не опираясь на результаты работы ([2]) [см. теоремы 4.1, 4.5 и лемму 6.3 работы ([2])].

Действительно, пусть $B(f; E)$ обозначает множество точек графика функции $f(x)$ на E. Тогда, по условию теоремы, для каждой точки $x_0 \in E$

$$\operatorname{contg}_{B(f;E)} \; (x_0, f(x_0))$$

не является полной плоскостью.

Пусть, для определенности, E' — подмножество всех тех точек множества E, в каждой из которых функция $\overline{f}^{+}(x)$ конечна. Тогда для каждой точки $x' \in E'$ контингенция множества $B(f; E)$ в точке $(x', f(x'))$ не содержит лучей, расположенных в полуплоскости $x \geqslant x'$ и имеющих угловой коэффициент, превышающий $\overline{f}^{+}(x')$. Следовательно, в каждой точке множества $B(f; E')$, исключая, быть может, множество точек нулевой длины, множество $B(f; E)$ либо имеет касательную, либо его контингенция состоит в точности из полуплоскости [см. (2), стр. 384, теорема 3,6].

Итак,

$$E' = E_1 + E_2 + E_3,$$

где для каждой точки $x_1 \in E_1$ множество $B(f; E)$ имеет касательную в точке $(x_1, f(x_1)) \in B(f; E_1)$, для каждой точки $x_2 \in E_2$ контингенция множества $B(f; E)$ в точке $(x_2, f(x_2))$, т. е.

$$\operatorname{contg}_{B(f;E)}(x_2, f(x_2)),$$

состоит в точности из полуплоскости, множество $B(f; E_3)$ имеет нулевую длину и $\operatorname{mes} E_3 = 0$.

Ясно, что для каждой точки $x_1 \in E_1$ контингенция множества $B(f; E)$ в точке $(x_1, f(x_1))$ не содержит лучей с направлением оси y.

Точно так же для каждой точки $x_2 \in E_2$ множество $B(f; E)$ имеет крайнюю касательную в точке $(x_2, f(x_2)) \in B(f; E_2)$ и пустой стороной этой крайней касательной является полуплоскость

$$y - y_2 \geqslant \overline{f}^{+}(x_2)(x - x_2).$$

Следовательно, в каждой точке $(x_2, f(x_2)) \in B(f; E_2)$

$$\operatorname{contg}_{B(f;E)}(x_2, f(x_2))$$

не содержит луча с направлением положительной полуоси y.

Отсюда вытекает [см. (2), стр. 381, лемма 3.1], что множество $E_1 + E_2$ разлагается в сумму не более чем счетного числа множеств

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n, \ldots,$$

на каждом из которых $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Очевидно, наконец, что $\operatorname{mes}\{f[E_3]\}=0$ и $\operatorname{mes} E_3=0$. Из сказанного заключаем, что на каждом из множеств E_1, E_2, E_3 функция $f(x)$ удовлетворяет условию (N), а следовательно, $f(x)$ удовлетворяет этому условию на всем множестве E'. То же самое мы получаем и в трех других сучаях конечности производных чисел Дини.

Итак, функция $f(x)$ удовлетворяет условию (N) на всем множестве E, что доказывает теорему.

Введем теперь понятие условия (N) для функции двух переменных.

Пусть $F(x, y)$ — конечная функция, заданная на множестве E точек (x, y), и пусть $H \subset E$ — подмножество множества E такое, что его плоская мера Лебега равна нулю: $\operatorname{mes} H = 0$.

Спроектируем ортогонально множество $B(F; H)$, т. е. график функции $F(x, y)$ на H, на какую-либо плоскость Q, проходящую через ось z пространства (x, y, z).

Ясно, что для одного и того же множества $H \subset E$ с нулевой плоской мерой mes $\{F[H]\}$, вообще говоря, может иметь различные значения, если проектировать множество $B(F;H)$ ортогонально на различные плоскости, проходящие через ось z. В частности, mes $\{F[H]\}$ может оказаться равной нулю.

Определение 1. Функция $F(x,y)$ удовлетворяет условию (N) на множестве E, если для каждого множества $H \subset E$ нулевой плоской меры ортогональная проекция $B(F;H)$ на любую плоскость Q, проходящую через ось z, также имеет плоскую меру, равную нулю.

Обозначим через h луч в плоскости xOy, выходящий из точки $(x_0, y_0) = P_0 \in E$, а через $Q(h, h_z)$ — плоскость, проходящую через h и h_z, где h_z — луч, выходящий из точки

$$M_0 = ((x_0, y_0); F(x_0, x_0)) \in B(F; E)$$

и имеющий направление положительной полуоси z.

Пусть $\psi(\xi, h_z, M_0)$ обозначает угол в плоскости $Q(h, h_z)$ с вершиной в точке M_0, ограниченный лучами ξ и h_z, выходящими из M_0, а $\psi(\xi, h_z^-, M_0)$ обозначает угол в плоскости $Q(h, h_z)$ с вершиной в точке M_0, ограниченный лучами ξ и h_z^-, выходящими из M_0, где h_z^- имеет направление отрицательной полуоси z.

Наконец, через $\varphi(h, P_0)$ обозначим угол в плоскости xOy с вершиной в точке $P_0 \in E$ и биссектрисой h, а через E_φ — часть множества E тех точек из E, которые оказались внутри угла $\varphi(h, P_0)$.

Определение 2. Верхним производным числом функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) = P_0$ по углу $\varphi(h, P_0)$ называется предел

$$\lim_{\substack{(x,y)\to P_0 \\ (x,y)\in E_\varphi}} \sup\nolimits_\varphi \frac{F(x, y) - F(x_0, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} = \overline{F}_\varphi(x_0, y_0).$$

Нижним производным числом функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) = P_0$ по углу $\varphi(h, P_0)$ называется предел

$$\lim_{\substack{(x,y)\to P_0 \\ (x,y)\in E_\varphi}} \inf\nolimits_\varphi \frac{F(x, y) - F(x_0, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} = \underline{F}_\varphi(x_0, y_0).$$

Естественно считать верхнее (нижнее) производное число функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) = P_0$ конечным, если существуют такие положительные конечные числа λ и γ, что при всех $\varphi \leqslant \gamma$ на множестве E_φ имеет место неравенство

$$|\overline{F}_\varphi(x_0, y_0)| \leqslant \lambda \quad (|\underline{F}_\varphi(x_0, y_0)| \leqslant \lambda).$$

Определение 3. Луч ξ в плоскости $Q(h, h_z)$, выходящий из точки $M_0 \in B(F; E)$, называется верхней (нижней) крайней промежуточной полукасательной множества $B(F; E)$ в точке M_0, если существует положительный угол

$$\psi(\xi, h_z, M_0) < \pi \quad (\psi(\xi, h_z^-, M_0) < \pi),$$

свободный от промежуточных полукасательных множества $B(F;E)$ в точке M_0. При этом сам луч ξ является промежуточной полукасательной множества $B(F;E)$ в точке M_0.

Очевидно, если в точке $(x_0, y_0) = P_0 \in E$ существует верхнее конечное производное число функции $F(x, y)$, то в точке

$$M_0 = ((x_0, y_0); F(x_0, y_0)) \in B(F;E)$$

существует верхняя крайняя промежуточная полукасательная множества $B(F;E)$; если в точке $(x_0, y_0) = P_0 \in E$ существует нижнее конечное производное число функции $F(x, y)$, то в точке

$$M_0 = ((x_0, y_0); F(x_0, y_0)) \in B(F;E)$$

существует нижняя крайняя промежуточная полукасательная множества $B(F;E)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если одно из производных чисел конечной функции $F(x, y)$ конечно в каждой точке множества E, то $F(x, y)$ необходимо удовлетворяет условию* (N) *на E.*

Доказательство. Пусть $E_{\overline{F}_\varphi}$ — подмножество всех тех точек множества E, в каждом из которых существует конечное верхнее производное число $\overline{F}_\varphi$ функции $F(x, y)$. Тогда в каждой точке $M_0 \in B(F; E_{\overline{F}_\varphi})$ существует верхняя крайняя промежуточная полукасательная множества $B(F;E)$ и, следовательно,

$$\operatorname{contg}_{B(F;E)} M_0$$

не состоит из полного пространства. Поэтому [см. (2), стр. 444, теорема 13.7] в каждой точке множества $B(F; E_{\overline{F}_\varphi})$, исключая, быть может. множество точек нулевой площади, либо множество $B(F;E)$ имеет касательную плоскость, либо $\operatorname{contg}_{B(F;E)} M_0$ состоит в точности из полупространства.

Итак,

$$E_{\overline{F}_\varphi} = E_1 + E_2 + E_3,$$

где для каждой точки $(x_1, y_1) \in E_1$ множество $B(F;E)$ имеет касательную плоскость в точке

$$((x_1, y_1); F(x_1, y_1)) \in B(F; E_1),$$

для каждой точки $(x_2, y_2) \in E_2$

$$\operatorname{contg}_{B(F;E)} ((x_2, y_2); F(x_2, y_2))$$

состоит в точности из полупространства и, наконец, множество $B(F; E_3)$ имеет нулевую площадь, причем плоская мера множества E_3 равна нулю.

Ясно, что в каждой точке $((x_2, y_2); F(x_2, y_2)) \in B(F; F_2)$ крайняя касательная плоскость содержит верхнюю крайнюю промежуточную полукасательную множества $B(F; E)$ и не содержит оси z. Следователь-

но, в каждой точке $((x_1, y_1); F(x_1, y_1)) \in B(F; E_1)$

$$\mathrm{contg}_{B(F;E)}((x_1, y_1); F(x_1, y_1))$$

не содержит луча с направлением положительной полуоси z.

Точно так же в каждой точке $((x_2, y_2); F(x_2, y_2)) \in B(F; E_2)$

$$\mathrm{contg}_{B(F;E)}((x_2, y_2); F(x_2, y_2))$$

не содержит луча с направлением положительной полуоси z.

Таким образом, множество $E_1 + E_2$ разлагается в сумму не более чем счетного числа множеств

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots,$$

на каждом из которых $F(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица [см. ([2]), стр. 440, леммма 13.1].

Из сказанного следует, что $F(x, y)$ удовлетворяет условию (N) на множестве $E_1 + E_2$.

Если учесть, что $\mathrm{mes}\, E_3 = 0$ и $\mathrm{mes}\, \{F[E_3]\} = 0$ при проектировании множества $B(F; E_3)$ ортогонально на любую плоскость Q, проходящую через ось z, то получим, что функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию (N) на всем множестве

$$E_{\overline{F}_\varphi} = E_1 + E_2 + E_3.$$

А так как

$$E = E_{\overline{F}_\varphi} + E_{\underline{F}_\varphi},$$

то, следовательно, функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию (N) на всем множестве E. Теорема доказана.

§ 2

В настоящем параграфе мы введем понятие условия (D) для функции двух переменных и установим некоторые свойства функции двух переменных, удовлетворяющей этому условию.

Пусть $z = F(x, y)$ — конечная функция двух действительных переменных, определенная на ограниченном плоском множестве E.

Через $S(r, P_0)$ обозначим круг в плоскости xOy с центром в точке $P_0 = (x_0, y_0)$.

Пусть λ — любое конечное положительное число, и пусть $E_{\varphi\lambda} \subset E_{\varphi(h, P_0)}$ — множество всех тех точек из множества $E_{\varphi(h, P_0)}$, для каждой из которых выполняется неравенство

$$\frac{|F(x, y) - F(x_0, y_0)|}{|x - x_0| + |y - y_0|} < \lambda. \qquad (1)$$

О п р е д е л е н и е 4. Функция $z = F(x, y)$ удовлетворяет в точке $(x_0, y_0) = P_0$ условию (D), если существуют такое конечное число $\lambda > 0$, такой угол $\varphi > 0$ и такой луч h, что множество $E_{\varphi\lambda}$ имеет в точке P_0 положительную верхнюю плотность.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $z = F(x, y)$ — конечная функция, определенная на ограниченном плоском множестве E, и пусть в каждой точке множества*

E функция $z = F(x, y)$ удовлетворяет условию (D). *Тогда функция $F(x, y)$ удовлетворяет на E условию* (N).

Доказательство. Если в точке $P_0 \in E$ функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию (D), то имеет место неравенство

$$\lim_{r\to 0} \sup \frac{\operatorname{mes}\{E_{\varphi\lambda}\cdot S(r, P_0)\}}{\operatorname{mes}\{\varphi(h, P_0)\cdot S(r, P_0)\}} > 0. \tag{2}$$

Обозначим через $E_{\varphi\lambda\alpha}$ подмножество множества E всех точек $P \in E$, в каждой из которых

$$\lim_{r\to 0} \sup \frac{\operatorname{mes}\{E_{\varphi\lambda}\cdot S(r, P)\}}{\operatorname{mes}\{\varphi(h, P)\cdot S(r, P)\}} > \alpha \tag{3}$$

при фиксированных рациональных положительных числах α, φ и λ.

Пусть $\omega_{E_{\varphi\lambda\alpha}}$ обозначает колебание функции $F(x, y)$ на множестве $E_{\varphi\lambda\alpha}$, и пусть задано конечное число $\beta > 2\omega_{E_{\varphi\lambda\alpha}}$.

Пусть, далее, τ обозначает квадрат в плоскости xOy, покрывающий все множество $E_{\varphi\lambda\alpha}$, T — квадрат в плоскости xOy, покрывающий все множество E, $\tau \subset T$.

Построим параллелепипед H с высотой β и поперечным сечением τ так, чтобы он содержал все точки графика $B(F; E_{\varphi\lambda\alpha})$.

Обозначим через a длину диагонали квадрата τ, через A — длину диагонали квадрата T и через Δ — диагональное сечение параллелепипеда H. Тогда $\operatorname{mes}\Delta = a\cdot\beta$ и

$$\frac{a}{A} \leqslant 1. \tag{4}$$

Возьмем произвольный круг $S(\rho, P) \subset \tau$ и определим функцию $\mu(z)$, положив для каждого z

$$\mu(z) = \operatorname{mes} \underset{(x,y)}{E}\,[F(x, y) \geqslant z;\ (x, y) \in S(\rho, P)]. \tag{5}$$

Ясно, что $\mu(z)$ есть функция, ограниченная и не возрастающая на всей оси z, ибо

$$0 \leqslant \mu(z) \leqslant \operatorname{mes} S(\rho, P). \tag{6}$$

Пусть $(x_0, y_0) = P_0 \in E_{\varphi\lambda\alpha}\cdot S(\rho, P)$ — точка, которая лежит строго внутри $S(\rho, P)$ и такая, что функция $\mu(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in F[E_{\varphi\lambda\alpha} S(\rho, P)]$.

Положим

$$G(\gamma, \varphi, \lambda) = \underset{(x,y)\in\varphi}{E}\,[F(x, y) \geqslant z_0 + \lambda R;\ 0 \leqslant R \leqslant \gamma],$$

$$(D(\gamma, \varphi, \lambda) = \underset{(x,y)\in\varphi}{E}\,[F(x, y) \geqslant z_0 + \lambda\gamma;\ 0 \leqslant R \leqslant \gamma],$$

где $0 \leqslant \gamma < 1$.

Тогда имеем:

$$D(\gamma, \varphi, \lambda) \subset G(\gamma, \varphi, \lambda) \subset G(\gamma, \varphi, -\lambda) \subset D(\gamma, \varphi, -\lambda).$$

В силу (5), получаем:

$$\mu(z_0 - \lambda\gamma) - \mu(z_0 + \lambda\gamma) \geqslant \operatorname{mes} D(\gamma, \varphi, -\lambda) - \\ - \operatorname{mes} D(\gamma, \varphi, \lambda) \geqslant \operatorname{mes} G(\gamma, \varphi, -\lambda) - \operatorname{mes} G(\gamma, \varphi, \lambda). \qquad (7)$$

Так как для точки (x_0, y_0) имеет место неравенство (3), то существует достаточно малое положительное число γ такое, что

$$\operatorname{mes} G(\gamma, \varphi, -\lambda) - \operatorname{mes} G(\gamma, \varphi, \lambda) \geqslant \gamma\alpha. \qquad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) находим:

$$\mu(z_0 - \lambda\gamma) - \mu(z_0 + \lambda\gamma) \geqslant \gamma\alpha,$$

или

$$\mu(z_0 + \lambda\gamma) - \mu(z_0 - \lambda\gamma) \leqslant -\gamma\alpha. \qquad (9)$$

Отсюда выводим:

$$\mu'(z_0) = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\mu(z_0 + \lambda\gamma) - \mu(z_0 - \lambda\gamma)}{2\lambda\gamma} \leqslant -\frac{\alpha}{2\lambda}. \qquad (10)$$

Спроектируем ортогонально $B(F; E_{\varphi\lambda\alpha}S(\rho, P))$ на Δ и его проекцию обозначим через

$$B(F; E_{\varphi\lambda\alpha} S(\rho, P))_\Delta.$$

Тогда, в силу неравенств (4) и (10), имеем:

$$|\mu(\beta) - \mu(-\beta)| \geqslant \frac{\alpha}{2\lambda\cdot A} \operatorname{mes} B(F; E_{\varphi\lambda\alpha}\cdot S(\rho, P))_\Delta, \qquad (11)$$

откуда, в силу неравенства (6), получаем:

$$\operatorname{mes} S(\rho, P) \geqslant \frac{\alpha}{2\lambda\cdot A} \operatorname{mes} B(F; E_{\varphi\lambda\alpha}\cdot S(\rho, P))_\Delta. \qquad (12)$$

Зададим произвольное положительное число ε и обозначим через $S_i(r, P)$ последовательность кругов таких, что

$$E_{\varphi\lambda\alpha} \subset \sum_i S_i(r, P), \qquad \operatorname{mes} E_{\varphi\lambda\alpha} + \varepsilon \geqslant \sum_i \operatorname{mes} S_i(r, P). \qquad (13)$$

Из (12) и (13) имеем:

$$\operatorname{mes} E_{\varphi\lambda\alpha} + \varepsilon \geqslant \frac{\alpha}{2\lambda\cdot A} \sum_i \operatorname{mes} B(F; E_{\varphi\lambda\alpha}\cdot S_i(r, P))_{\Delta_i} \geqslant \\ \geqslant \frac{\alpha}{2\lambda\cdot A} \operatorname{mes} B(F; E_{\varphi\lambda\alpha})_Q,$$

где Q — любая плоскость, проходящая через ось z.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем:

$$\operatorname{mes} B(F; E_{\varphi\lambda\alpha})_Q \leqslant \frac{2\lambda\cdot A}{\alpha} \operatorname{mes} E_{\varphi\lambda\alpha}. \qquad (14)$$

Пусть $W \subset E$ — произвольное подмножество множества E с $\operatorname{mes} W = 0$. Тогда при фиксированных $\alpha > 0, \varphi > 0, \lambda > 0$ выполняется неравен-

ство (14):

$$\text{mes}\, B\,(F;\, W_{\varphi\lambda\alpha})_Q \leqslant \frac{2\lambda \cdot A}{\alpha}\, \text{mes}\, W_{\varphi\lambda\alpha} = 0. \tag{15}$$

Суммируя по всем рациональным $\alpha > 0$, $\varphi > 0$ и $\lambda > 0$, находим:

$$W = \Sigma\, W_{\varphi\lambda\alpha},$$

что, в силу (15), дает:

$$\text{mes}\, B\,(F;\, W)_Q = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы учитывалась идея доказательства аналогичной теоремы для функции одного действительного переменного.

Определение 5. Верхним аппроксимативным производным числом функции $F\,(x,\, y)$ в точке $(x_0,\, y_0) = P_0$ по углу $\varphi\,(h,\, P_0)$ называется предел

$$\lim_{\substack{(x,y)\to P_0 \\ (x,y)\in E_\varphi}} \sup ap_\varphi \frac{F\,(x,\, y) - F\,(x_0,\, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} = \overline{F}_{ap\varphi}(x_0,\, y_0). \tag{16}$$

Нижним аппроксимативным производным числом функции $F\,(x,\, y)$ в точке $(x_0,\, y_0) = P_0$ по углу $\varphi\,(h,\, P_0)$ называется предел

$$\lim_{\substack{(x,y)\to P_0 \\ (x,y)\in E_\varphi}} \inf ap_\varphi \frac{F\,(x,y) - F\,(x_0,\, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} = \underline{F}_{ap\varphi}(x_0,\, y_0). \tag{17}$$

Естественно считать верхнее (нижнее) аппроксимативное производное число функции $F\,(x,\, y)$ в точке $(x_0,\, y_0) = P_0$ конечным, если существуют такие положительные конечные числа λ и γ, что при всех $\varphi \leqslant \gamma$ на множестве E_φ^* имеет место неравенство

$$|\overline{F}_{ap\varphi}\,(x_0,\, y_0)| \leqslant \lambda \quad (|\underline{F}_{ap\varphi}\,(x_0,\, y_0)| \leqslant \lambda). \tag{18}$$

Обозначим через $K\,(\chi,\, \xi,\, M_0)$ круговой полуконус с углом χ при вершине M_0 и осью ξ.

Определение 6. Луч ξ, выходящий из точки $M_0 \in B\,(F;\, E)$, называется обобщенной промежуточной полукасательной множества $B\,(F;\, E)$ в точке M_0, если при любом угле $\chi > 0$ множество тех точек $(x,\, y) \in E$, для которых $B\,(F;\, E)$ лежит внутри полуконуса $K\,(\chi,\, \xi,\, M_0)$, имеет в точке $(x_0,\, y_0) \in E$ положительную верхнюю плотность.

Определение 7. Луч ξ в плоскости $Q\,(h,\, h_z)$, выходящий из точки $M_0 \in B\,(F;\, E)$, называется верхней (нижней) крайней обобщенной промежуточной полукасательной множества $B\,(F;\, E)$ в точке M_0, если существует положительный угол

$$\psi\,(\xi,\, h_z,\, M_0) < \pi \quad (\psi\,(\xi,\, h_z^-,\, M_0) < \pi), \tag{19}$$

свободный от обобщенных промежуточных полукасательных множества $B\,(F;E)$ в точке M_0.

При этом сам луч ξ является обобщенной промежуточной полукасательной множества $B\,(F;E)$ в точке M_0.

Очевидно, если в точке $(x_0, y_0) = P_0$ существует верхнее аппроксимативное конечное производное число функции $F\,(x, y)$, то в точке M_0 существует верхняя обобщенная крайняя промежуточная полукасательная множества $B\,(F;E)$; если в точке $(x_0, y_0) = P_0$ существует нижнее аппроксимативное конечное производное число функции $F\,(x, y)$, то в точке M_0 существует нижняя обобщенная крайняя промежуточная полукасательная множества $B\,(F;E)$.

ТЕОРЕМА 4. *Если одно из аппроксимативных производных чисел конечной функции $F\,(x, y)$ конечно в каждой точке множества E, то $F\,(x, y)$ необходимо удовлетворяет условию* (N) *на* E.

Доказательство. Нам, очевидно, достаточно показать, что в каждой точке $(x_0, y_0) \in E$, в которой существует аппроксимативное конечное производное число функции $F\,(x, y)$, функция $F\,(x, y)$ удовлетворяет условию (D). Пусть, для определенности, в точке P_0 существует конечное аппроксимативное верхнее производное число функции $F\,(x, y)$. Для такой точки, как было сказано выше, существует верхняя обобщенная крайняя промежуточная полукасательная множества $B\,(F;E)$ в точке M_0.

Пусть Ω — конечное число. Обозначим через $E_{\varphi\Omega} \subset E_{\varphi(h, P_0)}$ множество тех точек из $E_{\varphi(h, P_0)}$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{F\,(x, y) - F\,(x_0, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} < \Omega. \tag{20}$$

В силу того, что $|\overline{F}_{ap\varphi}(x_0, y_0)|$ конечно, всегда найдутся такие конечные числа Ω и $m < \Omega$ и такой угол $\varphi > 0$, что

$$C_{E_\varphi} E_{\varphi\Omega} = E_\varphi - E_{\varphi\Omega},$$

т. е. дополнение к множеству $E_{\varphi\Omega}$ в множестве E_φ имеет в точке P_0 верхнюю плотность, равную нулю, а

$$C_{E_\varphi} E_{\varphi m} = E_\varphi - E_{\varphi m}$$

имеет в точке P_0 положительную верхнюю плотность.

Следовательно, множество точек, для которых

$$m < \frac{F\,(x, y) - F\,(x_0, y_0)}{|x - x_0| + |y - y_0|} < \Omega, \tag{21}$$

имеет в точке P_0 положительную верхнюю плотность.

Обозначим через M большее из чисел $|\Omega|$ и $|m|$. Тогда множество точек, в которых

$$\frac{|F\,(x, y) - F\,(x_0, y_0)|}{|x - x_0| + |y - y_0|} < M, \tag{22}$$

имеет в точке P_0 положительную верхнюю плотность. Это означает, что в точке P_0 функция $F(x, y)$ удовлетворяет условию (D).

Случай, когда $\underline{F}_{ap\varphi}(x_0, y_0)$ конечно, доказывается аналогично. Этим теорема полностью доказана.

Поступило
5. I. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.
[2] Сакс С., Теория интеграла, Москва, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 645—670

А. А. КОНЮШКОВ

О КАТЕГОРИИ И БОРЕЛЕВСКОМ ТИПЕ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПОВЕДЕНИЕМ СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ

В пространствах периодических функций C, L_∞, L и L_Φ^* изучаются категория Бэра и борелевский тип некоторых множеств функций, определяемых поведением сумм Фурье и Фейера сопряженных рядов (ограниченность норм или сходимость по норме).

Введение

В работе рассматриваются некоторые множества в пространствах C, L_∞, L и L_Φ^* периодических функций периода 2π. Через $C=C_{2\pi}$ обозначается пространство непрерывных функций f периода 2π, в котором

$$\|f\|_C = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

Пространство $L_\infty = L_\infty(0, 2\pi)$ состоит из измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in[0,2\pi]} \operatorname{vrai} |f(x)| < \infty.$$

Через $L = L(0,2\pi)$ обозначается, как обычно, пространство измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_L = \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Пусть задана функция $\Phi(u)$ $(-\infty < u < +\infty)$, $\Phi(u) \neq 0$ при $u \neq 0$, непрерывная, выпуклая, четная и такая, что

$$\lim_{u\to 0} u^{-1}\Phi(u) = 0, \quad \lim_{u\to\infty} u^{-1}\Phi(u) = +\infty.$$

Положим

$$\Psi(v) = \begin{cases} \max\limits_{0\le u<\infty} [vu - \Phi(u)] & (v \geqslant 0), \\ \Psi(-v) & (v < 0). \end{cases}$$

Обозначим через L_Φ^* пространство типа B, состоящее из всех измеримых функций f периода 2π, для каждой из которых

$$\int_0^{2\pi} \Phi[kf(x)]\, dx < \infty$$

при некотором постоянном числе $k > 0$, $k = k(f)$; при этом

$$\|f\|_{L_\Phi^*} = \sup_g \left| \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx \right|,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым функциям g, у которых

$$\int_0^{2\pi} \Psi\,[g(x)]\,dx \leqslant 1.$$

Пространства L^*_Φ рассматривались впервые в работах Орлича.

Через E_Φ обозначается замыкание в пространстве L^*_Φ множества ограниченных функций. В пространстве E_Φ (с метрикой пространства L^*_Φ) всюду плотно множество всех тригонометрических полиномов. Если $f \in E_\Phi$, то при каждом постоянном числе λ имеем:

$$\int_0^{2\pi} \Phi[\lambda f(x)]\,dx < \infty.$$

Говорят, что функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2 (при больших значениях u), если

$$\Phi(2u) = O\,[\Phi(u)] \quad (u \to \infty).$$

Если $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2, то $E_\Phi = L^*_\Phi$; в противном случае E_Φ есть правильная часть L^*_Φ (об указанных выше свойствах пространства E_Φ см. ([1]), § 10).

Наконец, через L_Φ будет обозначаться множество всех измеримых функций f периода 2π, для которых

$$\int_0^{2\pi} \Phi\,[f(x)]\,dx < \infty.$$

Пусть P обозначает одно из указанных выше пространств и $f \in P$. Рассмотрим ряд Фурье функции f

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1}$$

и сопряженный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \tag{2}$$

Через $s_n(f) = s_n(x; f)$ и $\sigma_n(f) = \sigma_n(x; f)$ обозначаются соответственно n-я частная сумма Фурье и n-я сумма Фейера ряда (1) $\left(\text{т. е. } \sigma_n(f) = \frac{s_0(f) + \ldots + s_n(f)}{n+1}\right)$. Соответствующие суммы Фурье и Фейера для сопряженного ряда (2) обозначим через $\bar{s}_n(f)$ и $\bar{\sigma}_n(f)$. В работе рассматриваются категория Бэра и борелевский тип множеств $P^{\cdot}$, $P^{\wedge}$, P^{-} и P_{-}, определяемых следующим образом:

$P^{\cdot}$ — множество всех функций $f \in P$, для которых последовательности $\{\|\bar{\sigma}_n(f)\|_P\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены;

$P^{\wedge}$ — множество всех функций $f \in P$, для которых последовательности $\{\|\bar{s}_n(f)\|_P\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены;

P^{-} — множество всех функций $f \in P$, для которых последовательности $\{\bar{\sigma}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся в метрике пространства P;

P_{-} — множество всех функций $f \in P$, для которых последовательности $\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся в метрике пространства P.

§ 1. Множества в пространствах C и L_∞

Из характеристик функций в терминах сумм Фейера [см. ([2]), § 4.31] следует, что $C^{\cdot}$ есть множество всех функций $f \in C$, для которых тригонометрически сопряженные функции $\bar{f} \in L_\infty$, а C^{-} есть множество всех функций $f \in C$, для которых $\bar{f} \in C$. Как мы увидим ниже, $C^{-} \subset C^{\cdot}$ (включение строгое). Докажем теорему о множествах в пространстве C.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Множества $C^{\cdot}$ и $C^{\wedge}$ будут множествами 1-й категории типа F_σ (и не будут типа G_δ) в пространстве C.*

2. *Множества C^{-} и C_{-} будут множествами 1-й категории типа $F_{\sigma\delta}$ (и не будут типа $G_{\delta\sigma}$) в пространстве C.*

Доказательство. 1. Имеем: $C^{\cdot} \subset C$ (включение строгое). Например, возьмем функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} \sin nx.$$

Она принадлежит $C \setminus C^{\cdot}$, ибо сопряженный ряд

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)} \cos nx$$

не является рядом Фурье функции из L_∞.

Рассмотрим на пространстве C последовательность операторов $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (со значениями в пространстве C). Эти операторы аддитивны и непрерывны. Множество $C^{\cdot}$ совпадает с множеством функций $f \in C$, для которых последовательность $\{\| U_n(f) \|_C\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена.

Известно, что если $\{V_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность линейных операторов, определенных на банаховом пространстве E со значениями в банаховом пространстве E_1, и последовательность $\{\|V_n(z)\|_{E_1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не ограничена в некоторой точке z_0, то множество точек z пространства E, где ограничена последовательность $\{\|V_n(z)\|_{E_1}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$, будет множеством 1-й категории типа F_σ в пространстве E [см. ([2]), § 4. 55].

Применим эту теорему к нашему случаю. Так как $C^{\cdot} \subset C$, то $C^{\cdot}$ будет множеством 1-й категории типа F_σ в пространстве C.

Покажем, что множество $C^{\cdot}$ не будет типа G_δ в C. Множество $C^{\cdot}$ всюду плотно в C, ибо, например, тригонометрические полиномы принадлежат $C^{\cdot}$ и лежат всюду плотно в C. Если бы множество $C^{\cdot}$ было типа G_δ, то $C^{\cdot}$ было бы множеством 2-й категории в пространстве C, что противоречит тому, что $C^{\cdot}$ есть множество 1-й категории в C.

Мы имеем: $C^{\wedge} \subset C^{\cdot}$ (здесь включение строгое). Так как, по доказанному, $C^{\cdot}$ есть множество 1-й категории в пространстве C, то и $C^{\wedge}$ будет 1-й категории в C. Множество $C^{\wedge}$ не будет типа C_δ, ибо $C^{\wedge}$ всюду плотно в C и является множеством 1-й категории.

Наконец, $C^{\wedge}$ имеет тип F_σ как множество точек ограниченности последовательности линейных операторов $F_n(f) = \bar{s}_n(f)$.

2. а) Докажем утверждение теоремы относительно множества C_-. Так как $C_- \subseteq C^{\wedge}$ (ниже мы увидим, что включение строгое), то из утверждения 1 теоремы следует, что C_- есть множество 1-й категории в пространстве C.

Рассмотрим на пространстве C последовательность операторов $F_n(f) = \bar{s}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (со значениями в пространстве C). При каждом n $F_n(f)$ есть аддитивный и непрерывный оператор в пространстве C. Множеством сходимости последовательности $\{F_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будет множество C_-. Отсюда следует, что C_- имеет тип $F_{\sigma\delta}$ в пространстве C. Действительно,

$$C_- = \bigcap_{\eta=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_-(\eta, m),$$

где $C_-(\eta, m)$ — множество всех функций $f \in C$, для которых

$$\| \bar{s}_r(f) - \bar{s}_q(f) \|_C \leqslant \frac{1}{\eta}$$

при всех $r \geqslant m$, $q \geqslant m$. Множества $C_-(\eta, m)$ замкнуты в пространстве C.

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение из работы Банаха и Мазура ([3]).

Пусть R — множество сходимости последовательности $\{V_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ линейных операторов, определенных на банаховом пространстве E со значениями в банаховом пространстве E_1. Тогда если R есть множество типа $G_{\delta\sigma}$, то при каждом постоянном числе $N > 0$ будет замкнутым в пространстве E множество всех $z \in R$, для которых $\|V_n(z)\|_{E_1} \leqslant N$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что C_- не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве C. Предположим обратное, т. е. что C_- будет типа $G_{\delta\sigma}$. Тогда, как следует из утверждения Банаха и Мазура, при каждом числе $N > 0$ будет замкнутым множество $C_-(N)$ всех функций $f \in C_-$, для которых $\| \bar{s}_n(f) \|_C \leqslant N$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Чтобы получить противоречие, построим функцию $f \in C$, для которой $\| \bar{s}_n(f) \|_C \leqslant N_1$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1$ — постоянная), но последовательность $\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не сходится равномерно.

Следуя § 8.11 книги ([2]), в качестве $f(x)$ возьмем функцию

$$f(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \bar{Q}(x, 2^{k^2}, 2^{k^2}) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Тогда

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} Q(x, 2^{k^2}, 2^{k^2}),$$

где

$$Q(x, n, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \frac{\cos(2n+1)x}{1} - \ldots - \frac{\cos 3nx}{n}.$$

Так как функции $\bar{Q}(x, n, n)$ равномерно (относительно x и n) ограничены, то $f \in C$. Ряд Фурье функции $\bar{f}(x)$ будет расходящимся при $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ и $\| \bar{s}_n(f) \|_C \leqslant N_1$ $(n = 1, 2, \ldots; N_1$ — постоянная) [см. ([2]), § 8.13].

Рассмотрим суммы Фейера $\sigma_m = \sigma_m(f)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ функции f. Имеем: $\sigma_m(f) \in C_-$ и $\sigma_m(f) \to f$ в смысле метрики пространства C.

Покажем, что при всех натуральных n и m

$$\|\bar{s}_n(\sigma_m)\|_C < N_1.$$

При $n \geqslant m$

$$\bar{s}_n(\sigma_m) = \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{k}{m+1}\right)(-b_k)\cos kx = \sigma_m(\bar{f}) = \frac{\bar{s}_1(f) + \cdots + \bar{s}_m(f)}{m+1}.$$

Отсюда получаем, что при $n \geqslant m$

$$\|\bar{s}_n(\sigma_m)\|_C < N_1.$$

Пусть теперь $1 \leqslant n < m$. Тогда

$$\bar{s}_n(\sigma_m) = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{m+1}\right)(-b_k)\cos kx =$$

$$= \frac{\bar{s}_1(f) + \cdots + \bar{s}_{n-1}(f) + \bar{s}_n(f) + \overbrace{\bar{s}_n(f) + \cdots + \bar{s}_n(f)}^{m-n \text{ слагаемых}}}{m+1}.$$

Следовательно, и при $n < m$

$$\|\bar{s}_n(\sigma_m)\|_C < N_1.$$

Мы получили, что $\sigma_m(f) \in C_-(N_1)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $\sigma_m(f) \to f$ в смысле метрики пространства C, но $f \notin C_-$. Значит, множество $C_-(N_1)$ не замкнуто в пространстве C. Отсюда следует, что C_- не может быть типа $G_{\delta\sigma}$ в C.

б) Докажем утверждение теоремы относительно множества C^-.

Так как $C^- \subseteq C^{\cdot}$ (ниже мы увидим, что включение строгое), то из утверждения 1 теоремы следует, что множество C^- будет 1-й категории в C. C^- имеет тип $F_{\sigma\delta}$ в пространстве C как множество сходимости последовательности операторов $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что C^- не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в C. Предположим обратное, т. е. что C^- будет типа $G_{\delta\sigma}$. Тогда, в силу утверждения Банаха и Мазура ([3]), при каждом постоянном $N > 0$ будет замкнутым в пространстве C множество $C^-(N)$ всех функций $f \in C^-$, для которых

$$\|\bar{\sigma}_n(f)\|_C \leqslant N \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Противоречие получится, если существует функция $f \in C$ такая, что $\bar{f} \in L_\infty$ и $\bar{f}$ не эквивалентна непрерывной функции. Выберем такую функцию f, чтобы $\|\bar{f}\|_{L_\infty} \leqslant N$. Тогда

$$\|\bar{\sigma}_n(f)\|_C \leqslant N \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим суммы Фейера $\sigma_m = \sigma_m(f)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ функции f. Имеем: $\sigma_m(f) \in C^-$, $\sigma_m(f) \to f$ в смысле метрики пространства C. Далее, при всех

натуральных n и m

$$\|\bar{\sigma}_n(\sigma_m)\|_C = \|\sigma_n(\bar{\sigma}_m)\|_C \leqslant \|\bar{\sigma}_m(f)\|_C \leqslant N.$$

Следовательно, $\sigma_m(f) \in C^-(N)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $\sigma_m(f) \to f$ в смысле метрики пространства C, но $f \notin C^-$. Незамкнутость множества $C^-(N)$ доказана.

Для окончания доказательства построим функцию $f \in C$ такую, что $\bar{f} \in L_\infty$ и $\bar{f}$ не эквивалентна непрерывной функции. При этом мы используем конформное отображение некоторой области на круг *.

Рассмотрим на плоскости $z = u + iv$ односвязную (открытую) область G, граница Γ которой состоит из отрезков

$$u = 0, \quad -\frac{3}{2} \leqslant v \leqslant 0; \quad 0 < u \leqslant \frac{2}{\pi}, \quad v = -\frac{3}{2}; \quad u = \frac{2}{\pi}, \quad -\frac{3}{2} < v \leqslant 0;$$

$$\frac{1}{\pi} < u < \frac{2}{\pi}, \quad v = 0; \quad \frac{1}{(k+1)\pi} < u < \frac{1}{k\pi}, \quad v = 0 \quad (k = 2, 4, \ldots)$$

и множества точек (u, v), для которых

$$u \in \bigcup_{k=1,3,\ldots} \left[\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right], \quad v = \sin\frac{1}{u}.$$

По теореме Римана, существует функция $\zeta = \varphi(z)$, регулярная в G и однолистно отображающая область G на круг K $(|\zeta| < 1)$ плоскости $\zeta = \alpha + i\beta$. Точки отрезка $u = 0$, $-1 < v \leqslant 0$ (и только они) будут недостижимыми граничными точками области G. Замыкание этого отрезка образует простой конец области G. Пусть ему соответствует точка $\zeta_0 = e^{ix_0}$, $x_0 \in [0, 2\pi)$ окружности $|\zeta| = 1$. Множество

$$\gamma = \Gamma \setminus \{(u, v) : u = 0, -1 \leqslant v \leqslant 0\}$$

отображается взаимно однозначно и непрерывно на множество

$$\{\alpha + i\beta = e^{ix}, \ x \in [0, 2\pi) \setminus x_0\}$$

[см. (4), гл. II, § 3].

Пусть

$$f(x) = u, \quad g(x) = v, \quad x \in [0, 2\pi) \setminus x_0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Согласно указанному выше, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[0, 2\pi) \setminus x_0$. Пусть теперь $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq x_0$. Обозначим через z_n точки границы Γ, соответствующие e^{ix_n}. Покажем, что $f(x_n) = \mathrm{Re}\, z_n \to 0$, а значения $g(x_n) = \mathrm{Im}\, z_n$, вообще говоря, неограниченно колеблются между 0 и -1.

Пусть μ_n и ν_n выбраны так, что

$$|\mu_n| < 1, \quad |\mu_n - e^{ix_n}| < \frac{1}{n}, \quad \varphi^{-1}(\mu_n) = \nu_n \in G, \quad |z_n - \nu_n| < \frac{1}{n}.$$

Если $x_n \to x_0$, то $\mu_n \to e^{ix_0}$. Значит, ν_n, а следовательно, и z_n могут иметь предельные точки, лежащие только в множестве $u = 0$, $-1 \leqslant v \leqslant 0$ Возьмем произвольно некоторое число $\varepsilon > 0$. При всех достаточно больших n будем иметь: $\mathrm{Re}\, z_n < \varepsilon$. Значит, при этих n $f(x_n) < \varepsilon$. Поэтому

* Эта область была указана автору Г. Ц. Тумаркиным.

если положить $f(x_0) = 0$, то функция $f(x)$ будет непрерывна на $[0, 2\pi)$. Функция $g(x)$ не может быть сделана непрерывной в точке x_0, как бы ни выбирать значение $g(x_0)$. Итак, функция $f(x)$ периодична с периодом 2π и непрерывна, а функция $g(x)$ ограничена и непрерывна на $[0, 2\pi)$, за исключением одной точки x_0.

Функция $z = \varphi^{-1}(\zeta)$ непрерывна в точках $\zeta = e^{ix}$, $x \in [0, 2\pi) \setminus x_0$. Если $\zeta_n = \alpha_n + i\beta_n \to e^{ix}$, $\zeta_n \in K$, $x \in [0, 2\pi) \setminus x_0$, то $z_n = \varphi^{-1}(\zeta_n) \to z$ ($\{z_n\}$ может иметь только одну предельную точку на границе, ибо $\zeta = e^{ix} \neq e^{ix_0}$ и, значит, ζ соответствует достижимой граничной точке области G). Для $x \in [0, 2\pi) \setminus x_0 \pmod{2\pi}$

$$f(x) = \operatorname{Re}\varphi^{-1}(e^{ix}) = \lim_{\zeta \to e^{ix}} \operatorname{Re}\varphi^{-1}(\zeta),$$

$$g(x) = \operatorname{Im}\varphi^{-1}(e^{ix}) = \lim_{\zeta \to e^{ix}} \operatorname{Im}\varphi^{-1}(\zeta).$$

В случае $f(x)$ это верно и для точки $x = x_0 \pmod{2\pi}$.

Разложим в единичном круге функцию $\varphi^{-1}(\zeta)$ в степенной ряд:

$$\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{a_0}{2} + i\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\zeta^n, \qquad \zeta = re^{ix},$$

где a_n, b_n и c_0 — действительные числа. Тогда

$$\operatorname{Re}\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n,$$

$$\operatorname{Im}\varphi^{-1}(\zeta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)\, r^n.$$

Пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx),$$

$$f(r, x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)\, r^n, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Так как $f(x)$ всюду непрерывна, то гармонические функции $\operatorname{Re}\varphi^{-1}(\zeta)$ и $f(r, x)$, являющиеся ограниченными в круге, имеют равные непрерывные предельные значения на единичной окружности. Поэтому внутри единичного круга

$$\operatorname{Re}\varphi^{-1}(\zeta) = f(r, x),$$

т. е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n =$$

$$= \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx)\, r^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Положив $r = 0$, получим:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0'}{2}.$$

Пусть $r=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\left(\frac{1}{2}\right)^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx)\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

(причем сходимость равномерна, ибо

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n-ib_n|}}\geqslant 1,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n-ib_n|}\leqslant 1$$

и, значит, при всех достаточно больших n $\sqrt[n]{|a_n-ib_n|}\leqslant\frac{3}{2}$). Отсюда получаем, что

$$a_n=a_n',\quad b_n=b_n' \quad (n\geqslant 1).$$

Рассмотрим теперь

$$\bar f(r,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin nx-b_n\cos nx)\,r^n.$$

Имеем:

$$\bar f(r,x)=\operatorname{Im}\varphi^{-1}(\zeta)-\frac{c_0}{2}.$$

Поэтому при всех $x\neq x_0\pmod{2\pi}$

$$\bar f(r,x)\to g(x)-\frac{c_0}{2}.$$

С другой стороны, так как функция f всюду непрерывна, то всюду

$$\bar f(r,x)-\left(-\frac{1}{\pi}\int_{1-r}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt\right)\to 0\quad (r\to 1)$$

[см. ([2]), § 3.45]. Следовательно, для $x\neq x_0\pmod{2\pi}$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0\leftarrow}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt=g(x)-\frac{c_0}{2}$$

и, значит,

$$\bar f(x)=g(x)-\frac{c_0}{2}.$$

Итак, $\bar f\in L_\infty$ и $\bar f$ не эквивалентна непрерывной функции. Теорема доказана.

Перейдем к множествам пространства L_∞. Множество $(L_\infty)^{\cdot}$ совпадает с множеством всех функций $f\in L_\infty$, для которых $\bar f\in L_\infty$, а множество $(L_\infty)^-$ — с множеством всех функций $f\in L_\infty$, для которых f эквивалентны непрерывным функциям. Имеем: $C^-\subset(L_\infty)^-$ (включение строгое и за счет неэквивалентных функций, как показывает пример функции g пункта 2б) доказательства теоремы 1). Отметим, что $C_-\subset(L_\infty)_-$ (включение строгое и за счет неэквивалентных функций). Действительно, рассмотрим функ-

цию f из пункта 2б) доказательства теоремы 1. Эта функция непрерывна и имеет период 2π. Заметим, что f есть функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$. Достаточно доказать ограниченность вариации на $[x_0, x_0 + 2\pi]$. При обходе дуги $\alpha + i\beta = e^{ix}$, $x_0 < x < x_0 + 2\pi$, в положительном направлении дуга γ (см. п. 2б) доказательства теоремы 1) описывается также в положительном направлении. Поэтому ясно, что функция $f(x)$ кусочно-монотонна на $[x_0, x_0 + 2\pi]$. Значит, $s_n(x; f) \to f(x)$ равномерно. Из этого следует, что функция g из п. 2 б) доказательства теоремы 1 будет принадлежать $(L_\infty)_- \setminus C_-$.

ТЕОРЕМА 2. 1. *Множества* $(L_\infty)^\cdot$ *и* $(L_\infty)^\wedge$ *будут множествами 1-й категории типа* F_σ *(и не будут типа* G_δ*) в пространстве* L_∞.

2. *Множества* $(L_\infty)^-$ *и* $(L_\infty)_-$ *будут множествами 1-й категории типа* $F_{\sigma\delta}$ *(и не будут типа* $G_{\delta\sigma}$*) в пространстве* L_∞.

Доказательство. 1. $(L_\infty)^\cdot$ — линейное множество пространства L_∞. Множество $(L_\infty)^\cdot$ не будет замкнутым в пространстве L_∞. Действительно, пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln (n+1)} \sin nx.$$

Мы имеем: $f \in C$, причем частные суммы ряда $s_n(x)$ сходятся равномерно к $f(x)$ [см. (2), § 5.11]. Значит, $s_n \in (L_\infty)^\cdot$ $(n \geqslant 1)$, $s_n \to f$ $(n \to \infty)$ в смысле метрики пространства L_∞, но $f \notin (L_\infty)^\cdot$. Итак, $(L_\infty)^\cdot$ — незамкнутое линейное множество в пространстве L_∞. Применим теорему из работы Мазура и Штернбаха (5), согласно которой линейное множество типа G_δ в банаховом пространстве будет необходимо замкнутым множеством. $(L_\infty)^\cdot$ будет множеством 1-й категории типа F_σ в пространстве L_∞, так как $(L_\infty)^\cdot \neq L_\infty$ и $(L_\infty)^\cdot$ совпадает с множеством точек ограниченности последовательности линейных операторов $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в пространстве L_∞.

Доказательство утверждения теоремы для множества $(L_\infty)^\wedge$ аналогично доказательству для множества $(L_\infty)^\cdot$.

2. Так как $(L_\infty)^- \subset (L_\infty)^\cdot$ (включение строгое, как показывает пример функции f в п. 2б) доказательства теоремы 1), то из утверждения 1 теоремы 2 следует, что $(L_\infty)^-$ будет множеством 1-й категории в L_∞. $(L_\infty)^-$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ как множество сходимости в пространстве L_∞ последовательности операторов $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. $(L_\infty)^-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L_∞, что доказывается по аналогии с соответствующей частью доказательства п. 2б) теоремы 1.

Доказательство теоремы относительно множества $(L_\infty)_-$ аналогично доказательству п. 2а) теоремы 1.

§ 2. Множества в пространстве L

ТЕОРЕМА 3. 1. *Множества* $L^\cdot$ *и* L^- *совпадают и будут множествами 1-й категории типа* F_σ *(и не будут типа* G_δ*) в пространстве* L. *Категория и тип множества* $L^\wedge \subset L^\cdot$ *(включение строгое) в пространстве* L *те же, что и для* $L^\cdot$.

2. *Множество* L_{-} *будет множеством 1-й категории типа* $F_{\sigma\delta}$ (*и не будет типа* $G_{\delta\sigma}$) *в пространстве* L.

Доказательство. 1. Очевидно, имеем: $L^{-} \subseteq L^{\cdot}$. Покажем, что $L^{-} = L^{\cdot}$. Для этого докажем, что $L^{\cdot} \subseteq L^{-}$. Возьмем любую $f \in L^{\cdot}$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Тогда последовательность $\{\|\bar{\sigma}_n(f)\|_L\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будет ограничена и, значит, сопряженный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

есть ряд Фурье — Стилтьеса [см. (2), § 4.32]. Но, согласно теореме Ф. и М. Рисса [см. (2), § 7.5], если тригонометрический ряд и его сопряженный оба являются рядами Фурье — Стилтьеса, то они будут и рядами Фурье — Лебега. Поэтому сопряженный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

будет рядом Фурье — Лебега. Таким образом, $\bar{f} \in L$ и $f \in L^{-}$ [см. (2), § 4.34].

Докажем, что $L^{\cdot}$ (а значит, и L^{-}) будет множеством 1-й категории типа F_{σ} и не будет множеством типа G_{δ} в пространстве L. Имеем: $L^{\cdot} \subset L$ (включение строгое). Например, функция f с рядом Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln(n+1)}$$

принадлежит множеству $L \setminus L^{\cdot}$. Множество $L^{\cdot}$ совпадает с множеством функций $f \in L$, для которых последовательность $\{\|U_n(f)\|_L\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена, где $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$. Так как $L^{\cdot} \neq L$, то $L^{\cdot}$ будет множеством 1-й категории типа F_{σ}.

Множество $L^{\cdot}$ всюду плотно в L (ибо, например, тригонометрические полиномы принадлежат $L^{\cdot}$). Так как $L^{\cdot}$ есть множество 1-й категории в L, то $L^{\cdot}$ не может быть типа G_{δ} в L, ибо в противном случае $L^{\cdot}$ было бы 2-й категории в L.

Включение $L^{\wedge} \subset L^{\cdot}$ строгое. Например, функция

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \operatorname{Re}\left[e^{i2^{k^3}x} P_{2^{k^3}}(e^{ix})\right],$$

где

$$P_n(z) = (n+1)^{-1} \left(\sum_{m=0}^{n} z^m\right)^2,$$

как можно показать, принадлежит множеству $L^{\cdot} \setminus L^{\wedge}$ [см. (2), § 7.6, 10].

Доказательство утверждения теоремы для множества $L^{\wedge}$ аналогично доказательству для множества $L^{\cdot}$.

2. Так как $L_{-} \subseteq L^{\wedge}$ (ниже мы увидим, что включение строгое), то из утверждения 1 теоремы следует, что L_{-} будет множеством 1-й категории в L. Множество L_{-} имеет тип $F_{\sigma\delta}$ в L как множество сходимости в пространстве L последовательности операторов $F_n(f) = \bar{s}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (со значениями в L).

Покажем, что L_{-} не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L. Для этого построим функцию $f \in L$, для которой $\|\bar{s}_n(f)\|_L \leqslant N_1$ $(n = 1, 2, \ldots, N_1$ — постоянная), но последовательность $\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не сходится в метрике L.

Пусть

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \operatorname{Re} [e^{i2^{k^2}x} P_{2^{k^2}}(e^{ix})],$$

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \operatorname{Im} [e^{i2^{k^2}x} P_{2^{k^2}}(e^{ix})].$$

Эти ряды будут рядами Фурье — Лебега [см. (2), § 7.6, 10].

Покажем, что последовательность $\{\|\bar{s}_n(f)\|_L\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Пусть

$$n = 2^{r^2} + q, \quad 0 \leqslant q < 2^{(r+1)^2} - 2^{r^2}.$$

Тогда

$$\bar{s}_n(f) = \sum_{k=1}^{r-1} k^{-2} \operatorname{Im} [e^{i2^{k^2}x} P_{2^{k^2}}(e^{ix})] + r^{-2} s_n \{\operatorname{Im} [e^{i2^{r^2}x} P_{2^{r^2}}(e^{ix})]\}.$$

Мы имеем:

$$\|s_n \{\operatorname{Im} [e^{i2^{r^2}x} P_{2^{r^2}}(e^{ix})]\}\|_L \leqslant \int_0^{2\pi} |e^{i2^{r^2}x} P_{2^{r^2}}(e^{ix})| \, dx \, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} |P_{2^{r^2}}(e^{ix})| \, dx \, C_1 \ln n = 2\pi C_1 \ln n = C_2 \ln n.$$

Здесь $D_n(t)$ — ядро Дирихле, C_1 — абсолютная положительная постоянная; при этом используется тот факт, что $\|P_n(e^{ix})\|_L = 2\pi$ [см. (2), § 7.6, 10]. Таким образом,

$$\|\bar{s}_n(f)\|_L \leqslant \sum_{k=1}^{r-1} k^{-2} 2\pi + r^{-2} C_2 \ln n < 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} +$$

$$+ r^{-2} C_2 \ln 2^{(r+1)^2} < 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} + r^{-2} C_2 (r+1)^2 < C_3$$

(C_3 — постоянная).

Докажем, что последовательность $\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не сходится в смысле метрики L. В самом деле, если бы она сходилась в пространстве L, то, по теореме Зигмунда, сходилась бы в метрике L и последовательность $\{s_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ [см. (2), § 7.31]. Отсюда следует, что

и последовательность $\{t_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $t_n(x) = s_n(f) + i\bar{s}_n(f)$, сходилась бы в смысле метрики L.

Но тогда последовательность $\{t_{2\cdot 2^{k^2}}(x) - t_{2^{k^2}-1}(x)\}$ при $k \to \infty$ сходилась бы к нулю в пространстве L.

Покажем, что это невозможно. Действительно,

$$t_{2\cdot 2^{k^2}}(x) - t_{2^{k^2}-1}(x) = k^{-2} e^{i2^{k^2}x} Q_{2^{k^2}}(e^{ix}),$$

где

$$Q_n(z) = (n+1)^{-1} [1 + 2z + 3z^2 + \ldots + (n+1) z^n].$$

Имеем:

$$\| Q_n(e^{ix}) \|_L \geqslant C \ln n,$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная [см. (2), § 7.6, 10]. Поэтому

$$\| t_{2\cdot 2^{k^2}}(x) - t_{2^{k^2}-1}(x) \|_L \geqslant k^{-2} C \ln 2^{k^2} = k^{-2} C \cdot k^2 \ln 2 = C \ln 2.$$

Доказательство утверждения теоремы относительно L_- заканчивается аналогично соответствующей части доказательства п. 2а) теоремы 1.

§ 3. Множества в пространствах Орлича

Так как ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

будет рядом Фурье функции из L_Φ^* тогда и только тогда, когда $\|\sigma_n\|_{L_\Phi^*} = O(1)$ $(n \to \infty)$ [см. (2), § 4.7, 14] (здесь σ_n — суммы Фейера тригонометрического ряда), то $(L_\Phi^*)^\cdot$ совпадает с множеством всех функций $f \in L_\Phi^*$, для которых $\bar{f} \in L_\Phi^*$.

Если $\Phi(u) = |u|^p$ $(p > 1)$, то, как следует из теоремы М. Рисса,

$$(L_\Phi^*)^- = (L_\Phi^*)_- = L_\Phi^*.$$

Известно, что каждая функция из $L(0, 2\pi)$ принадлежит некоторому пространству Орлича [см. (1), § 8].

Так как $L^\cdot \subset L$ (включение строгое), то существуют функции f и $\Phi(u)$ такие, что $f \in L_\Phi^*$, но $\bar{f} \notin L$ (и тем более $\bar{f} \notin L_\Phi^*$).

ТЕОРЕМА 4. 1. *Если $(L_\Phi^*)^\cdot \neq L_\Phi^*$, то $(L_\Phi^*)^\cdot$ будет множеством 1-й категории типа F_σ (и не будет типа G_δ) в пространстве L_Φ^*.*

2. *Равенство $(L_\Phi^*)^\cdot = L_\Phi^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $E_\Phi \subseteq (L_\Phi^*)^\cdot$. При этом если $f \in E_\Phi$, то и $\bar{f} \in E_\Phi$.*

3. *Если $(L_\Phi^*)^\wedge \neq L_\Phi^*$, то $(L_\Phi^*)^\wedge$ будет множеством 1-й категории типа F^σ (и не будет типа G_δ) в пространстве L_Φ^*. Неравенство $(L_\Phi^*)^\wedge \neq L_\Phi^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $(L_\Phi^*)^\cdot \neq L_\Phi^*$.*

Доказательство. 1. На пространстве L_Φ^* рассмотрим последовательность операторов $U_n(f) = \bar{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эти операторы

аддитивны и непрерывны (если $f_i \to f$ в смысле метрики пространства L^*_Φ, то при каждом фиксированном n $\bar\sigma_n(f_i) \to \sigma_n(f)$ равномерно на $[0, 2\pi]$ и, значит, и в смысле метрики L^*_Φ). Множество $(L^*_\Phi)^\cdot$ есть множество всех функций $f \in L^*_\Phi$, для которых последовательность $\{\|U_n(f)\|_{L^*_\Phi}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Так как, по предположению, $(L^*_\Phi)^\cdot \neq L^*_\Phi$, то из этого следует [см. (2), § 4.55], что $(L^*_\Phi)^\cdot$ будет множеством 1-й категории типа F_σ в пространстве L^*_Φ.

Покажем, что (L^*_Φ) не будет типа G_δ в пространстве L^*_Φ. Так как $(L^*_\Phi)^\cdot$ — линейное множество, то, по теореме Мазура и Штернбаха (5), достаточно показать, что $(L^*_\Phi)^\cdot$ не будет замкнутым множеством в пространстве L^*_Φ.

Возьмем некоторую функцию $f \in L^*_\Phi \setminus (L^*_\Phi)^\cdot$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Для нее последовательность $\{\|\bar\sigma_n(f)\|_{L^*_\Phi}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ неограниченна. Здесь $\bar\sigma_n(f)$ — суммы Фейера сопряженного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx). \tag{2}$$

Применим следующее предложение [см. (6)]: если первые арифметические средние ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$ (где A_n — элементы банахова пространства) ограничены (по норме) для каждой выпуклой и стремящейся к нулю числовой последовательности $\{\lambda_n\}$, то первые арифметические средние ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ также ограничены.

Так как суммы Фейера ряда (2) не ограничены по норме L^*_Φ, то существует выпуклая последовательность $\{\lambda_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $\lambda_n \to 0$, такая, что для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$$

суммы Фейера также будут неограниченными в пространстве L^*_Φ. Ряд

$$\frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

будет рядом Фурье некоторой функции $\tilde f \in L^*_\Phi$ [см. (2), § 4.62] и, следовательно, $\tilde f \in L^*_\Phi \setminus (L^*_\Phi)^\cdot$.

Покажем, что

$$\|\tilde f - \sigma_n(\tilde f)\|_{L^*_\Phi} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Достаточно доказать, что последовательность $\{\sigma_n(\tilde f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится в смысле метрики пространства L^*_Φ (в силу полноты тригоно-

метрической системы, она может сходиться только к функции, эквивалентной $\widetilde{f}$). Пусть n, m — натуральные числа, $n > m$,

$$h(x) \sim \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx.$$

Имеем:

$$\sigma_n(x; \widetilde{f}) - \sigma_m(x; \widetilde{f}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sigma_n(t; h) - \sigma_m(t; h)] f(x+t)\, dt$$

[см. (2), § 4.42]. Отсюда, пользуясь определением нормы в L_Φ^*, получаем, что

$$\|\sigma_n(\widetilde{f}) - \sigma_m(\widetilde{f})\|_{L_\Phi^*} \leqslant \frac{1}{\pi} \|\sigma_n(h) - \sigma_m(h)\|_L \|f\|_{L_\Phi^*}.$$

Значит, $\{\sigma_n(\widetilde{f})\}$ сходится в метрике L_Φ^*.

Итак, $\{\sigma_n(\widetilde{f})\} \subset (L_\Phi^*)^{\cdot}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sigma_n(\widetilde{f}) \to \widetilde{f}$ в смысле метрики пространства L_Φ^*, но $\widetilde{f} \notin (L_\Phi^*)^{\cdot}$. Незамкнутость множества $(L_\Phi^*)^{\cdot}$ доказана.

2. Докажем, что из включения

$$E_\Phi \subset (L_\Phi^*)^{\cdot}$$

следует включение

$$L_\Phi^* \setminus E_\Phi \subset (L_\Phi^*)^{\cdot}.$$

Предположим обратное, т. е. что существует функция $f \in L_\Phi^*$ такая, что для нее $\overline{f} \notin L_\infty^*$. Как показано в п. 1 доказательства, из этого следует существование функции $f^* \in E_\Phi^{\cdot}$, для которой $\overline{f}^* \notin L_\Phi^*$. Мы получили, что

$$E_\Phi \not\subset (L_\Phi^*)^{\cdot}.$$

Покажем, что если $(L_\Phi^*)^{\cdot} = L_\Phi^*$, то для $f \in E_\Phi$ будем иметь $\overline{f} \in E_\Phi$.

Из $(L_\Phi^*)^{\cdot} = L_\Phi^*$ следует существование постоянной M такой, что для каждой $f \in L_\Phi^*$

$$\|\overline{f}\|_{L_\Phi^*} \leqslant M \|f\|_{L_\Phi^*}. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим на пространстве L_Φ^* последовательность линейных операторов $U_n(f) = \overline{\sigma}_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из равенства $(L_\Phi^*)^{\cdot} = L_\Phi^*$ следует, что при каждой $f \in L_\Phi^*$ последовательность $\{\|U_n(f)\|_{L_\Phi^*}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Значит, в силу теоремы Банаха и Штейнхауса [см. (2), § 4.55], существует такая постоянная M (не зависящая от n и f), что при любой $f \in L_\Phi^*$ имеем:

$$\|\overline{\sigma}_n(f)\|_{L_\Phi^*} \leqslant M \|f\|_{L_\Phi^*} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда заключаем, что

$$\|\overline{f}\|_{L_\Phi^*} \leqslant M \|f\|_{L_\Phi^*}.$$

Из неравенства (3) следует, что

$$\|\overline{f}-\overline{\sigma}_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant M\|f-\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi}. \tag{4}$$

Пусть $f \in E_\Phi$. Покажем, что тогда

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

При этом мы будем пользоваться тем, что, как известно, для каждой $f \in \overset{*}{L}_\Phi$ выполняется неравенство

$$\|\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant \|f\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Так как $f \in E_\Phi$, то можно подобрать тригонометрический полином $T(x)$ так, что

$$\|f-T\|_{\overset{*}{L}_\Phi} < \varepsilon.$$

Положим $f - T = f_1$. Тогда

$$f = T + f_1, \quad \sigma_n(f) = \sigma_n(T) + \sigma_n(f_1),$$

$$f - \sigma_n(f) = T - \sigma_n(T) + f_1 - \sigma_n(f_1),$$

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant \|T-\sigma_n(T)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} + \|f_1\|_{\overset{*}{L}_\Phi} + \|\sigma_n(f_1)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant$$

$$\leqslant \|T-\sigma_n(T)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} + 2\|f_1\|_{\overset{*}{L}_\Phi} < \|T-\sigma_n(T)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} + 2\varepsilon.$$

При $n \to \infty$ и тригонометрическом полиноме T

$$\|T-\sigma_n(T)\|_C \to 0,$$

а значит, и

$$\|T-\sigma_n(T)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому при всех достаточно больших n

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Так как правая часть (4) при $f \in E_\Phi$ стремится к нулю, то и левая часть стремится к нулю, а это означает, что $\overline{f} \in E_\Phi$. Утверждение 2 доказано.

3. Доказательство того, что при $(\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \neq \overset{*}{L}_\Phi$ множество $(\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge$ будет множеством 1-й категории типа F_σ и не будет типа G_δ в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$, аналогично доказательству утверждения 1 для множества $(\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot$.

Пусть $(\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot \neq \overset{*}{L}_\Phi$. Так как $(\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \subseteq (\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot$, то и

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \neq \overset{*}{L}_\Phi.$$

Пусть $(L_\Phi^*)^\cdot = L_\Phi^*$. Покажем, что тогда

$$(L_\Phi^*)^\wedge = L_\Phi^*.$$

Из равенства $(L_\Phi^*)^\cdot = L_\Phi^*$ следует, как мы видели, существование такой постоянной M, что при любой $f \in L_\Phi^*$

$$\|\bar{f}\|_{L_\Phi^*} \leqslant M \|f\|_{L_\Phi^*}.$$

Имеем:

$$\bar{s}_n(x; f) = \bar{s}_n^*(x; f) + \frac{a_n \sin nx - b_n \cos nx}{2},$$

где

$$\bar{s}_n^*(x; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x+t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt.$$

Используя рассуждение § 7.3 книги (²), можно написать, что

$$|\bar{s}_n(x; f)| \leqslant |\overline{\bar{f}(x) \sin nx}| + |\overline{\bar{f}(x) \cos nx}| + \frac{|a_n| + |b_n|}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|\bar{s}_n(x; f)\|_{L_\Phi^*} \leqslant \|\overline{\bar{f}(x) \sin nx}\|_{L_\Phi^*} + \|\overline{\bar{f}(x) \cos nx}\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|a_n\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|b_n\|_{L_\Phi^*} \leqslant M \|\bar{f}(x) \sin nx\|_{L_\Phi^*} + M\|\bar{f}(x) \cos nx\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|a_n\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|b_n\|_{L_\Phi^*} \leqslant$$
$$\leqslant M\|\bar{f}\|_{L_\Phi^*} + M\|\bar{f}\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|a_n\|_{L_\Phi^*} + \frac{1}{2}\|b_n\|_{L_\Phi^*}.$$

Мы получили, что последовательность $\{\|\bar{s}_n(x; f)\|_{L_\Phi^*}\}$ ограничена. Значит,

$$(L_\Phi^*)^\wedge = L_\Phi^*.$$

Утверждение 3 доказано.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть*

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \gamma(t)\, dt,$$

где $\gamma(t)$ — *положительная при* $t > 0$, *непрерывная справа при* $t \geqslant 0$, *неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:* $\gamma(0) = 0$, $\gamma(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$. *Положим*

$$\delta(s) = \sup_{\gamma(t) \leqslant s} t, \quad \Psi(v) = \int_0^{|v|} \delta(s)\, ds.$$

Для того чтобы $(L^*_\Phi)^\cdot = L^*_\Phi$, *необходимо, чтобы*

$$\sup_{1<\lambda<\infty}\left(\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\gamma(\lambda t)}{\gamma(t)}\right)=\infty, \tag{5}$$

$$\sup_{1<\lambda<\infty}\left(\varlimsup_{s\to+\infty}\frac{\delta(\lambda s)}{\delta(s)}\right)=\infty. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $(L^*_\Phi)^\cdot = L^*_\Phi$. Тогда $(E_\Phi)^\cdot = E_\Phi$ (см. утверждение 2 теоремы 4). Отсюда следует существование постоянной M (не зависящей от f) такой, что для каждой $f \in E_\Phi$

$$\|\bar f\|_{E_\Phi} \leqslant M\|f\|_{E_\Phi}.$$

Затем устанавливаем существование постоянной M_1 такой, что для каждой $f \in E_\Phi$

$$\|s_n(f)\|_{E_\Phi} \leqslant M_1\|f\|_{E_\Phi} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(см. соответствующую часть доказательства п. 3 теоремы 4 и теорему Банаха и Штейнхауса). Наконец, получаем, что для каждой $f \in E_\Phi$

$$\|f - s_n(f)\|_{E_\Phi} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Действительно, зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Так как $f \in E_\Phi$, то можно выбрать тригонометрический полином $T(x)$ так, что

$$\|f - T\|_{E_\Phi} < \varepsilon.$$

Положим $f - T = f_1$. Тогда

$$f - s_n(f) = T - s_n(T) + f_1 - s_n(f_1).$$

При n, больших порядка полинома T, будем иметь:

$$f - s_n(f) = f_1 - s_n(f_1).$$

Для этих n отсюда получаем:

$$\|f - s_n(f)\|_{E_\Phi} < (1 + M_1)\,\varepsilon.$$

Докажем необходимость равенства (5). Предположим обратное, т. е. что при условии $(L^*_\Phi)^\cdot = L^*_\Phi$ равенство (5) не выполняется. Для получения нужного противоречия используем метод доказательства следующей теоремы из работы С. М. Лозинского ([7]):

Пусть функция $\Phi(u)$ *удовлетворяет условию* Δ_2 *при больших* u. *Для того чтобы для всякой функции* $f \in L_\Phi$ *было*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\Phi(|f - s_n(f)|)\,dx = 0,$$

необходимо выполнение условия

$$\varliminf_{u\to+\infty}\frac{\Phi(2u)}{\Phi(u)} > 2.$$

Обозначим через $D_n(t)$ n-е ядро Дирихле. Как показано в работе

С. М. Лозинского ([8]), при указанной в формулировке теоремы 5 функции

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \gamma(t)\,dt$$

имеем:

$$\|D_n(t)\|_{L^*_\Phi} \geqslant \frac{\gamma(z)}{250} \ln \frac{n}{z\gamma(z)}$$

для каждого z такого, что $z\gamma(z) \geqslant 1$.

Далее, доказательство леммы 5 в работе ([8]) позволяет получить следующее утверждение:

Если для каждой функции $f \in E_\Phi$

$$\|f - s_n(f)\|_{E_\Phi} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

то существует постоянная A, зависящая от $\Phi(u)$, такая, что при каждом ζ, $0 < \zeta < +\infty$,

$$\|D_n(t)\|_{L^*_\Phi} \leqslant A\,\frac{n + \Phi(\zeta)}{\zeta}.$$

Итак, пусть соотношение (5) не выполняется, т. е.

$$\sup_{1<\lambda<\infty}\left(\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\gamma(\lambda t)}{\gamma(t)}\right) < R < \infty.$$

Возьмем

$$B = 4R^2 e^{500AR}, \quad \lambda_0 = 2B$$

и выберем последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$1 \leqslant u_1 < u_2 < \ldots, \lim_{k\to\infty} u_k = +\infty, \quad \gamma(\lambda_0 u_k) < R\gamma\left(\frac{u_k}{2}\right)$$

$\Bigl($это можно сделать, ибо $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}\frac{\gamma(2\lambda_0 t)}{\gamma(t)} < R\Bigr)$. Тогда

$$\gamma(\lambda_0 u_k) < R\gamma(u_k). \tag{7}$$

Кроме того, имеем:

$$\Phi(u_k) > \Phi(u_k) - \Phi\left(\frac{u_k}{2}\right) \geqslant \frac{u_k}{2}\gamma\left(\frac{u_k}{2}\right) >$$

$$> \frac{u_k}{2}\,\frac{1}{R}\,\gamma(\lambda_0 u_k) \geqslant \frac{1}{2R}\,u_k\gamma(u_k).$$

При $n = 1, 2, \ldots$ определим числа ζ_n из равенства $\Phi(\zeta_n) = n$. Пусть n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ есть наименьшее натуральное число такое, что $\zeta_{n_k} \geqslant Bu_k$. Будем считать, что u_1 выбрано столь большим, что $u_1\gamma(u_1) \geqslant 1$ и $\gamma(\zeta_{n_1-1}) \geqslant 1$. Далее, так же как в работе ([7]), показываем, что

$$\zeta_{n_k} < 2Bu_k = \lambda_0 u_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\lambda_0 > 2$, то из (7) следует, что

$$\gamma(2u_k) < R\gamma(u_k) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Мы получаем:

$$\frac{\zeta_{n_k}}{B}\gamma\left(\frac{\zeta_{n_k}}{B}\right) < 2u_k\gamma(2u_k) < 2u_kR\gamma(u_k) < 4R^2\Phi(u_k) \leqslant$$

$$\leqslant 4R^2\Phi\left(\frac{\zeta_{n_k}}{B}\right) < \frac{4R^2}{B}\Phi(\zeta_{n_k}) = \frac{4R^2}{B}n_k.$$

С другой стороны, так же, как и в работе ([7]),

$$\frac{\zeta_{n_k}}{B}\gamma\left(\frac{\zeta_{n_k}}{B}\right) \geqslant 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Мы имеем:

$$\|D_{n_k}(t)\|_{L^*_\Phi} \geqslant \frac{1}{250}\gamma\left(\frac{\zeta_{n_k}}{B}\right)\ln\frac{n_k}{\frac{\zeta_{n_k}}{B}\gamma\left(\frac{\zeta_{n_k}}{B}\right)} >$$

$$> \frac{1}{250}\gamma(u_k)\ln\frac{B}{4R^2} = 2AR\gamma(u_k),$$

но

$$\|D_{n_k}(t)\|_{L^*_\Phi} \leqslant A\frac{n_k + \Phi(\zeta_{n_k})}{\zeta_{n_k}} = 2A\frac{\Phi(\zeta_{n_k})}{\zeta_{n_k}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A\frac{\zeta_{n_k}\gamma(\zeta_{n_k})}{\zeta_{n_k}} = 2A\gamma(\zeta_{n_k}) \leqslant 2A\gamma(\lambda_0 u_k).$$

Таким образом,

$$2A\gamma(\lambda_0 u_k) > 2AR\gamma(u_k), \quad \gamma(\lambda_0 u_k) > R\gamma(u_k) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но последнее неравенство противоречит неравенству (7). Необходимость условия (5) доказана.

Докажем теперь выполнение равенства (6). Пусть

$$(L^*_\Phi)^\cdot = L^*_\Phi.$$

Отсюда следует, что

$$(L^*_\Psi)^\cdot = L^*_\Psi$$

[см. ([2]), § 7,6, 5]. Далее, аналогично предыдущему, устанавливаем выполнение (6).

С помощью теоремы 5 докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Не существует функции $\Phi(u)$, не удовлетворяющей условию Δ_2 при больших u, для которой $(L^*_\Phi)^\cdot = L^*_\Phi$.*

Доказательство. Возьмем любую функцию $\Phi(u)$, не удовлетворяющую условию Δ_2 при больших u, и представим ее в виде

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|}\gamma(t)\,dt,$$

где $\gamma(t)$ удовлетворяет условиям первого предложения теоремы 5. Из того, что $\Phi(u)$ не удовлетворяет условию Δ_2 при больших u, следует, что

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\gamma(2t)}{\gamma(t)} = \infty.$$

Пусть последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$t_k \uparrow \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\gamma(2t_k)}{\gamma(t_k)} = \infty.$$

Возможны два случая.

Случай 1. Имеется последовательность $\{[\tau_k, \tau_k']\}_{k=1}^{\infty}$ промежутков постоянства функции $\gamma(t)$ такая, что

$$\tau_k \to \infty \ (k \to \infty), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\tau_k'}{\tau_k} = \infty.$$

Такой случай имеет место, например, для функции

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1), \\ k!, & \text{если } t \in [(k-1)!, k!) \quad (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

[см. ([1]), стр. 41—42].

Фиксируем произвольно некоторое число λ, $1 < \lambda < \infty$. Рассмотрим последовательность $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При всех достаточно больших k, $k \geqslant k_0(\lambda)$, будет $\tau_k' / \tau_k > \lambda$.

При этих k имеем:

$$\tau_k < \lambda\tau_k < \tau_k',$$

поэтому

$$\gamma(\lambda\tau_k) = \gamma(\tau_k)$$

и, значит,

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\gamma(\lambda t)}{\gamma(t)} = 1, \quad \sup_{1<\lambda<\infty}\left(\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\gamma(\lambda t)}{\gamma(t)}\right) = 1.$$

Для $\gamma(t)$ не выполнено условие (5) теоремы 5. Следовательно, в этом случае $(L_\Phi^*)^{\cdot} \neq L_\Phi^*$.

Случай 2. Последовательности промежутков постоянства функции $\gamma(t)$ со свойствами, указанными в случае 1, не существует. Иначе говоря, существует такое число R, что для любых достаточно больших τ и τ', $\tau \leqslant \tau'$, $\tau \geqslant T$, для которых $\gamma(\tau) = \gamma(\tau')$, будем иметь: $\tau'/\tau \leqslant R$.

Фиксируем некоторое число λ, $1 < \lambda < \infty$. При достаточно больших k, $k \geqslant k_0(T, \lambda)$, будет

$$2t_k \geqslant T, \quad \gamma(2t_k)/\gamma(t_k) > \lambda.$$

При этих k имеем:

$$\delta[\lambda\gamma(t_k)] \leqslant \delta[\gamma(2t_k)] = \sup_{\gamma(t)\leqslant\gamma(2t_k)} t \leqslant R2t_k,$$

$$\frac{\delta[\lambda\gamma(t_k)]}{\delta[\gamma(t_k)]} \leqslant \frac{R2t_k}{t_k} = 2R.$$

Значит,

$$\sup_{1<\lambda<\infty}\left(\varliminf_{s\to+\infty} \frac{\delta(\lambda s)}{\delta(s)}\right) \leqslant 2R.$$

Мы получили, что для функции $\delta(s)$ не выполнено условие (6) теоремы 5. Следовательно, и во втором случае $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} \neq \overset{*}{L}_\Phi$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. 1. *Пусть $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2 при больших u. Тогда $(\overset{*}{L}_\Phi)^- = (\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot}$, и если $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \neq \overset{*}{L}_\Phi$, то $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ будет множеством 1-й категории типа F_σ (и не будет типа G_δ) в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$.*

2. *Для того чтобы множество $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ было типа G_δ, необходимо и достаточно, чтобы $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi$. При этом $(\overset{*}{L}_\Phi)^- = \overset{*}{L}_\Phi$.*

3. *Для того чтобы множество $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ не было типа $G_{\delta\sigma}$, необходимо и достаточно, чтобы $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \cap (\overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi) \neq 0$.*

Доказательство. 1. Пусть функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2 при больших u. Покажем, что в этом случае

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- = (\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot}.$$

Возьмем любую функцию $f \in (\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot}$. Тогда $\bar{f} \in \overset{*}{L}_\Phi$. Так как $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2, то $\bar{f} \in L_\Phi$ [см. (1), стр. 91]. Но тогда

$$\int_0^{2\pi} \Phi\left[\frac{1}{4}\,|\bar{f}(x) - \bar{\sigma}_n(x; f)|\right] dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$

[см. (2), § 4.35], откуда следует, что и

$$\|\bar{f} - \bar{\sigma}_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

[см. (1), стр. 93]. Мы получили, что $f \in (\overset{*}{L}_\Phi)^-$. Так как в этом случае

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- = (\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot},$$

то утверждение о категории и типе множества $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ вытекает из теоремы 4.

2. Если $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} \neq \overset{*}{L}_\Phi$, то, как было показано при доказательстве теоремы 4, $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot}$ не содержит полностью E_Φ, а следовательно, и $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \not\supset E_\Phi$. Если бы $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ было типа G_δ, то, согласно утверждению Мазура и Штернбаха, $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ было бы замкнутым множеством и содержало бы полностью E_Φ (так как $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ содержит все тригонометрические полиномы). Но $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ не содержит полностью E_Φ. Необходимость условия $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi$ доказана.

Докажем достаточность условия. Из равенства $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi$ следует, по теореме 6, что $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2. Но тогда, в силу утверждения 1 теоремы 7,

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- = (\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi.$$

3. Докажем достаточность условия. Пусть

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- \cap (\overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi) \neq 0.$$

Тогда существует функция $f \in \overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi$ с рядом Фурье (1), для которой $\bar{f} \in E_\Phi$. Возьмем функцию $\varphi = \bar{f}$. Имеем: $\varphi \in E_\Phi$, $\bar{\varphi} \in \overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi$ $\left(\text{ибо } \bar{\varphi} = -\left(f - \frac{a_0}{2}\right)\right)$.

Покажем, что $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$. Так как $\varphi \in E_\Phi$, то, как было показано,

$$\|\varphi - \sigma_n(\varphi)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \to 0$$

при $n \to \infty$. Дальнейшее рассуждение в доказательстве того, что $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$, аналогично доказательству того, что C^- не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве C (см. п. 2б) доказательства теоремы 1).

Докажем необходимость условия. Пусть

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- \cap (\overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi) = 0,$$

иначе говоря, пусть $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \subseteq E_\Phi$. Покажем, что тогда $(\overset{*}{L}_\Phi)^-$ будет типа F_σ в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$ (и, значит, будет типа $G_{\delta\sigma}$).

Пусть $N > 0$ — некоторое постоянное. Обозначим через $(\overset{*}{L}_\Phi)^-(N)$ множество всех функций $f \in (\overset{*}{L}_\Phi)^-$, для которых

$$\|\bar{\sigma}_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant N \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$(\overset{*}{L}_\Phi)^- = \bigcup_{N=1}^{\infty} (\overset{*}{L}_\Phi)^-(N).$$

Докажем, что каждое множество $(\overset{*}{L}_\Phi)^-(N)$ замкнуто в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$. Пусть

$$\{f_i\} \subset (\overset{*}{L}_\Phi)^-(N) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и

$$f_i \to f_0 \quad (i \to \infty)$$

в смысле метрики пространства $\overset{*}{L}_\Phi$, причем

$$f_0(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

Покажем, что $f_0 \in (\overset{*}{L}_\Phi)^-(N)$. Так как $f_i \in E_\Phi$ (ибо $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \subseteq E_\Phi$), то и $f_0 \in E_\Phi$. Из того, что

$$\|\bar{\sigma}_n(f_i)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant N \quad (n, i = 1, 2, \ldots),$$

следует, что

$$\|\bar{\sigma}_n(f_0)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant N \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Значит, $\bar{f}_0 \in \overset{*}{L}_\Phi$. Покажем, что $\bar{f}_0 \in E_\Phi$. Предположим обратное, т. е. что $\bar{f}_0 \in \overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi$. Тогда

$$\overline{(\bar{f}_0)} = -\left(f_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \in E_\Phi.$$

Мы получили, что $\bar{f}_0 \in (\overset{*}{L}_\Phi)^- \cap (\overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi)$.Но это невозможно,ибо $(\overset{*}{L}_\Phi)^- \subseteq E_\Phi$. Следовательно, $\bar{f}_0 \in E_\Phi$ и, значит, $f_0 \in (\overset{*}{L}_\Phi)^-(N)$. Утверждение 3 доказано.

ТЕОРЕМА 8. 1. *Для того чтобы $(\overset{*}{L}_\Phi)_- = \overset{*}{L}_\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi$.*

2. *Для того чтобы множество $(\overset{*}{L}_\Phi)_-$ было типа G_δ, необходимо и достаточно, чтобы $(\overset{*}{L}_\Phi)^{\cdot} = \overset{*}{L}_\Phi$. При этом $(\overset{*}{L}_\Phi)_- = \overset{*}{L}_\Phi$.*

3. *Для того чтобы множество* $(\overset{*}{L}_\Phi)_-$ *не было типа* $G_{\delta\sigma}$ *в пространстве* $\overset{*}{L}_\Phi$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \neq (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge,$$

и, кроме того, если $(\overset{*}{L}_\Phi)_- \subseteq E_\Phi$, — *чтобы*

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \neq (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \cap E_\Phi.$$

Доказательство. 1. Докажем достаточность условий утверждения 1. Итак, пусть функция $\Phi(u)$ такова, что $(\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot = \overset{*}{L}_\Phi$. Тогда, как было показано выше, для каждой $f \in \overset{*}{L}_\Phi$ последовательность $\{\|s_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Отсюда, по теореме Банаха и Штейнхауса [см. (2), § 4.55], вытекает существование постоянной M_1 такой, что

$$\|s_n(f)\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \leqslant M_1 \|f\|_{\overset{*}{L}_\Phi} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из равенства $(\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot = \overset{*}{L}_\Phi$ следует, что функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию Δ_2 при больших u. Покажем, что отсюда будет вытекать выполнение равенства

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- = \overset{*}{L}_\Phi.$$

Возьмем любую $f \in \overset{*}{L}_\Phi$; тогда $\bar{f} \in \overset{*}{L}_\Phi$. При выполнении условия Δ_2, как было указано при доказательстве теоремы 5, для заданного $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n имеем:

$$\|\bar{f} - s_n(\bar{f})\|_{\overset{*}{L}_\Phi} < (1 + M_1)\,\varepsilon.$$

Значит, $f \in (\overset{*}{L}_\Phi)_-$.

Необходимость условия $(\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot = \overset{*}{L}_\Phi$ очевидна, ибо

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \subseteq (\overset{*}{L}_\Phi)^\cdot.$$

2. Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 2 теоремы 7.

3. Докажем необходимость условий. Предположим, что

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- = (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge.$$

Так как $(\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge$ имеет тип F_σ (см. утверждение 3 теоремы 4), то и $(\overset{*}{L}_\Phi)_-$ было бы типа F_σ. Если предположить, что

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \subseteq E_\Phi$$

и

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- = (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \cap E_\Phi,$$

то $(\overset{*}{L}_\Phi)_-$ было бы множеством типа F_σ, а значит, и типа $G_{\delta\sigma}$.

Докажем достаточность условий. Пусть

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \neq (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge,$$

и если $(\overset{*}{L}_\Phi)_- \subseteq E_\Phi$, то

$$(\overset{*}{L}_\Phi)_- \neq (\overset{*}{L}_\Phi)^\wedge \cap E_\Phi.$$

Покажем, что $(\overset{*}{L}_\Phi)_-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве $\overset{*}{L}_\Phi$.

1-й случай. Пусть $(\overset{*}{L}_\Phi)_- \cap (\overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi) \neq 0$. Тогда существует функция $f \in \overset{*}{L}_\Phi \setminus E_\Phi$ с рядом Фурье (1), для которой последовательность

$\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится в смысле метрики пространства L_Φ^*. Возьмем функцию $\varphi = \bar{f}$. Имеем:

$$\varphi \in E_\Phi, \quad \bar{\varphi} = -\left(f - \frac{a_0}{2}\right) \notin E_\Phi.$$

Так как $\bar{\varphi} \in L_\Phi^* \setminus E_\Phi$, то последовательность $\{\bar{s}_n(\varphi)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не может сходиться в смысле метрики пространства L_Φ^*.

Покажем, что последовательность $\{\|\bar{s}_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Имеем:

$$\bar{\sigma}_n(\varphi) - \bar{s}_n(\varphi) = \frac{\bar{s}_n'(\varphi)}{n+1}$$

[см. ([2]), § 7.31]. Так как $\varphi = \bar{f}$ и $f \in (L_\Phi^*)_-$, то последовательность $\{\|s_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена,

$$\|s_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*} \leqslant M_2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(ибо $s_n(\varphi) = s_n(\bar{f}) = \bar{s}_n(f)$ и $\{\bar{s}_n(f)\}$ сходится в смысле метрики пространства L_Φ^*). Далее,

$$\bar{\sigma}_n(\varphi) = \sigma_n(\bar{\varphi}) = -\left[\sigma_n(f) - \frac{a_0}{2}\right], \quad \|\sigma_n(f)\|_{L_\Phi^*} \leqslant \|f\|_{L_\Phi^*}.$$

Кроме того,

$$\|s_n'(\varphi)\|_{L_\Phi^*} \leqslant 2n \|s_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*}$$

[см. ([9])]. Из неравенства

$$\|\bar{s}_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*} \leqslant \|\bar{\sigma}_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*} + (n+1)^{-1} \|\bar{s}_n'(\varphi)\|_{L_\Phi^*}$$

получаем, что последовательность

$$\{\|\bar{s}_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*}\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ограничена.

Из существования функции $\varphi \in E_\Phi$, для которой последовательность $\{\|\bar{s}_n(\varphi)\|_{L_\Phi^*}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена и $\{\bar{s}_n(\varphi)\}$ не сходится в смысле метрики пространства L_Φ^*, можно вывести, что множество $(L_\Phi^*)_-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L_Φ^* (рассуждение аналогично доказательству п.2а) теоремы 1 для множества C_-).

2-й с л у ч а й. Пусть $(L_\Phi^*)_- \cap (L_\Phi^* \setminus E_\Phi) = 0$. Иначе говоря, пусть

$$(L_\Phi^*)_- \subseteq E_\Phi.$$

Тогда, по предположению,

$$(L_\Phi^*)_- \neq (L_\Phi^*)^\wedge \cap E_\Phi.$$

Так как

$$(L_\Phi^*)_- \subseteq (L_\Phi^*)^\wedge,$$

то существует функция $f \in (L_\Phi^*)^\wedge \cap E_\Phi$ такая, что $f \notin (L_\Phi^*)_-$. Отсюда, так же как и в 1-м случае, заключаем, что множество $(L_\Phi^*)_-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L_Φ^*.

Теорема доказана.

В заключение рассмотрим пример к теоремам 7 и 8.

Пусть

$$\Phi(u) = e^{|u|} - |u| - 1.$$

Покажем, что множества $(L_\Phi^*)^-$ и $(L_\Phi^*)_-$ не будут множествами типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L_Φ^*.

Возьмем функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx.$$

Имеем: $f \in L_\infty$ и, значит, $f \in E_\Phi$. Рассмотрим сопряженную функцию

$$\bar{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} - n^{-1} \cos nx.$$

Для нее $|\bar{f}(x)| \sim \ln \frac{1}{x}$ при $x \to 0+$ [см. ([2]), § 7.6, 9]. Значит, при некотором постоянном $a > 0$ и всех достаточно малых x, $0 < x < x_0 < 1$,

$$|\bar{f}(x)| > a \ln \frac{1}{x}.$$

Следовательно, для этих x и при некотором постоянном $k > 0$

$$|k\bar{f}(x)| > ak \ln \frac{1}{x}, \qquad e^{k|\bar{f}(x)|} > \frac{1}{x^{ak}}.$$

Таким образом, если $ak \geqslant 1$, то

$$\int_0^{2\pi} e^{k|\bar{f}(x)|}\, dx = \infty.$$

Но, как известно,

$$\int_0^{2\pi} e^{k|\bar{f}(x)|}\, dx < \infty,$$

если $k < 1$ [см ([2]), § 7.6, 3]. В силу предыдущего, при $k < 1$

$$\int_0^{2\pi} \Phi[k\bar{f}(x)]\, dx = \int_0^{2\pi} e^{k|\bar{f}(x)|}\, dx - k\int_0^{2\pi} |\bar{f}(x)|\, dx - 2\pi < \infty,$$

а при $ak \geqslant 1$

$$\int_0^{2\pi} \Phi[k\bar{f}(x)]\, dx = \infty.$$

Значит, $f \in E_\Phi$, $\bar{f} \in L_\Phi^* \setminus E_\Phi$. Из доказательства утверждения 3 теоремы 7 следует, что множество $(L_\Phi^*)^-$ не будет множеством типа $G_{\delta\sigma}$ в пространстве L_Φ^*.

Покажем теперь, что $(L_\Phi^*)_-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в L_Φ^*. Возьмем ту же функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sin nx.$$

Имеем: $f \in E_\Phi$, $\{\bar{s}_n(f)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не сходится в смысле метрики пространства L_Φ^* (ибо $\bar{f} \notin E_\Phi$). Покажем, что последовательность

$\{\|\bar{s}_n(f)\|_{L^*_\Phi}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Известно, что при $k < \frac{1}{2}$

$$\int_0^{2\pi} e^{k|\bar{f}(x) - \bar{s}_n(x, f)|}\, dx \leqslant M_3$$

[см. (2), § 7.6, 3]. Отсюда вытекает, что

$$\int_0^{2\pi} \Phi\,[k|\bar{f}(x) - \bar{s}_n(x; f)|]\, dx \leqslant M_4 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Далее выводим, что

$$\|k|\bar{f} - \bar{s}_n(f)|\|_{L^*_\Phi} \leqslant M_4 + 1; \quad \|\bar{f} - \bar{s}_n(f)\|_{L^*_\Phi} \leqslant \frac{M_4 + 1}{k},$$

$$\|\bar{s}_n(f)\|_{L^*_\Phi} \leqslant \|\bar{f}\|_{L^*_\Phi} + \frac{M_4 + 1}{k} = M_5 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из существования функции f с указанными свойствами следует, что множество $(L^*_\Phi)_-$ не будет типа $G_{\delta\sigma}$ в L^*_Φ (см. доказательство утверждения 3 теоремы 8).

Поступило
21. III. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958.
[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
[3] Banach S., Mazur S., Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearer Operationen, Studia math., 4 (1933), 90—94.
[4] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952.
[5] Mazur S., Sternbach L., Über die Borelschen Typen von linearen Mengen, Studia math., 4 (1933), 48—53.
[6] Kaczmarz S., Une remarque sur les séries, Studia math., 3 (1931), 95—100.
[7] Лозинский С. М., О сильной сходимости рядов Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 51, № 1 (1946), 7—10.
[8] Lozinski S., On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes, Матем. сборн., 14(56) : 3 (1944), 175—268.
[9] Quade E. S., Trigonometric approximation in the mean, Duke Math. J., 3, № 3 (1937), 529—543.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 671—684

Е. С. ЛЯПИН

СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ

В упорядоченной полугруппе рассматриваются такие системы соотношений предшествования, которые полностью определяют упорядоченность. Вопрос о таких системах исследуется для упорядоченных групп и для полугрупп частичных преобразований.

§ 1. Исходные понятия

1.1. В настоящей работе будут рассмотрены некоторые свойства упорядоченных полугрупп.

Говоря об упорядоченности, мы, в согласии с Бурбаки ([1]), будем иметь в виду понятие, которое чаще называют частичной упорядоченностью ([2]). Упорядоченные полугруппы уже не раз служили объектом различных исследований. Причина этого заключается как в естественности аксиоматики, так и в том, что во многих случаях, когда возникает необходимость рассмотрения тех или иных полугрупп, в них естественным образом обнаруживается отношение упорядоченности, игнорировать которое бывает либо нецелесообразно, либо просто невозможно. Важнейший пример этого дают полугруппы частичных преобразований.

Отношение упорядоченности в произвольном множестве задается системой соотношений предшествования, которая в общем случае может быть трудно обозрима. Однако если это отношение задано в полугруппе и согласовано с ее умножением, то часто бывает возможным выделить такое подмножество из множества всех соотношений предшествования, которое вполне определяет упорядоченность. Рассмотрение соответствующего понятия в общем виде и применение его к некоторым частным случаям и является задачей настоящей работы.

1.2. Определение. *Упорядоченной полугруппой* называется непустое множество $\mathfrak{A}$, в котором определены бинарное ассоциативное действие (называемое в дальнейшем умножением) и отношение упорядоченности (для обозначения которого будем применять знак $\leqslant$ и термины «предшествовать» и «следовать»). При этом для любых $A, B, X \in \mathfrak{A}$, таких, что $A \leqslant B$, имеют место соотношения:

$$AX \leqslant BX, \quad XA \leqslant XB.$$

1.3. «Обычную полугруппу», т. е. множество с бинарным ассоциативным действием, можно рассматривать как частный случай упорядоченной полугруппы, упорядоченность в которой тривиальна, т. е. условие $A \leqslant B$ имеет место лишь при $A = B$.

Необходимые для дальнейшего сведения об обычных полугруппах можно найти в работе (3).

1.4. Будем говорить, что некоторый знак X является *пустым символом*, если при чтении всякой формулы, в которую он входит, его следует мысленно выбросить. Запись $X \dot{\in} \mathfrak{M}$ будет обозначать, что X является или элементом некоторого множества $\mathfrak{M}$, или пустым символом.

1.5. Если в упорядоченной полугруппе $\mathfrak{A}$ элемент A предшествует элементу B, то условие этого $A \leqslant B$ назовем *соотношением предшествования*.

1.6. Определение. Пусть в упорядоченной полугруппе $\mathfrak{A}$ даны два соотношения предшествования σ_1 и σ_2:

$$A_1 \leqslant B_1, \quad A_2 \leqslant B_2.$$

Будем говорить, что σ_2 есть *непосредственное следствие* из σ_1, если при некоторых $U, V \dot{\in} \mathfrak{A}$ имеют место равенства:

$$A_2 = UA_1V, \quad B_2 = UB_1V.$$

Соотношение предшествования $A \leqslant B$ будем называть *следствием* из некоторой совокупности соотношений предшествования Φ, если $A = B$ или если в $\mathfrak{A}$ найдутся такие элементы

$$S_1 = A \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_{m-1} \leqslant S_m = B,$$

что каждое из соотношений $S_i \leqslant S_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ является непосредственным следствием какого-нибудь соотношения из Φ.

1.7. Отметим следующие очевидные свойства введенных понятий

(α) Для совокупности соотношений предшествования

$$A_1 \leqslant B_1, \quad A_2 \leqslant B_2, \ldots, A_n \leqslant B_n$$

соотношение

$$A_1A_2 \ldots A_n \leqslant B_1B_2 \ldots B_n$$

является следствием из этой совокупности.

(β) Если соотношения предшествования

$$R_1 \leqslant R_2, \quad R_2 \leqslant R_3, \ldots, R_{n-1} \leqslant R_n$$

все являются следствиями из некоторой совокупности соотношений предшествования Φ, то и соотношение $R_1 \leqslant R_n$ является следствием из Φ.

(γ) Если $A \neq B$, то при выборе для $A \leqslant B$ последовательности элементов $S_1, S_2, \ldots, S_m$, указанной в 1.6, всегда можно ограничиться случаем $S_i \neq S_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.

(δ) Следствиями из пустой совокупности соотношений предшествования являются все соотношения равенства $A = A$ $(A \in \mathfrak{A})$ и только они.

1.8. Наличие той или иной нетривиальной упорядоченности в полугруппе часто оказывает существенное влияние и на свойства, относящиеся только к умножению. Известно, например, что в полугруппах из выполнения закона идемпотентности для всех элементов, вообще говоря, отнюдь не вытекает закон коммутативности. Существуют некоммутативные полугруппы, все элементы которых идемпотентны. Среди таких по-

лугрупп имеются и обладающие единицей (т. е. элементом E таким, что равенства $EX = XE = X$ имеют место для всякого элемента X полугруппы).

1.9. В упорядоченных полугруппах единица нередко играет особую роль и в отношении упорядоченности. Часто она или предшествует всем элементам, или же, наоборот, следует за всеми элементами [см. (2) гл. XIII]. Как мы увидим, в классе таких упорядоченных полугрупп из идемпотентности всех элементов вытекает свойство коммутативности.

1.10. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть упорядоченная полугруппа с единицей E и I — некоторый идемпотент.*

Если в $\mathfrak{A}$ выполнены соотношения

$$E \leqslant X_1, \quad E \leqslant X_2, \ldots, E \leqslant X_n,$$
$$X_1X_2 \ldots X_n \leqslant I \quad (X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{A}),$$

то из их совокупности Ф вытекает следствие:

$$X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_n} \leqslant I,$$

где $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ суть те же $X_1, X_2, \ldots, X_n$, но только в другом произвольном порядке.

Если в $\mathfrak{A}$ выполнены соотношения

$$E \geqslant X_1, \quad E \geqslant X_2, \ldots, E \geqslant X_n, \quad X_1X_2 \ldots X_n \geqslant I,$$

то из их совокупности вытекает следствие:

$$X_{i_1}X_{i_2} \ldots X_{i_n} \geqslant I.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы (второе доказывается совершенно аналогично).

Так как

$$X_{k+1}X_k = EX_{k+1}EE \ldots EX_kE,$$

то следствием из Ф является соотношение

$$X_{k+1}X_k \leqslant X_kX_{k+1} \ldots X_nX_1X_2 \ldots X_kX_{k+1}.$$

Поэтому следствием будет и соотношение

$$X_1 \ldots X_{k-1}X_{k+1}X_kX_{k+2} \ldots X_n \leqslant X_1X_2 \ldots X_nX_1X_2 \ldots X_n.$$

Так как имеет место следствие из Ф:

$$X_1X_2 \ldots X_nX_1X_2 \ldots X_n \leqslant II$$

и так как $I^2 = I$, то получаем следствие из Ф:

$$X_1X_2 \ldots X_{k-1}X_{k+1}X_kX_{k+2} \ldots X_n \leqslant I.$$

Мы показали, что перестановка двух соседних множителей в левой части соотношения $X_1X_2 \ldots X_n \leqslant I$ приводит к соотношению, являющемуся следствием из Ф. Отсюда вытекает, что и соотношение, получающееся путем произвольной перестановки множителей в произведении $X_1X_2 \ldots X_n$, является следствием из Ф.

1.11. Следствие. *Пусть все элементы упорядоченной полугруппы $\mathfrak{A}$ идемпотентны и $\mathfrak{A}$ обладает единицей E. Тогда как в случае, когда E предшествует всем элементам $\mathfrak{A}$, так и в случае, когда E следует за всеми элементами из $\mathfrak{A}$, полугруппа $\mathfrak{A}$ коммутативна.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай, когда E предшествует всем элементам из $\mathfrak{A}$ (второй случай доказывается аналогично). Пусть $A, B \in \mathfrak{A}$. Применив теорему 1.10 для $AB \leqslant I$, где $I = AB$, получаем:

$$BA \leqslant I.$$

Применив теорему 1.10 для $BA \leqslant I'$, где $I' = BA$, находим:

$$AB \leqslant I'.$$

Отсюда вытекает, что $AB = BA$.

1.12. Для подмножества $\mathfrak{K}$ полугруппы $\mathfrak{A}$ обозначаем через $[\mathfrak{K}]$ множество всех элементов, представимых в виде произведений нескольких элементов, принадлежащих $\mathfrak{K}$ (в том числе и всякий элемент K из $\mathfrak{K}$ входит в $[\mathfrak{K}]$, ибо K рассматривается как «произведение», состоящее из одного множителя). $[\mathfrak{K}]$ называется подполугруппой, порожденной $\mathfrak{K}$, а само $\mathfrak{K}$ — порождающим множеством для $[\mathfrak{K}]$.

1.13. Очевидно, для коммутативности полугруппы достаточно выполнение равенства $XY = YX$ для всех элементов некоторого порождающего множества самой полугруппы. Поэтому, как легко видеть, в формулировке следствия 1.11 вместо требования идемпотентности для всех элементов полугруппы можно ограничиться условием $(XY)^2 = XY$ для всех пар X, Y элементов какого-либо порождающего множества $\mathfrak{A}$.

1.14. Определение. Если Φ есть такая совокупность соотношений предшествования в упорядоченной полугруппе $\mathfrak{A}$, что всякое соотношение предшествования в $\mathfrak{A}$ является следствием из Φ, то Φ называется *совокупностью, определяющей упорядоченность в* Φ.

Если никакое собственное подмножество Φ уже не является совокупностью, определяющей упорядоченность, то Φ называется *минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность.*

1.15. В качестве примера рассмотрим аддитивную полугруппу всех натуральных чисел, упорядоченность в которой есть отношение сравнения по величине.

Так как $n \leqslant n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, очевидно, есть непосредственное следствие из соотношения $1 \leqslant 2$, то совокупность, состоящая из одного соотношения $1 \leqslant 2$, определяет упорядоченность в нашей полугруппе. Легко видеть, что это единственная минимальная совокупность, определяющая упорядоченность.

1.16. В качестве другого примера возьмем мультипликативную полугруппу всех натуральных чисел, полагая $n \leqslant m$, если n есть делитель m. Легко видеть, что совокупность, состоящая из всех соотношений вида $1 \leqslant p$, где p — всевозможные простые числа, определяет упорядоченность в полугруппе. Она минимальна, причем других минимальных совокупностей, определяющих упорядоченность, полугруппа не имеет

1.17. Очевидно, всякая совокупность соотношений предшествования, содержащая в качестве своего подмножества некоторую минимальную совокупность, определяющую упорядоченность в данной упорядоченной полугруппе, сама определяет упорядоченность.

Для некоторых полугрупп имеет место и обратное утверждение:

Всякая совокупность, определяющая упорядоченность, содержит в качестве своего подмножества некоторую такую минимальную совокупность. В этом случае выяснение всех минимальных совокупностей, определяющих упорядоченность, описывает все совокупности, определяющие упорядоченность.

1.18. К упомянутому в 1.17 случаю относятся, очевидно, все конечные упорядоченные полугруппы.

Если упорядоченная полугруппа обладает определяющей упорядоченность минимальной совокупностью, состоящей из соотношений, каждое из которых не является непосредственным следствием никакого отличного от него самого соотношения, то мы опять имеем указанный случай.

Если упорядоченная полугруппа обладает конечной совокупностью Φ, *определяющей упорядоченность, то всякая совокупность* Ψ, *определяющая упорядоченность, содержит в качестве своего подмножества некоторую конечную минимальную совокупность, определяющую упорядоченность.*

Действительно, каждое из соотношений, принадлежащих Φ, является следствием некоторой конечной совокупности соотношений, принадлежащих Ψ. Следовательно, Ψ в качестве своего подмножества содержит конечную совокупность Ψ′ такую, что все соотношения из Φ являются следствием из Ψ′. Тем самым Ψ′ определяет упорядоченность в данной упорядоченной полугруппе. Если Ψ′ не минимальна, то, отбрасывая одно за другим некоторые соотношения из Ψ′, можно получить уже минимальную совокупность, принадлежащую Ψ.

1.19. Оба примера 1.15 и 1.16, как легко видеть, относятся к случаю, рассмотренному в 1.17 и в 1.18.

§ 2. Соотношения, определяющие упорядоченность в группах

2.1. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая упорядоченная группа, E — ее единица. Всякому соотношению предшествования σ в $\mathfrak{G}$:

$$X \leqslant Y \quad (X, Y \in \mathfrak{G})$$

сопоставим «приведенное справа» соотношение предшествования σ′:

$$E \leqslant YX^{-1}.$$

Как легко видеть, σ′ есть непосредственное следствие из σ, а само σ, в свою очередь, является непосредственным следствием из σ′.

2.2. Пусть $\Phi=\{\sigma\}$ — некоторая совокупность соотношений предшествования в $\mathfrak{G}$ и $\Phi'=\{\sigma'\}$ — совокупность соотношений предшествования, соответствующих им в смысле 2.1. Из 2.1 вытекает, что Φ будет совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$, тогда и только тогда, когда Φ′ является совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$.

2.3. Если Φ есть минимальная совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{G}$, то, очевидно, и Φ' будет минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$.

2.4. Обратное предложение к 2.3, вообще говоря, не справедливо. Дело в том, что если в совокупности Φ, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$, найдутся два таких соотношения σ_1 и σ_2, что $\sigma_1 \neq \sigma_2$, но $\sigma_1' = \sigma_2'$, то Φ не будет минимальной. Действительно, пусть Φ_1 есть подмножество Φ, состоящее из всех соотношений, входящих в Φ, за исключением σ_1. Так как $\Phi_1' = \Phi'$, то Φ_1, согласно 2.2, является совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$.

Если же в Φ для всяких $\sigma_1, \sigma_2 \in \Phi$ ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) имеет место неравенство $\sigma_1' \neq \sigma_2'$, то из минимальности Φ' вытекает минимальность и совокупности Φ. Действительно, если бы Φ не была минимальной, то некоторое ее собственное подмножество Φ_2 явилось бы совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$. Но тогда Φ_2' было бы собственным подмножеством Φ', являющимся совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}$.

2.5. Пусть $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{K}^*$ совокупность всех элементов из $\mathfrak{G}$, сопряженных в $\mathfrak{G}$ с некоторыми элементами из $\mathfrak{K}$.

2.6. Совокупности всех элементов X из $\mathfrak{G}$, следующих за E, но отличных от E (т. е. $E < X$), обозначим через $\mathfrak{G}^+$.

2.7. Для всех $X \subset \mathfrak{G}$ и $Z \in \mathfrak{G}^+$ из неравенства $Z \geqslant E$ непосредственно следует, что

$$X^{-1}ZX \in \mathfrak{G}^+.$$

Отсюда вытекает, что для всякого $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}^+$

$$[\mathfrak{K}^*] \subset \mathfrak{G}^+.$$

2.8. Если $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}^+$, то совокупность всех соотношений предшествования, имеющих вид

$$E \leqslant K \quad (K \in \mathfrak{K}),$$

будем обозначать через $\Phi_{\mathfrak{K}}$.

2.9. ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}^+$. *Для того чтобы* $\Phi_{\mathfrak{K}}$ *была совокупностью, определяющей упорядоченность в* $\mathfrak{G}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $[\mathfrak{K}^*] = \mathfrak{G}^+$.

Доказательство. 1) Пусть $\Phi_{\mathfrak{K}}$ есть совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{G}$, и пусть Z есть произвольный элемент из $\mathfrak{G}^+$. Соотношение $E \leqslant Z$ является следствием из $\Phi_{\mathfrak{K}}$. Это означает, что существует конечная последовательность элементов

$$E = X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots \leqslant X_{m-1} \leqslant X_m = Z$$

такая, что $X_i \neq X_{i+1}$ и соотношение $X_i \leqslant X_{i+1}$ является непосредственным следствием из $\Phi_{\mathfrak{K}}$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$).

Предположим, что $Z \bar{\in} [\mathfrak{K}^*]$. Пусть X_s — первый из элементов X_2, $X_3, \ldots, X_m$, не принадлежащих $[\mathfrak{K}^*]$.

Так как $X_{s-1} \leqslant X_s$ есть непосредственное следствие из $\Phi_{\mathfrak{K}}$, то при некоторых A, $B \in \mathfrak{G}$ и $K \in \mathfrak{K}$ мы имеем

$$X_{s-1} = AEB, \quad X_s = AKB,$$

$$X_s = AB \cdot B^{-1}KB.$$

При $s = 2$ получаем:

$$X_s = B^{-1}KB \in [\mathfrak{K}^*].$$

При $s > 2$

$$AB = AEB = X_{s-1} \in [\mathfrak{K}^*],$$

что, совместно с $B^{-1}KB \in [\mathfrak{K}^*]$, приводит к противоречию:

$$X_s \in [\mathfrak{K}^*].$$

Мы доказали, что $\mathfrak{G}^+ \subset [\mathfrak{K}^*]$. Учитывая 2.7, отсюда находим:

$$\mathfrak{G}^+ = [\mathfrak{K}^*].$$

2) Пусть $[\mathfrak{K}^*] = \mathfrak{G}^+$. Для произвольного элемента Z из $\mathfrak{G}^+$ имеем:

$$Z = Y_1 Y_2 \ldots Y_m \quad (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \in \mathfrak{K}^*).$$

При некоторых $S_i \in \mathfrak{G}$ и $K_i \in \mathfrak{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ должно выполняться равенство

$$Y_i = S_i^{-1} K_i S_i.$$

Соотношение $E \leqslant K_i$ принадлежит $\Phi_{\mathfrak{K}}$. Соотношение

$$E \leqslant S_i^{-1} K_i S_i,$$

т. е. $E \leqslant Y_i$, является непосредственным следствием из него, а потому следствием из $\Phi_{\mathfrak{K}}$. Отсюда, согласно 1.7, следует, что соотношение

$$E \leqslant Y_1 Y_2 \ldots Y_m,$$

т. е. $E \leqslant Z$, есть следствие из $\Phi_{\mathfrak{K}}$.

2.10. Так как в коммутативной группе $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}$ для любого $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}$, то условие 2.9 соответственно упрощается.

Следствие. *В коммутативной упорядоченной группе $\mathfrak{G}$ для $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{G}^+$ совокупность $\Phi_{\mathfrak{K}}$ является определяющей тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{K}] = \mathfrak{G}^+$.

2.11. Этот частный случай интересен тем, что в нем условие того, является ли совокупность $\Phi_{\mathfrak{K}}$ определяющей упорядоченность, целиком определяется только полугруппой $\mathfrak{G}^+$. Конечно, это представляет определенное принципиальное преимущество по сравнению с формулировкой в общем случае, где переход от $\mathfrak{K}$ к $\mathfrak{K}^*$ существенно зависит от свойств $\mathfrak{K}$ как подмножества всей группы $\mathfrak{G}$.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли изменить в подобном духе и общий критерий. Приводимый ниже пример показывает, что это невозможно.

2.12. Обозначим через Γ множество всех комплексных чисел. Для $z = a + bi \in \Gamma$ будем обозначать

$$\operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b.$$

Для всякого $t \in \Gamma$ определим комплексные функции P_t и Q_t, заданные на всем Γ:

$$P_t z = z + t, \quad Q_t z = i\bar{z} + t.$$

Введем обозначения: $\mathfrak{G}_1$ — совокупность всех функций P_t и Q_t, $\mathfrak{G}_2$ — совокупность всех функций P_t, $\mathfrak{H}$ — совокупность всех тех функций P_t, у которых

$$\mathrm{Re}\,(t) \geqslant 0, \quad \mathrm{Im}\,(t) \geqslant 0, \quad \mathrm{Re}\,(t) + \mathrm{Im}\,(t) > 0,$$

$\mathfrak{K}_1$ — совокупность всех тех функций P_t, у которых

$$\mathrm{Re}\,(t) > 0, \quad \mathrm{Im}\,(t) = 0,$$

$\mathfrak{K}_2$ — совокупность всех тех функций P_t, у которых

$$\mathrm{Re}\,(t) = 0, \quad \mathrm{Im}\,(t) > 0.$$

Для этих функций в качестве действия умножения рассмотрим суперпозицию ($F_1F_2 = F_3$, если $F_1\,(F_2z) = F_3z$, при всех $z \in \Gamma$). Относительно этого действия $\mathfrak{G}_1$, очевидно, является группой. Ее единицей является P_0. Обратным элементом для P_t является P_{-t} и для Q_t—элемент $Q_{-i\bar{t}}$. Подмножество $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}_1$ является полугруппой, не содержит P_0 и, как легко убедиться, при любом $X \in \mathfrak{G}_1$ удовлетворяет условию:

$$X^{-1}\,\mathfrak{H}X = \mathfrak{H}.$$

Как известно [см., например, (4)], отсюда следует, что в $\mathfrak{G}_1$ может быть единственным образом введено упорядочение, при котором $\mathfrak{G}_1$ превращается в такую упорядоченную группу, что $\mathfrak{G}_1^+ = \mathfrak{H}$. Тем самым и $\mathfrak{G}_2$ одновременно превращается в упорядоченную группу, у которой $\mathfrak{G}_2^+ = \mathfrak{H}$.

Так как при всяком вещественном $c > 0$ для любого $z \in \Gamma$ имеем

$$Q_0^{-1}P_cQ_0z = Q_0P_cQ_0z = Q_0P_c\,(i\bar{z}) = Q_0\,(i\bar{z} + c) = z + ic,$$

то

$$Q_0^{-1}P_cQ_0 = P_{ic} \quad (P_c \in \mathfrak{K}_1, \quad P_{ic} \in \mathfrak{K}_2).$$

Отсюда вытекает, что в $\mathfrak{G}_1$

$$[\mathfrak{K}_1^*] \supset \mathfrak{K}_2.$$

Так как, к тому же,

$$\mathfrak{H} \supset [\mathfrak{K}_1^*], \quad \mathfrak{H} = [\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2],$$

то в $\mathfrak{G}_1$ имеем:

$$\mathfrak{G}_1^+ = \mathfrak{H} = [\mathfrak{K}_1^*].$$

Согласно 2.9, это означает, что $\Phi_{\mathfrak{K}_1}$ есть совокупность, определяющая упорядоченность в упорядоченной группе $\mathfrak{G}_1$. В то же время в коммутативной упорядоченной группе $\mathfrak{G}_2$

$$[\mathfrak{K}_1] = \mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_2^+.$$

Поэтому для $\mathfrak{G}_2$ совокупность $\Phi_{\mathfrak{K}_1}$, согласно 2.10, не является совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{G}_2$.

Таким образом, оказалось, что в двух упорядоченных группах $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, у которых $\mathfrak{G}_1^+ = \mathfrak{G}_2^+ = \mathfrak{H}$, одно и то же множество соотношений $\Phi_{\mathfrak{K}_1}$

играет разную роль. В одной группе оно является совокупностью, определяющей упорядоченность, а в другой не является. Так как $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{H}$, то это и подтверждает сказанное в 2.11.

§ 3. Соотношения, определяющие упорядоченность частичных преобразований

3.1. Пусть Ω есть произвольное непустое множество. *Частичным преобразованием* X множества Ω называется отображение некоторого множества $\Pi_1 X \subset \Omega$ на множество $\Pi_2 X \subset \Omega$ (в частности, $\Pi_1 X$ и $\Pi_2 X$ могут быть и пустыми). Совокупность всех частичных преобразований множества Ω обозначим через $\mathfrak{P}_\Omega$. В $\mathfrak{P}_\Omega$ определено действие умножения. Именно,

$$XY = Z \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{P}_\Omega),$$

если $\Pi_1 Z$ состоит из всех таких $\xi \in \Pi_1 Y$, для которых $Y\xi \in \Pi_1 X$, причем для каждого из этих ξ должно выполняться равенство

$$Z\xi = X(Y\xi).$$

В $\mathfrak{P}_\Omega$ определено также и отношение упорядоченности, согласно которому

$$X \leqslant Y \quad (X, Y \in \mathfrak{P}_\Omega),$$

если $\Pi_1 X \subset \Pi_1 Y$ и $X\xi = Y\xi$ для всякого $\xi \in \Pi_1 X$.

Как известно [см., например, ([3])], указанные действия и упорядоченность таковы, что относительно них $\mathfrak{P}_\Omega$ является упорядоченной полугруппой.

3.2. Имея целью выявить совокупности, определяющие упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$, рассмотрим сперва случай, когда Ω конечно. Количество элементов в Ω обозначим через n. Так как случай $n = 1$ тривиален, то будем читать, что $n > 1$.

Если $X \in \mathfrak{P}_\Omega$ и $\Pi_1 X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l\}$, причем $X\xi_i = \eta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, то X можно представить в виде несобственной подстановки

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_l \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_l \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отсутствие в верхней строчке подстановки какого-нибудь $\alpha \in \Omega$ означает, что $\alpha \overline{\in} \Pi_1 X$.

3.3. Рассмотрим два частичных преобразования:

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} \beta_n \end{pmatrix}, \quad G' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \\ \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\{\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n\} = \Omega.$$

ТЕОРЕМА. *При конечном Ω совокупность, состоящая из одного соотношения предшествования $G' \leqslant G$, является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$.*

Доказательство. Возьмем произвольное нетривиальное соотношение предшествования в $\mathfrak{P}_\Omega$:

$$X \leqslant Y,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \xi_{k+1} \ldots \xi_l \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \eta_{k+1} \ldots \eta_l \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant k < l).$$

Рассмотрим частичные преобразования:

$$U_s = \begin{pmatrix} \beta_{n-s+1} \beta_{n-s+2} \ldots \beta_n \\ \eta_1 \ \ldots \ \eta_2 \ \ldots \ \eta_s \end{pmatrix}, \quad V_s = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots \xi_s \\ \alpha_{n-s+1} & \alpha_{n-s+2} & \ldots \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$Z_s = \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \xi_{k+1} \ldots \xi_s \\ \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \eta_{k+1} \ldots \eta_s \end{pmatrix}$$

$$(s = k, k+1, \ldots, l).$$

Путем непосредственного перемножения можно убедиться в справедливости равенств:

$$Z_{s-1} = U_s G' V_s, \quad Z_s = U_s G V_s \quad (s = k+1, k+2, \ldots, l),$$

в силу которых соотношение

$$Z_{s-1} \leqslant Z_s \quad (s = k+1, k+2, \ldots, l)$$

оказывается непосредственным следствием из соотношения $G' \leqslant G$. Поскольку $Z_k = X$ и $Z_l = Y$, отсюда вытекает, что $X \leqslant Y$ есть следствие из $G' \leqslant G$.

В случае пустого частичного преобразования X, когда $\Pi_1 X = \theta$, рассуждения сохраняются, если считать $k = 0$.

Поскольку упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$ не тривиальна, совокупность, определяющая упорядоченность, если она состоит из одного соотношения, необходимо оказывается минимальной.

3.4. ТЕОРЕМА. *При конечном* Ω *всякая минимальная совокупность, определяющая упорядоченность в* $\mathfrak{P}_\Omega$, *имеет вид, указанный в* 3.3.

Доказательство. Пусть Φ — произвольная минимальная совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$. Возьмем какое-нибудь соотношение рассмотренного в 3.3 вида: $G' \leqslant G$. Оно должно являться следствием из Φ. Поэтому в $\mathfrak{P}_\Omega$ должны найтись не равные между собою частичные преобразования

$$T_1 = G', \ T_2, \ldots, T_{r-1}, \ T_r = G$$

такие, что соотношения

$$T_1 \leqslant T_2, \quad T_2 \leqslant T_3, \ldots, T_{r-1} \leqslant T_r$$

являются непосредственными следствиями из Φ. Согласно тому, как определена упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$, имеем:

$$\Pi_1 T_{i-1} \subset \Pi_1 T_i, \quad \Pi_1 T_{i-1} \neq \Pi_1 T_i \quad (i = 2, 3, \ldots, r).$$

Отсюда следует, что $r = 2$, т. е. соотношение $G' \leqslant G$ должно быть непосредственным следствием из Φ. Это означает, что Φ содержит соот-

ношение

$$H' \leqslant H$$

такое, что при некоторых $U, V \in \mathfrak{P}_\Omega$

$$G' = UH'V, \quad G = UHV. \qquad (*)$$

Из способа умножения частичных преобразований следует, что, поскольку

$$\Pi_1 G = \Pi_2 G = \Omega,$$

для выполнения второго из равенств (*) необходимо, чтобы

$$\Pi_1 U = \Pi_1 H = \Pi_1 V = \Pi_2 U = \Pi_2 H = \Pi_2 V = \Omega,$$

или U и V являются пустыми символами.

Но тогда для выполнения первого из равенств (*), если учесть, что $\Pi_1 G'$ состоит из всех элементов Ω, кроме одного, и $\Pi_2 G'$ состоит из всех элементов Ω, кроме одного, необходимо, чтобы и $\Pi_1 H'$ состояло из всех элементов Ω, кроме одного. Таким образом, оказывается, что соотношение $H' \leqslant H$, принадлежащее Φ, является соотношением того типа, который был рассмотрен в 3.3. Согласно 3.3, оно одно образует совокупность, определяющую упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$. Ввиду минимальности, Φ больше не может содержать никаких других соотношений.

3.5. В силу пп. 1.17 и 1.18, теоремы 3.3 и 3.4 описывают все совокупности, определяющие упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$, в случае конечного Ω.

3.6. Рассмотрим теперь случай, когда Ω бесконечно. Условимся мощность какого-либо множества Γ обозначать через $\mathfrak{m}(\Gamma)$.

ТЕОРЕМА. *При бесконечном Ω совокупность, состоящая из одного соотношения предшествования σ:*

$$H \leqslant F,$$

такого, что

$$\mathfrak{m}(\Pi_2 H) = \mathfrak{m}(\Pi_2 F \setminus \Pi_2 H) = \mathfrak{m}\Omega,$$

является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$.

Доказательство. 1) Возьмем в $\mathfrak{P}_\Omega$ произвольное нетривиальное соотношение предшествования τ:

$$P \leqslant Q$$

и покажем, что τ является непосредственным следствием соотношения σ, указанного в формулировке теоремы.

Для каждого $\xi \in \Pi_2 H$ фиксируем некоторый элемент $\xi' \in \Omega$ такой, что $H\xi' = \xi$. Совокупность всех таких ξ' обозначим через Γ'. Так как при $\xi_1 \neq \xi_2$, очевидно, $\xi_1' \neq \xi_2'$, то мощность Γ' равна мощности $\Pi_2 H$, т. е. равна $\mathfrak{m}(\Omega)$.

Аналогично, для каждого $\eta \in (\Pi_2 F \setminus \Pi_2 H)$ фиксируем элемент $\eta'' \in \Omega$ такой, что $F\eta'' = \eta$. Совокупность всех таких η'' обозначим через Γ''. Из

$$\mathfrak{m}(\Pi_2 F \setminus \Pi_2 H) = \mathfrak{m}(\Omega)$$

следует, что

$$\mathfrak{m}(\Gamma'') = \mathfrak{m}(\Omega).$$

Отметим, что $\Gamma' \subset \Pi_1 H$ и $\Gamma'' \subset (\Pi_1 F \setminus \Pi_1 H)$. Поэтому $\Gamma' \cap \Gamma'' = \theta$.

Пусть φ — некоторое взаимно однозначное отображение $\Pi_1 P$ в Γ' и ψ — взаимно однозначное отображение $(\Pi_1 Q \setminus \Pi_1 P)$ в Γ''.

Рассмотрим следующее частичное преобразование $V \in \mathfrak{P}_\Omega$:

$$\Pi_1 V = \Pi_1 Q,$$
$$V\alpha = \varphi(\alpha) \in \Gamma' \quad (\alpha \in \Pi_1 P),$$
$$V\beta = \psi(\beta) \in \Gamma'' \quad (\beta \in \Pi_1 Q \setminus \Pi_1 P).$$

Так как $\Gamma' \subset \Pi_1 H$, то для каждого $\alpha \in \Pi_1 P$ определен элемент $H(V\alpha) = F(V\alpha)$. Аналогично, так как $\Gamma'' \subset \Pi_1 F \setminus \Pi_1 H$, то для каждого $\beta \in \Pi_1 Q \setminus \Pi_1 P$ определен элемент $F(V\beta)$. При этом, согласно способу построения Γ', Γ'', V, для всех $\gamma_1 \neq \gamma_2$ $(\gamma_1, \gamma_2 \subset \Pi_1 Q)$ имеем:

$$F(V\gamma_1) \neq F(V\gamma_2).$$

Определим преобразование $U \in \mathfrak{P}_\Omega$, для которого $\Pi_1 U$ состоит из всех элементов Ω, имеющих вид $F(V\gamma)$ $(\gamma \in \Pi_1 Q)$. Так как каждый элемент из $\Pi_1 U$ записывается в таком виде лишь единственным способом, то будет однозначным определение:

$$U\{F(V\gamma)\} = Q\gamma.$$

Из самого построения U следует, что

$$UFV = Q.$$

Если $\gamma \in \Pi_1 P$, то

$$U\{H(V\gamma)\} = P\gamma.$$

Если же $\gamma \in \Pi_1 P \setminus \Pi_1 P$, то $V\gamma \in \Gamma''$, и так как $\Gamma'' \cap \Pi_1 H = \theta$, то $\gamma \,\overline{\in}\, \Pi_1 UHV$. Следовательно,

$$UHV = P.$$

Оказалось, что соотношение τ имеет вид:

$$UHV \leqslant UFV,$$

т. е. является следствием соотношения σ.

Следует отметить, что случай P, для которого $\Pi_1 P = \theta$, по существу, не выпадает из проведенных выше рассуждений.

Так как упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$ нетривиальна, то определяющая упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$ совокупность, состоящая из соотношения σ, является минимальной.

3.7. ТЕОРЕМА. *При бесконечном Ω всякая минимальная совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$, состоит из одного соотношения указанного в* 3.6 *вида.*

Доказательство. Пусть Φ — произвольная минимальная совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$. Предположим, что Φ не включает ни одного соотношения типа 3.6.

Возьмем некоторое соотношение предшествования σ:

$$R \leqslant S$$

такое, что

$$\mathfrak{m}(\Pi_2 R) = \mathfrak{m}(\Pi_2 S \setminus \Pi_2 R) = \mathfrak{m}(\Omega).$$

σ есть следствие Ф, поэтому существуют не равные между собою частичные преобразования

$$T_1 = R,\ T_2, \ldots, T_{l-1},\ T_l = S$$

такие, что соотношения:

$$T_1 \leqslant T_2,\quad T_2 \leqslant T_3, \ldots, T_{l-1} \leqslant T_l$$

являются непосредственными следствиями из Ф.

При некоторых $U_i, V_i \in \mathfrak{P}_\Omega$ имеем:

$$T_i = U_i H_i V_i,\quad T_{i+1} = U_i H_{i+1} V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1),$$

где $H_i \leqslant H_{i+1}$ есть соотношения из Ф. Согласно предположению, соотношение $H_i \leqslant H_{i+1}$ не является соотношением типа 3.6.

Предположим, что для некоторого $1 \leqslant j \leqslant l-1$

$$\mathfrak{m}(\Pi_1 H_j) < \mathfrak{m}(\Omega).$$

Так как

$$\mathfrak{m}(\Pi_2 T_i) \leqslant \mathfrak{m}(\Pi_2 T_{i+1}),\quad i = 1, 2, \ldots, j-1),$$
$$\mathfrak{m}(\Pi_2 T_j) \leqslant \mathfrak{m}(\Pi_2 H_j) \leqslant \mathfrak{m}(\Pi_1 H_j) < \mathfrak{m}(\Omega),$$

то получаем:

$$\mathfrak{m}(\Pi_2 R) = \mathfrak{m}(\Pi_2 T_1) < \mathfrak{m}(\Omega),$$

что противоречит выбору соотношения σ.

Таким образом, для всех $i = 1, 2, \ldots, l-1$ должно иметь место равенство

$$\mathfrak{m}(\Pi_1 H_i) = \mathfrak{m}(\Omega).$$

Рассмотрим множество Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$, состоящее из всех $\xi \in \Omega$ таких, что

$$\xi \in \Pi_2 T_{i+1} \setminus \Pi_2 T_i.$$

Так как соотношение $H_i \leqslant H_{i+1}$ не является соотношением типа 3.6, то мощность Γ_i должна быть меньше мощности Ω. Далее, так как

$$\Pi_2 T_1 \subset \Pi_2 T_2 \subset \ldots \subset \Pi_2 T_l,$$

то $\Pi_2 T_l \setminus \Pi_2 T_1$ является объединением множеств Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$ и, следовательно, также имеет мощность, меньшую мощности Ω. Но $T_1 = R$, $T_l = S$ и потому это противоречит выбору σ.

Мы показали, что совокупность Ф должна содержать некоторые соотношения предшествования типа 3.6. Но тогда Ф, являющаяся минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$, в силу 3.6 не будет содержать никаких других соотношений.

3.8. На основании 1.17 и 1.18, теоремы 3.6 и 3.7 описывают все совокупности, определяющие упорядоченность в $\mathfrak{P}_\Omega$ при бесконечном Ω.

3.9. Если в качестве множества Ω взять совокупность всех вещественных чисел, то частичные преобразования будут не чем иным, как различными вещественными функциями одного переменного. В этом случае предыдущие рассуждения настоящего параграфа приводят к соответствующим свойствам полугруппы всех вещественных функций, рассматриваемых относительно действия суперпозиции. Аналогичные свойства для подполугрупп этой полугруппы, состоящих из вещественных функций тех или иных частных классов, конечно, не могут быть выведены непосредственно из проведенных рассуждений и требуют самостоятельного рассмотрения. Такое исследование будет проведено в моей следующей статье «Соотношения, определяющие упорядоченность непрерывных функций».

Поступило
8. II. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бурбаки Н., Общая топология, Физматгиз, М., 1958.
[2] Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.
[3] Ляпин Е. С., Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.
[4] Шимбирева Е. П., К теории частично упорядоченных групп, Матем. сборн., 20 (62): 1 (1947), 145—178.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 685—716

Г. С. МАКАЕВА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ, СИСТЕМЫ «БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ» КОТОРЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫ

В работе дается асимптотика решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, для которой соответствующая система «быстрых движений» второго порядка и гамильтонова *.

1. Введение

Многие колебательные системы описываются дифференциальными уравнениями с малым параметром при производных:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_i &= X_i(x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l, \varepsilon), \quad i = 1, \ldots, k, \\ \dot{z}_j &= Z_j(x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l, \varepsilon), \quad j = 1, \ldots, l, \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

или, в векторной форме $x = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $z = \{z_1, \ldots, z_l\}$:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= X(x, z, \varepsilon), \\ \dot{z} &= Z(x, z, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{1.1'}$$

где ε — малый положительный параметр, x_i и z_j — неизвестные функции времени t, характеризующие данную систему.

В работах [1] — [5] находится асимптотика решений системы (1.1) в случае, когда при каждом z любое решение системы «быстрых движений» **

$$\varepsilon \dot{x} = X(x, z, 0) \quad (z = \text{const}) \tag{1.2}$$

при $t \to \infty$ приближается либо к устойчивому положению равновесия, либо к устойчивому предельному циклу.

---

* Данная работа является развернутым изложением работы автора [13]. Изучению той же задачи посвящены работы В. М. Волосова [14] и [15], в которых получен результат первой части теоремы работы [13].

Рассматриваемая в настоящей работе задача представляет интерес и для более общего случая, когда гамильтонова система «быстрых движений» (1.2) порядка $2n$. В этом случае В. М. Волосов в работе [16] получил при условии, что система (1.2) имеет только периодические решения, зависящие от $2n$ произвольных постоянных, асимптотику $2n$ независимых интегралов (1.2), соответствующих указанным решениям, и асимптотику z, а Д. В. Аносов [17] установил более общий результат — асимптотику функций H и z без частных предположений о наличии указанного типа периодических решений в системе (1.2).

** Ради упрощения формулировок системой «быстрых движений» для системы (1.1) будем называть систему

$$\varepsilon \dot{x} = X(x, z, 0),$$

в отличие от работы [13], где под системой «быстрых движений» понималась система

$$\varepsilon \dot{x} = X(x, z, \varepsilon).$$

Но возможны случаи, когда система «быстрых движений» (1.2) может не иметь асимптотически устойчивых положений равновесия и изолированных предельных циклов. Такова, например, гамильтонова система. Целью настоящей работы и является изучение этих случаев. Так, в § 2 с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ находится решение системы (1.1), для которой соответствующая система «быстрых движений» гамильтонова и $k = 2$, т. е. находится решение системы

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_l)}{\partial y} + \varepsilon X(x, y, z_1, \ldots, z_l, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_l)}{\partial x} + \varepsilon Y(x, y, z_1, \ldots, z_l, \varepsilon), \\ \dot{z}_j &= Z_j(x, y, z_1, \ldots, z_l, \varepsilon), \quad j = 1, \ldots, l. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Асимптотические формулы для решения этой системы находятся для области, где траектории соответствующей гамильтоновой системы «быстрых движений»

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon x' &= \frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_l)}{\partial y}, \\ \varepsilon y' &= -\frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_l)}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

при каждом векторе z замкнуты (в случае невырожденного центра в рассматриваемую область включается и сам центр). Метод исследования системы (1.3) таков: сначала рассматривается система «быстрых движений» (1.4), а затем система (1.3) после соответствующей замены переменных усредняется вдоль решений (1.4).

Оказывается, что уравнение

$$\mu \overset{(n)}{u} + Q(t, u, \dot{u}, \ldots, \overset{(n-2)}{u}) = \sqrt{\mu} F(t, u, \dot{u}, \ldots, \overset{(n-2)}{u}, \sqrt{\mu}\, \overset{(n-1)}{u}) \tag{1.5}$$

с малым параметром μ при старшей производной и с пропущенной в основном члене Q $(n-1)$-й производной, исследованное В. М. Волосовым (при $n = 2$ — в работе [12]), при $F = 0$ — в работах [8] — [11]) методом конечных разностей, является частным случаем системы (1.3). Поэтому результаты работ [8] — [12] (эти результаты сформулированы в § 3 настоящей работы) следуют из результатов § 2.

Метод построения решения уравнения (1.5) при $n = 2$ с любой наперед заданной точностью в случае, когда известно общее решение (в форме разложения в тригонометрический ряд Фурье) соответствующего невозмущенного уравнения

$$\mu \ddot{u} + Q(t, u) = 0,$$

был дан в работе [7] Ю. А. Митропольским.

Задача исследования системы (1.3) с точки зрения работ [1] — [4] и вывода из нее известных результатов В. М. Волосова [работы [8] — [12]] относительно уравнения (1.5) была поставлена Л. С. Понтрягиным в его

докладе на семинаре В. И. Смирнова в Ленинграде в середине апреля 1957 г.

Выражаю глубокую благодарность Л. С. Понтрягину за ценные указания, советы и постоянное внимание к настоящей работе.

§ 2. Асимптотическое поведение решений системы (1.3)

Система (1.3) в векторной форме имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon X(x, y, z, \varepsilon),\\ \varepsilon\frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon Y(x, y, z, \varepsilon),\\ \frac{dz}{dt} &= Z(x, y, z, \varepsilon) \quad (z = \{z_1, \ldots, z_l\}, \quad Z = \{Z_1, \ldots, Z_l\}),\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

или, в быстром времени $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon X(x, y, z, \varepsilon),\\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon Y(x, y, z, \varepsilon),\\ \frac{dz}{d\tau} &= \varepsilon Z(x, y, z, \varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{2.1'}$$

При $\varepsilon = 0$ система (2.1′) переходит в гамильтонову систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y},\\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x},\\ \frac{dz}{d\tau} &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

являющуюся системой «быстрых движений» для системы (2.1).

1. Изучение системы (2.2). Пусть функции

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}$$

определены и непрерывны вместе со всеми своими первыми частными производными в некоторой области $\widetilde{G}$ эвклидова пространства E_{2+l} переменных $x, y, z_1, \ldots, z_l$. Как известно, система (2.2) имеет первый интеграл

$$H(x, y, z) = h, \tag{2.3}$$

и (2.3) представляет собой семейство всех фазовых траекторий системы (2.2) на каждой плоскости $z = \text{const}$ области $\widetilde{G}$.

Возьмем некоторую точку $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})$ из $\widetilde{G}$, не являющуюся положением равновесия системы (2.2). По известной теореме существования и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, через эту точку пройдет только одна фазовая траектория системы

причем $\overset{0}{x} = \alpha(\overset{0}{h}, \overset{0}{z})$, $\overset{0}{y} = \beta(\overset{0}{h}, \overset{0}{z})$ и $\alpha(h, z)$, $\beta(h, z)$ являются однозначными функциями от $h, z_1, \ldots, z_l$, непрерывными по совокупности этих переменных вместе со всеми своими первыми частными производными. Следовательно, целые фазовые траектории системы (2.2), проходящие через точки $\{\alpha(h, z), \beta(h, z), z\}$ $((\alpha, \beta, z, h) \in \Gamma^0)$, составляют искомую окрестность G траектории (2.4).

Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \tilde{x}[\tau, \alpha(h, z), \beta(h, z), z], \\ y &= \tilde{y}[\tau, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

— решение системы (2.2) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{x}[0, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] &= \alpha(h, z), \\ \tilde{y}[0, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] &= \beta(h, z). \end{aligned} \qquad ((\alpha, \beta, z) \in G).$$

Решение (2.6) системы (2.2) является периодическим, поскольку описывает замкнутую траекторию (2.3). Обозначим его период через $T(h, z)$. Тогда, полагая $\varphi = \frac{\tau}{T(h, z)}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}[\tau, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] &= \tilde{x}[T(h, z)\varphi, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] = \\ &= \overset{*}{x}(\varphi, h, z), \\ \tilde{y}[\tau, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] &= \tilde{y}[T(h, z)\varphi, \alpha(h, z), \beta(h, z), z] = \\ &= \overset{*}{y}(\varphi, h, z), \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где функции $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ периодические по φ периода 1.

2. Изучение системы (2.1). Исследуем решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) с начальными условиями

$$x(t_0\varepsilon) = x_0, \quad y(t_0, \varepsilon) = y_0, \quad z(t_0, \varepsilon) = z_0$$
$$((x_0, y_0, z_0) \in G)$$

на конечном промежутке времени $[t_0, L]$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функции* $H(x, y, z)$, $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}$ *определены и непрерывны в* G *вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно, а функции* $X(x, y, z, \varepsilon)$, $Y(x, y, z, \varepsilon)$, $Z_1(x, y, z, \varepsilon), \ldots, Z_l(x, y, z, \varepsilon)$ *непрерывны в* G, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant a$ $(a > 0)$ *вместе со всеми своими первыми частными производными. Тогда существует число* $\varepsilon_0 > 0$ $(\varepsilon_0 \leqslant a)$ *такое, что при любом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на конечном промежутке времени* $[t_0, L]$:

1) *решение* $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ *системы* (2.1) *остается в* G *и функции* $h(t, \varepsilon)$, $z_1(t, \varepsilon), \ldots, z_l(t, \varepsilon)$ $(h(t, \varepsilon) = H[x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)])$ *с точностью до величин порядка* $O(\varepsilon)$ *совпадают соответственно с функциями* $\bar{h}(t)$, $\bar{z}_1(t), \ldots, \bar{z}_l(t)$, *представляющими собой решение следующей*

(2.2). Уравнение этой траектории запишется в виде:

$$H(x, y, \overset{0}{z}) = \overset{0}{h} \quad (\overset{0}{h} = H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})) \tag{2.4}$$

(см. (2.3)).

Докажем следующее утверждение.

Пусть траектория (2.4) *замкнута и целиком лежит внутри области* $\tilde{G}$. *Тогда в пространстве* E_{2+l} *существует некоторая окрестность* G *этой траектории* (2.4) *такая, что*

1) *фазовые траектории системы* (2.2), *проходящие через точки* G, *замкнуты и целиком лежат в* G;

2) *уравнение* (2.3) *при каждой паре* (h, z) *определяет одну и только одну фазовую траекторию системы* (2.2), *расположенную в* G;

3) *на каждой фазовой траектории* (2.3) *системы* (2.2), *лежащей в* G, *можно выбрать по одной точке* $\{\alpha(h, z), \beta(h, z), z\}$, *гладко зависящей от* h, z.

В самом деле, в силу известных свойств гамильтоновой системы, в пространстве E_{2+l} существует некоторая окрестность $\tilde{\tilde{G}}$ траектории (2.4) ($\tilde{\tilde{G}} \subset \tilde{G}$), в которой выполняется условие 1). Выделим из $\tilde{\tilde{G}}$ ту окрестность траектории (2.4), в которой выполняются и условия 2), 3). Для этого возьмем поверхность, пересекающую каждую плоскость $z = \text{const}$ области $\tilde{\tilde{G}}$ по нормали в точке $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)$ к фазовой траектории системы (2.2), проходящей через эту точку. Уравнение этой поверхности имеет вид:

$$(x - \overset{0}{x}) \frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial y} + (y - \overset{0}{y}) \left[-\frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial x} \right] = 0.$$

Следовательно, точка $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z}, \overset{0}{h})$ эвклидова пространства E_{2+l} переменных x, y, z, h удовлетворяет системе

$$\left. \begin{aligned} &(x - \overset{0}{x}) \frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial y} - (y - \overset{0}{y}) \frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial x} = 0, \\ &H(x, y, z) - h = 0. \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

Левые части системы (2.5) определены и непрерывны вместе со всеми своими частными производными в области Г: $(x, y, z) \in \tilde{\tilde{G}}$, $-\infty < h < \infty$. Якобиан системы (2.5)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial y} & -\dfrac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} & \dfrac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial x} \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, z)}{\partial y} \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}$$

отличен от нуля в точке $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z}, \overset{0}{h})$, так как точка $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})$ не является положением равновесия системы (2.2). Поэтому, по теореме о неявных функциях, в некоторой окрестности Γ^0 точки $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z}, \overset{0}{h})$ ($\Gamma^0 \subset \Gamma$) система (2.5) разрешима относительно x и y:

$$x = \alpha(h, z), \quad y = \beta(h, z),$$

автономной системы не зависящих от ε обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых выражаются через правые части системы (2.1):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{1}{T(h, z)} \oint\limits_{H(x,y,z)=h} \Bigg[X(x, y, z, 0) \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \\
&+ Y(x, y, z, 0) \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \sum_{j=1}^{l} Z_j(x, y, z, 0) \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z_j} \Bigg] \times \\
&\times \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ds, \\
\frac{\partial z_j}{dt} &= \frac{1}{T(h, z)} \oint\limits_{H(x,y,z)=h} Z_j(x, y, z, 0) \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
&\left. + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ds \quad (j = 1, \ldots, l)
\end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

$\left(T(h, z) = \oint\limits_{H(x,y,z)=h} \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} ds\right.$, ds — *дифференциал дуги фазовой траектории* (2.3), *интегрирование ведется при произвольно фиксированной паре* $(h, z) \in G_h$*). *Предполагаем, что решение* $\{\bar{h}(t), \bar{z}_1(t), \ldots, \bar{z}_l(t)\}$ *системы* (2.8) *имеет начальные значения* $\bar{h}(t_0) = h_0 = H(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{z}_1(t) = z_{10}, \ldots, \bar{z}_l(t_0) = z_{l0}^{*}$ $(\{z_{10}, \ldots, z_{l0}\} = z_0)$ *и остается на отрезке* $[t_0, L]$ *в* G_h.

2) *Функции* $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ *с точностью до величин порядка* $O(\varepsilon)$ *совпадают соответственно с функциями*

$$\overset{*}{x}\left(\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]} dr + \nu(t, \varepsilon);\ \bar{h}(t),\ \bar{z}(t)\right),$$

$$\overset{*}{y}\left(\varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]} dr + \nu(t, \varepsilon);\ \bar{h}(t),\ \bar{z}(t)\right).$$

Здесь φ_0 *определяется из соотношений* $x_0 = \overset{*}{x}(\varphi_0, h_0, z_0)$, $y_0 = \overset{*}{y}(\varphi_0, h_0, z_0)$, $|O(\varepsilon)| \leqslant M_0\varepsilon$, $|\nu(t, \varepsilon)| \leqslant M_0$, M_0 — *постоянная величина*, $\nu(t, \varepsilon)$ — *решение уравнения*

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{\varepsilon T[h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]} - \frac{1}{\varepsilon T[\bar{h}(t), \bar{z}(t)]} +$$

$$+ \mathfrak{B}\left[\varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]} dr + \nu, \bar{h}(t), \bar{z}(t), 0\right], \quad \nu(t_0, \varepsilon) = 0,$$

---

* G_h — окрестность точки $(\overset{0}{h}, \overset{0}{z})$, в которую переходит G, если принять $h = H(x, y, z)$, $z = z$.

где

$$\mathfrak{B}(\varphi, h, z, \varepsilon) = \frac{1}{T(h, z)}\Bigg[X(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon)\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h} - Y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon)\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h} + \\ + \sum_{j=1}^{l} Z_j(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon)\left(\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j} - \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j}\right)\Bigg].$$

Доказательство. Прежде всего установим ряд свойств решения (2.6) системы (2.2), имеющих место при тех требованиях гладкости, которые указаны в формулировке теоремы 1.

Свойство 1. *Периодом решения* (2.6) *является функция*

$$T(h, z) = \oint\limits_{H(x, y, z)=h}\left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ds; \qquad (2.9)$$

следовательно, эта функция непрерывна в G_h *вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно.*

Действительно, из (2.2) следует соотношение

$$dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right] d\tau^2,$$

интегрирование которого дает формулу (2.9). Из указанной в условиях теоремы гладкости функций

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}, \quad H(x, y, z) - h$$

следует соответствующая гладкость функции $T(h, z)$ в G_h.

Свойство 2. *Функции* $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ *определены и непрерывны в области* $-\infty < \varphi < \infty$, $(h, z) \in G_h$ *вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно.*

В самом деле, в силу указанной гладкости правых частей системы (2.2), из (2.5), по теореме о неявных функциях, следует, что функции $\alpha(h, z)$, $\beta(h, z)$ непрерывны в G_h вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно. Далее, из теорем о существовании и единственности, о непрерывности и непрерывной дифференцируемости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным значениям и по параметрам следует, что функции $\tilde{x}(\tau, \alpha, \beta, z)$, $\tilde{y}(\tau, \alpha, \beta, z)$, вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно, непрерывны в области $-\infty < \tau < \infty$, $(\alpha, \beta, z) \in G$. Следовательно, функции $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ обладают свойством 2 как сложные функции.|

Свойство 3. *Пусть* $\overline{D}$ — *некоторая ограниченная замкнутая область, содержащаяся в* G_h. *Тогда на множестве* $-\infty < \varphi < \infty$, $(h, z) \in \overline{D}$ *функции* $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ *вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно ограничены.*

Свойство 3 является следствием свойства 2, так как периодичность функций $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ позволяет рассматривать их в замкнутой и ограниченной области $\varphi \in [0, 1]$, $(h, z) \in \overline{D}$.

Свойство 4.

$$H(\overset{*}{x}(\varphi, h, z), \overset{*}{y}(\varphi, h, z), z) = h, \tag{2.10}$$

так как решение (2.6) описывает фазовую траекторию (2.3).

Дифференцирование соотношения (2.10) по z_j дает

Свойство 5.

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j} + \frac{\partial H}{\partial z_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, l), \tag{2.11}$$

где

$$H = H(\overset{*}{x}(\varphi, h, z), \overset{*}{y}(\varphi, h, z), z).$$

Свойство 6.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial y} T(h, z), \\ \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial x} T(h, z), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\overset{*}{x} = \overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y} = \overset{*}{y}(\varphi, h, z)$ [см. (2.2) и (2.7)].

Свойство 7. *Определитель*

$$\Delta(\varphi, h, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overset{*}{x}(\varphi, h, z)}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \overset{*}{x}(\varphi, h, z)}{\partial h} \\ \dfrac{\partial \overset{*}{y}(\varphi, h, z)}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \overset{*}{y}(\varphi, h, z)}{\partial h} \end{vmatrix}$$

равен $T(h, z)$ *и, следовательно, отличен от нуля при* $|\varphi| < \infty$, $(h, z) \in G_h$.

В самом деле, соотношения (2.12), (2.10) дают:

$$\Delta(\varphi, h, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial y} T(h, z) & \dfrac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h} \\ -\dfrac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial x} T(h, z) & \dfrac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h} \end{vmatrix} =$$

$$= T(h, z)\left[\frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial y}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h} + \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial x}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}\right] =$$

$$= T(h, z)\frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial h} = T(h, z)\frac{\partial h}{\partial h} = T(h, z).$$

Свойство 8. *Для любой функции* $\psi(x, y, z)$, *непрерывной в* G, *справедливо равенство*

$$\tilde{\psi}(h, z) = \tilde{\tilde{\psi}}(h, z),$$

где

$$\tilde{\psi}(h, z) = \int_0^1 \psi(\overset{*}{x}(\varphi, h, z), \overset{*}{y}(\varphi, h, z), z)\, d\varphi,$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}(h, z) = \frac{1}{T(h, z)} \oint\limits_{H(x, y, z)=h} \psi(x, y, z) \times \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ds$$

и интегрирование ведется при произвольно фиксированных $(h, z) \in G_h$.

Действительно, вдоль траекторий (2.3), в силу (2.7) и свойства 6, имеем:

$$x = \overset{*}{x}(\varphi, h, z), \quad y = \overset{*}{y}(\varphi, h, z),$$

$$\frac{ds^2}{d\varphi^2} = \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right] T^2(h, z),$$

что дает:

$$\oint\limits_{H(x, y, z)=h} \psi(x, y, z)\left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ds =$$
$$= \int\limits_0^1 \psi(\overset{*}{x}(\varphi, h, z), \overset{*}{y}(\varphi, h, z), z)\, T(h, z)\, d\varphi.$$

Перейдем к непосредственному изучению системы (2.1). Заменим переменные $x, y, z_1, \ldots, z_l$ переменными $\varphi, h, z_1, \ldots, z_l$ по формуле:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overset{*}{x}(\varphi, h, z), \\ y &= \overset{*}{y}(\varphi, h, z), \\ z &= z, \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

что, в силу (2.10), дает:

$$H(x, y, z) = h.$$

Преобразование (2.13) — невырожденное в рассматриваемой области $\varphi| < \infty$, $(h, z) \in G_h^*$, поскольку там

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, h, z)} = \Delta(\varphi, h, z) = T(h, z) \neq 0$$

(см. свойство 7). В силу (2.12), замена (2.13) переводит систему (2.1) в следующую:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial \varphi}\left[\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\varepsilon T(h, z)}\right] + \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}\frac{dh}{dt} = X(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon) - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j} Z_j(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon), \\ &\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial \varphi}\left[\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\varepsilon T(h, z)}\right] + \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h}\frac{dh}{dt} = Y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon) - \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j} Z_j(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon), \\ &\frac{dz}{dt} = Z(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

Система (2.14) является линейной алгебраической по отношению к функциям

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{\varepsilon T(h, z)}, \quad \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt}, \ldots, \frac{dz_l}{dt}$$

с определителем

$$\Delta(\varphi, h, z) \neq 0,$$

и поэтому она единственным образом разрешима относительно этих функций. По правилу Крамера имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{\varepsilon T(h,z)}=\frac{1}{\Delta(\varphi,h,z)}\begin{vmatrix} X-\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j}Z_j & \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}\\ Y-\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j}Z_j & \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h}\end{vmatrix},$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\Delta(\varphi,h,z)}\begin{vmatrix} \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial \varphi} & X-\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j}Z_j\\ \frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial \varphi} & Y-\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j}Z_j\end{vmatrix},$$

$$\frac{dz}{dt}=Z,$$

или, в силу свойств 7, 6, 5:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&=\frac{1}{\varepsilon T(h,z)}+\mathfrak{B}(\varphi,h,z,\varepsilon),\\ \frac{dh}{dt}&=\mathfrak{A}(\varphi,h,z,\varepsilon),\\ \frac{dz}{dt}&=\mathfrak{Z}(\varphi,h,z,\varepsilon);\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}(\varphi,h,z,\varepsilon)&=X\frac{\partial H}{\partial x}+Y\frac{\partial H}{\partial y}+\sum_{j=1}^{l}Z_j\frac{\partial H}{\partial Z_j},\\ \mathfrak{B}(\varphi,h,z,\varepsilon)&=\frac{1}{T(h,z)}\Big[X\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h}-Y\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}+\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{l}Z_j\Big(\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial h}\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial z_j}-\frac{\partial \overset{*}{y}}{\partial h}\frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial z_j}\Big)\Big],\\ \mathfrak{Z}(\varphi,h,z,\varepsilon)&=Z\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

$$(X=X(\overset{*}{x},\overset{*}{y},z,\varepsilon),\quad Y=Y(\overset{*}{x},\overset{*}{y},z,\varepsilon),\quad Z_j=Z_j(\overset{*}{x},\overset{*}{y},z,\varepsilon),$$
$$H=H(\overset{*}{x},\overset{*}{y},z),\quad \overset{*}{x}=\overset{*}{x}(\varphi,h,z),\quad \overset{*}{y}=\overset{*}{y}(\varphi,h,z)).$$

Функции $\mathfrak{A}(\varphi,h,z,\varepsilon)$, $\mathfrak{B}(\varphi,h,z,\varepsilon)$, $\mathfrak{Z}_1(\varphi,h,z,\varepsilon),\ldots,\mathfrak{Z}_l(\varphi,h,z,\varepsilon)$ в области значений $\varphi\in(-\infty,\infty)$, $(h,z)\in G_h$, $\varepsilon\in[0,a]$, непрерывны вместе со всеми своими первыми частными производными (в силу (2.16), свойств 1, 2, 7 и указанной в условии теоремы 1 гладкости функций $H, X, Y, Z_1,\ldots,Z_l$) и, в силу (2.7), периодичны по φ с периодом 1 $\Big($заметим, что $\frac{dh}{dt}$ можно сразу получить в силу системы (2.1), так как, по (2.13), $h=H(x,y,z)\Big)$.

Рассмотрим усредненную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon T(h, z)}, \\ \frac{dh}{dt} &= \overline{\mathfrak{A}}(h, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \overline{\mathfrak{Z}}(h, z), \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

где

$$\overline{\mathfrak{A}}(h, z) = \int_0^1 \mathfrak{A}(\varphi, h, z, 0)\, d\varphi, \quad \overline{\mathfrak{Z}}(h, z) = \int_0^1 \mathfrak{Z}(\varphi, h, z, 0)\, d\varphi,$$

или, в силу свойства 8 и формул (2.16),

$$\overline{\mathfrak{A}}(h, z) = \frac{1}{T(h, z)} \oint\limits_{H(x, y, z)=h} \left[X(x, y, z, 0)\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + Y(x, y, z, 0)\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \sum_{j=1}^{l} Z_j(x, y, z, 0)\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z_j}\right] \times$$

$$\times \left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ds,$$

$$\overline{\mathfrak{Z}}(h, z) = \frac{1}{T(h, z)} \oint\limits_{H(x, y, z)=h} Z(x, y, z, 0)\left[\left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Следовательно, усредненная система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \overline{\mathfrak{A}}(h, z), \\ \frac{dz}{dt} &= \overline{\mathfrak{Z}}(h, z) \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

есть система (2.8).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА ОБ УСРЕДНЕНИИ. *Пусть дана система*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} w(v) + B(\varphi, v, \varepsilon), \\ &\frac{dv}{dt} = V(\varphi, v, \varepsilon), \\ &(v = \{v_1, \ldots, v_r\}, \quad V = \{V_1, \ldots, V_r\}), \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

где ε *— малый положительный параметр, функции* $w(v)$, $B(\varphi, v, \varepsilon)$, $V_1(\varphi, v, \varepsilon), \ldots, V_r(\varphi, v, \varepsilon)$ *определены и непрерывны вместе со всеми своими первыми частными производными в области значений* $\varphi \in (-\infty, \infty)$, $v \in D$, $\varepsilon \in [0, a]$ *(*D *— некоторая открытая область эвклидова пространства* E_r *переменных* $v_1, \ldots, v_r$*), причем* $w(v) \neq 0$, *а функции* $B(\varphi, v, \varepsilon)$, $V_1(\varphi, v, \varepsilon), \ldots, V_r(\varphi, v, \varepsilon)$ *периодические по* φ *с периодом* 1. *Пусть, далее,* $\{\varphi(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *— решение системы* (2.19) *с начальными условиями* $\varphi(t_0, \varepsilon) = \varphi_0$, $v(t_0, \varepsilon) = v_0$ $(v_0 \in D, 0 < \varepsilon \leqslant a)$, $\{\varphi(t, \varepsilon), v(t)\}$ *— решение*

усредненной системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} w(v), \\ &\frac{dv}{dt} = \overline{V}(v), \\ &\left(\overline{V}(v) = \int_0^1 V(\varphi, v, 0)\, d\varphi, \quad \varepsilon > 0\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

с начальными условиями $\overline{\varphi}(t_0, \varepsilon) = \varphi_0$, $\overline{v}(t_0) = v_0$, *и пусть* $\overline{v}(t)$ *остается в* D *на конечном промежутке времени* $[t_0, L]$. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что на указанном промежутке времени* $[t_0, L]$ *при любом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $v(t, \varepsilon)$ *остается в некоторой замкнутой ограниченной области* $\overline{D}_0 \subset D$ *и*

$$|v_i(t, \varepsilon) - \overline{v}_i(t)| \leqslant \overset{0}{M}\varepsilon, \quad i = 1, \ldots, r,$$
$$|\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon) - \nu(t, \varepsilon)| \leqslant \overset{0}{M}\varepsilon, \quad |\nu(t, \varepsilon)| \leqslant \overset{0}{M}, \tag{2.21}$$

где $\nu(t, \varepsilon)$ — *решение уравнения*

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} w[v(t, \varepsilon)] - \frac{1}{\varepsilon} w[\overline{v}(t)] + B[\overline{\varphi}(t, \varepsilon) + \nu, \overline{v}(t), 0], \quad \nu(t_0, \varepsilon) = 0 \tag{2.22}$$

($\overset{0}{M}$ — *постоянная величина*, $\varepsilon_0 \leqslant a$, D_0 — ρ-*окрестность* решения* $\overline{v}(t)$ *системы*

$$\frac{dv}{dt} = \overline{V}(v) \tag{2.23}$$

на отрезке $[t_0, L]$, $\rho > 0$ *таково, что* $\overline{D}_0 \subset D$).

Доказательство**. Решение $\overline{v}(t)$ системы (2.23) непрерывно на конечном отрезке $[t_0, L]$ и потому пробегает в D кривую, составляющую замкнутое ограниченное множество $F_0 \subset D$. В силу этого, найдется $\rho > 0$ такое, что $\overline{D}_0 \subset D$. Пусть

$$\|v(t, \varepsilon) - v(t)\| \leqslant \rho^{***} \tag{2.24}$$

на отрезке $[t_0, t^{**}(\varepsilon)]$ ($\varepsilon \in (0, a]$). На основании (2.19) и (2.23), для разности $v(t, \varepsilon) - \overline{v}(t)$ на отрезке $[t_0, t^*(\varepsilon)]$, где

$$t^*(\varepsilon) = \begin{cases} t^{**}(\varepsilon) & \text{при } t^{**}(\varepsilon) \leqslant L, \\ L & \text{при } t^{**}(\varepsilon) \geqslant L, \end{cases}$$

---

* Под ρ-окрестностью некоторого множества $\mathfrak{M}$ эвклидова пространства E понимается множество всех точек пространства E, расстояние которых до множества $\mathfrak{M}$ меньше ρ.

** Метод доказательства теоремы об усреднении разработан Л. С. Понтрягиным и Л. В. Родыгиным. Формальный метод построения приближений решения системы (2.19) с любой степенью точности относительно ε дан Н. Н. Боголюбовым и Д. Н. Зубаревым [см. ([6]), стр. 353].

*** Если $v \in E_r$, то $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_r^2}$.

при любом $\varepsilon \in (0, a]$ имеем:

$$\frac{d(v-\bar{v})}{dt} = V(\varphi, v, \varepsilon) - \bar{V}(\bar{v}),$$

или

$$\frac{d(v-\bar{v})}{dt} = V(\varphi, v, 0) - \bar{V}(v) + \bar{V}(v) - \bar{V}(\bar{v}) + V(\varphi, v, \varepsilon) - V(\varphi, v, 0).$$

Введем вектор-функцию

$$\Omega(\varphi, v) = \frac{1}{w(v)} \int_0^{\varphi} [V(\psi, v, 0) - \bar{V}(v)]\, d\psi. \tag{2.25}$$

Эта функция периодична по φ с периодом 1, так как

$$\Omega(\varphi + 1, v) = \Omega(\varphi, v) + \frac{1}{w(v)} \int_{\varphi}^{\varphi+1} [V(\psi, v, 0) - \bar{V}(v)]\, d\psi = \Omega(\varphi, v).$$

Применяя формулу конечных приращений к $\bar{V}(z)$ и $V(\varphi, v, \varepsilon)$ относительно v, ε, получим на $[t_0, t^*(\varepsilon)]$:

$$\frac{d(v-\bar{v})}{dt} = w(v)\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{V}(v_{\text{cp}})}{\partial v}(v - \bar{v}) + \\ + \frac{\partial V(\varphi, v, \varepsilon_{\text{cp}})}{\partial \varepsilon}\varepsilon, \quad v_{\text{cp}} \in \bar{D}_0, \quad \varepsilon_{\text{cp}} \leqslant \varepsilon \; * \tag{2.26}$$

(применимость формулы конечных приращений следует из неравенства (2.24), в силу которого отрезок прямой, соединяющий точки $\bar{v}(t)$ и $v(t, \varepsilon)$, содержится в $\bar{D}_0$ при любых $t \in [t_0, t^*(\varepsilon)]$, $\varepsilon \in (0, a]$). Но вдоль решения $\{\varphi(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ системы (2.19)

$$\frac{d\Omega(\varphi, v)}{dt} = \frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial \varphi}\left[\frac{1}{\varepsilon}w(v) + B(\varphi, v, \varepsilon)\right] + \frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial v}V(\varphi, v, \varepsilon),$$

т. е.

$$w(v)\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial v} = \frac{d\varepsilon\Omega(\varphi, v)}{dt} - \varepsilon\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial \varphi}B(\varphi, v, \varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial v}V(\varphi, v, \varepsilon). \tag{2.27}$$

Поэтому, полагая

$$v - \bar{v} - \varepsilon\Omega(\varphi, v) = \sigma, \tag{2.28}$$

в силу (2.26) и (2.27) найдем:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\varepsilon\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial \varphi}B(\varphi, v, \varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial \Omega(\varphi, v)}{\partial v}V(\varphi, v, \varepsilon) + \\ + \frac{\partial \bar{V}(v_{\text{cp}})}{\partial v}[\sigma + \varepsilon\Omega(\varphi, v)] + \frac{\partial V(\varphi, v, \varepsilon_{\text{cp}})}{\partial \varepsilon}\varepsilon.$$

---

* Для любых функций $\mathfrak{N}_1(v), \ldots, \mathfrak{N}_r(v)$, непрерывных вместе со всеми своими первыми частными производными, вводим обозначение:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \mathfrak{N}(v)}{\partial v_i} g_i = \frac{\partial \mathfrak{N}(v)}{\partial v} g,$$

где $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_r\}$, $v = \{v_1, \ldots, v_r\}$, $g = \{g_1, \ldots, g_r\}$ — некоторые векторы из E_r.

Следовательно,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \overline{V}(v_{\text{ср}})}{\partial v}\sigma + O(\varepsilon) \tag{2.29}$$

$\left(\|O(\varepsilon)\| \leqslant M_1\varepsilon, \ \left|\frac{\partial \overline{V}_j(v_{\text{ср}})}{\partial v_i}\right| \leqslant M_1, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad M_1\right.$ — постоянная величина), так как, в силу условий теоремы об усреднении, функции $\overline{V}(v)$, $\Omega_i(\varphi, v)$, $B(\varphi, v, \varepsilon)$, $V_i(\varphi, v, \varepsilon)$ и все их первые частные производные ограничены в области значений $\varphi \in (-\infty, \infty)$, $v \in \overline{D}_0$, $\varepsilon \in [0, a]$.

Пусть при $v \in \overline{D}_0$

$$\|\Omega(\varphi, v)\| \leqslant M_2, \tag{2.30}$$

где M_2 — постоянная величина. По (2.29),

$$\frac{d\|\sigma\|^2}{dt} \leqslant 2M_1 r\|\sigma\|^2 + 2\sqrt{r}\, M_1\|\sigma\|\,\varepsilon \leqslant M_3\,(\|\sigma\|^2 + \varepsilon^2), \quad M_3 = 3rM_1\,^*,$$

откуда получаем:

$$\frac{d\ln\left[(\|\sigma\|^2 + \varepsilon^2)\, e^{-M_3 t}\right]}{dt} \leqslant 0.$$

Из последнего соотношения следует:

$$\|\sigma(t, \varepsilon)\|^2 + \varepsilon^2 \leqslant (\|\sigma(t_0, \varepsilon)\|^2 + \varepsilon^2)\, e^{M_3(t-t_0)} \tag{2.31}$$

($\sigma(t_0, \varepsilon) = -\varepsilon\Omega(\varphi_0, v_0)$, в силу (2.28)), или

$$\|\sigma(t, \varepsilon)\| \leqslant M_4\varepsilon, \quad M_4 = \sqrt{\|\Omega(\varphi_0, v_0)\|^2 + 1}\, e^{\frac{1}{2}M_3(L-t_0)} > 0. \tag{2.32}$$

Соотношения (2.28), (2.30), (2.32) дают при всех $t \in [t_0, t^*(\varepsilon)]$, $\varepsilon \in (0, a]$:

$$\|v(t, \varepsilon) - \overline{v}(t)\| \leqslant M_5\varepsilon, \quad M_5 = M_2 + M_4 > 0. \tag{2.33}$$

Но при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $\left(\varepsilon_0 = \min\left(a, \frac{\rho}{2M_5}\right)\right)$

$$t^*(\varepsilon) = L, \tag{2.34}$$

так как в противном случае $t^* = t^{**} < L$ и, по (2.33), при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\|v(t^{**}, \varepsilon) - \overline{v}(t^{**})\| \leqslant \frac{\rho}{2},$$

что противоречит определению t^{**} (см. (2.24)).

Оценим $\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon) - \nu(t, \varepsilon)$ и $\nu(t, \varepsilon)$ на $[t_0, L]$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. В силу (2.19), (2.20) и (2.22),

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi - \overline{\varphi} - \nu)}{dt} &= B(\varphi, v, \varepsilon) - B(\overline{\varphi} + \nu, \overline{v}, 0), \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon}[w(v) - w(\overline{v})] + B(\overline{\varphi} + \nu, \overline{v}, 0), \end{aligned} \tag{2.35}$$

---

* Опираемся на известное неравенство

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \quad (a_1, \ldots, a_n \text{ — числа}). \tag{*}$$

или, по формуле конечных приращений,

$$\frac{d(\varphi-\bar{\varphi}-\nu)}{dt}=\frac{\partial B(\varphi_{\text{ср}}, v_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial\varphi}(\varphi-\bar{\varphi}-\nu)+\frac{\partial B(\varphi_{\text{ср}}, v_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial v}(v-\bar{v})+\\+\frac{\partial B(\varphi_{\text{ср}}, v_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial\varepsilon}\varepsilon,$$

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial w(\tilde{v}_{\text{ср}})}{\partial v}(v-\bar{v})+B(\bar{\varphi}+\nu, \bar{v}, 0), \quad v_{\text{ср}}, \tilde{v}_{\text{ср}}\in\bar{D}_0, \quad \varepsilon_{\text{ср}}\leqslant\varepsilon$$

(применимость формулы конечных приращений следует из (2.24)). Следовательно, в силу ограниченности функций $w(v)$, $B(\varphi, v, \varepsilon)$ и всех их частных производных в области значений $\varphi\in(-\infty, \infty)$, $v\in\bar{D}_0$, $\varepsilon\in[0, a]$, по (2.33), (2.34) имеем:

$$\frac{d(\varphi-\bar{\varphi}-\nu)}{dt}=\frac{\partial B(\varphi_{\text{ср}}, v_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial\varphi}(\varphi-\bar{\varphi}+\nu)+O(\varepsilon), \quad \frac{d\nu}{dt}=O(1)$$

$$\left(\left|\frac{\partial B(\varphi_{\text{ср}}, v_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial\varphi}\right|\leqslant M_6, \quad |O(\varepsilon)|\leqslant M_6\varepsilon, \quad |O(1)|\leqslant M_6, M_6<\infty\right).$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{d(\varphi-\bar{\varphi}-\nu)^2}{dt}\leqslant M_7\,[(\varphi-\bar{\varphi}-\nu)^2+\varepsilon^2],\\ |\nu(t, \varepsilon)|\leqslant\frac{1}{2}M_7(L-t_0) \quad (M_7=3M_6).\end{gathered}\tag{2.36}$$

Из (2.36) следует:

$$|\varphi(t, \varepsilon)-\bar{\varphi}(t, \varepsilon)-\nu(t, \varepsilon)|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{[\varphi(t_0, \varepsilon)-\bar{\varphi}(t_0, \varepsilon)-\nu(t_0, \varepsilon)]^2+\varepsilon^2}\,e^{\frac{1}{2}M_7(L-t_0)}=M_8\varepsilon \tag{2.37}$$

$$\left(M_8=e^{\frac{1}{2}M_7(L-t_0)}, \quad \varphi(t_0, \varepsilon)=\bar{\varphi}(t_0, \varepsilon)=\varphi_0, \quad \nu(t_0, \varepsilon)=0\right),$$

$$|\nu(t, \varepsilon)|\leqslant M_8. \tag{2.38}$$

Соотношения (2.33), (2.34), (2.37), (2.38) полностью доказывают теорему об усреднении $\left(M^0=\max(M_5, M_8), \ \varepsilon_0=\min\left(a, \frac{\rho}{2M_5}\right)\right)$.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Так как система (2.15) типа (2.19), то, по теореме об усреднении, существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что при любых $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$, $t\in[t_0, L]$ решение $\{\varphi(t, \varepsilon), h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.15) с начальными условиями

$$\varphi(t_0, \varepsilon)=\varphi_0, \quad h(t_0, \varepsilon)=h_0, \quad z(t_0, \varepsilon)=z_0$$

$$(\overset{*}{x}(\varphi_0, h_0, z_0)=x_0, \overset{*}{y}(\varphi_0, h_0, z_0)=y_0, \quad H(x_0, y_0, z_0)=h_0)$$

и решение $\{\bar{\varphi}(t, \varepsilon), \bar{h}(t), \bar{z}(t)\}$ усредненной системы (2.17) с теми же начальными условиями

$$\bar{\varphi}(t_0, \varepsilon)=\varphi_0, \quad \bar{h}(t_0)=h_0, \quad \bar{z}(t_0)=z_0$$

связаны следующим образом: точка $\{h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ остается в некоторой

замкнутой ограниченной области $\overline{G}_{h\rho} \subset G_h$ и выполняются соотношения:

$$|h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t)| \leqslant \overset{0}{M}\varepsilon, \quad |z_j(t, \varepsilon) - \overline{z}_j(t)| \leqslant \overset{0}{M}\varepsilon \quad (j = 1, \ldots, l),$$
$$|\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon) - \nu(t, \varepsilon)| \leqslant \overset{0}{M}\varepsilon, \quad |\nu(t, \varepsilon)| \leqslant \overset{0}{M}, \tag{2.39}$$

где $\nu(t, \varepsilon)$ — решение уравнения

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{\varepsilon T[h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)]} - \frac{1}{\varepsilon T[\overline{h}(t), \overline{z}(t)]} +$$
$$+ \mathfrak{B}[\overline{\varphi}(t, \varepsilon) + \nu, \overline{h}(t), \overline{z}(t), 0], \quad \nu(t_0, \varepsilon) = 0 \tag{2.40}$$

(M^0 — постоянная величина, $\varepsilon_0 \leqslant a$, $G_{h\rho}$ — ρ-окрестность решения $\{\overline{h}(t), \overline{z}(t)\}$ системы (2.18) на отрезке $[t_0, L]$, $\rho > 0$). А так как, по (2.13),

$$x(t, \varepsilon) = \overset{*}{x}(\varphi, (t, \varepsilon), h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)),$$
$$y(t, \varepsilon) = \overset{*}{y}(\varphi, (t, \varepsilon), h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) \tag{2.41}$$

и так как точка $\{h(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ остается в $\overline{G}_{h\rho} \subset G_h$, то на отрезке $[t_0, L]$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) остается в G, причем, по свойству 3,

$$|x(t, \varepsilon)|, |y(t, \varepsilon)| \leqslant R_0 \quad (R_0 \text{ — постоянная величина}). \tag{2.42}$$

В силу же (2.13),

$$h(t, \varepsilon) = H[x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)], \tag{2.43}$$

и потому соотношения (2.39), (2.40) доказывают первую часть теоремы 1.

Докажем вторую часть теоремы 1. По формуле конечных приращений, из (2.41) получаем:

$$x(t, \varepsilon) = \overset{*}{x}(\overline{\varphi}(t, \varepsilon) + \nu(t, \varepsilon), \overline{h}(t), \overline{z}(t)) +$$
$$+ \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial \varphi}[\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon) - \nu(t, \varepsilon)] +$$
$$+ \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial h}[h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t)] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial z_j}[z_j(t, \varepsilon) - \overline{z}_j(t)],$$
$$y(t, \varepsilon) = \overset{*}{y}(\overline{\varphi}(t, \varepsilon) + \nu(t, \varepsilon), \overline{h}(t), \overline{z}(t)) +$$
$$+ \frac{\partial \overset{*}{y}(\widetilde{\varphi}_{\text{cp}}, \widetilde{h}_{\text{cp}}, \widetilde{z}_{\text{cp}})}{\partial \varphi}[\varphi(t, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t, \varepsilon) - \nu(t, \varepsilon)] +$$
$$+ \frac{\partial \overset{*}{y}(\widetilde{\varphi}_{\text{cp}}, \widetilde{h}_{\text{cp}}, \widetilde{z}_{\text{cp}})}{\partial h}[h(t, \varepsilon) - \overline{h}(t)] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overset{*}{y}(\widetilde{\varphi}_{\text{cp}}, \widetilde{h}_{\text{cp}}, \widetilde{z}_{\text{cp}})}{\partial z_j}[z_j(t, \varepsilon) - \overline{z}_j(t)].$$

Так как, по доказанному, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ на отрезке $[t_0, L]$

$$\sqrt{[h(t, \varepsilon) - \bar{h}(t)]^2 + \sum_{j=1}^{l} [z_j(t, \varepsilon) - \bar{z}_j(t)]^2} \leqslant \rho,$$

то $\{h_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}\}$, $\{\tilde{h}_{\text{ср}}, \tilde{z}_{\text{ср}}\} \in \overline{G}_{h\rho} \subset G_h$ и, следовательно, по свойству 3, производные

$$\frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{ср}}, h_{\text{ср}}, z_{\text{ср}})}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{ср}}, h_{\text{ср}}, z_{\text{ср}})}{\partial h}, \quad \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{ср}}, h_{\text{ср}}, z_{\text{ср}})}{\partial z_j},$$

$$\frac{\partial \overset{*}{y}(\tilde{\varphi}_{\text{ср}}, \tilde{h}_{\text{ср}}, \tilde{z}_{\text{ср}})}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \overset{*}{y}(\tilde{\varphi}_{\text{ср}}, \tilde{h}_{\text{ср}}, \tilde{z}_{\text{ср}})}{\partial h}, \quad \frac{\partial \overset{*}{y}(\tilde{\varphi}_{\text{ср}}, \tilde{h}_{\text{ср}}, \tilde{z}_{\text{ср}})}{\partial z_j},$$

ограничены на $[t_0, L]$. Но, по (2.17),

$$\bar{\varphi}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]}\, dr,$$

т. е., в силу (2.39),

$$x(t, \varepsilon) = \overset{*}{x}\left(\varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]}\, dr + \nu(t, \varepsilon), \bar{h}(t), \bar{z}(t)\right) + O(\varepsilon), \quad (2.44)$$

$$y(t, \varepsilon) = \overset{*}{y}\left(\varphi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{T[\bar{h}(r), \bar{z}(r)]}\, dr + \nu(t, \varepsilon), \bar{h}(t), \bar{z}(t)\right) + O(\varepsilon) \quad (2.45)$$

($\nu(t, \varepsilon)$ — решение уравнения (2.40)). Таким образом, соотношения (2.44), (2.45) доказывают вторую часть теоремы 1 ($|O(\varepsilon)| \leqslant M_1^0\varepsilon$). Теорема 1 полностью доказана $\left(\varepsilon_0 = \min\left(a, \frac{\rho}{2M_5}\right), M_0 = \max(M^0, M_1^0)\right)$.

Следствие. *Существует число* $\varepsilon_{00} > 0$ $(\varepsilon_{00} \leqslant \varepsilon_0)$ *такое, что при любом* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{00}]$

$$x(t, \varepsilon) = \overset{*}{x}\left(\varphi(t_n, \varepsilon) + \nu(t_n, \varepsilon) + \frac{t - t_n}{\varepsilon \mathfrak{T}(t_n)}, \ \bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)\right) + O(\varepsilon), \quad (2.46)$$

$$y(t, \varepsilon) = \overset{*}{y}\left(\varphi(t_n, \varepsilon) + \nu(t_n, \varepsilon) + \frac{t - t_n}{\varepsilon \mathfrak{T}(t_n)}, \ \bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)\right) + O(\varepsilon), \quad (2.47)$$

где $|O(\varepsilon)| \leqslant \overset{*}{M}\varepsilon$, $\mathfrak{T}(t) = T[\bar{h}(t), \bar{z}(t)]$, t — *любое из отрезка* $[t_n, t_n + 2\varepsilon\mathfrak{T}(t_n)] \subseteq [t_0, L]$, $\overset{*}{M}$ — *постоянная величина, не зависящая от* t_n, ε.

Так как в замкнутой ограниченной области $\overline{G}_{h\rho}$

$$|\overline{\mathfrak{A}}(h, z)|, \quad |\overline{\mathfrak{Z}}_1(h, z)|, \ldots, |\overline{\mathfrak{Z}}_l(h, z)| \leqslant R_1 < \infty$$

и так как $\{\bar{h}(t), \bar{z}(t)\} \in \overline{G}_{h\rho}$ и, следовательно, в силу свойств 1 и 7,

$$|\mathfrak{T}(t)|, \left|\frac{d\left[\frac{1}{\mathfrak{T}(t)}\right]}{dt}\right| \leqslant R_2 < \infty,$$

то при любом $t_n \in [t_0, L]$, таком, что $[t_n, t_n + 2\varepsilon \mathfrak{T}(t_n)] \in [t_0, L]$, и при любых $t \in [t_n, t_n + 2\varepsilon \mathfrak{T}(t_n)]$, $\varepsilon \in \left(0,\ \varepsilon_{00} = \min\left(\varepsilon_0, \frac{\rho}{2R_1 R_2 \sqrt{l+1}}\right)\right)$, в силу (2.18), имеем:

$$\sqrt{[\bar{h}(t) - \bar{h}(t_n)]^2 + \sum_{j=1}^{l} [\bar{z}_j(t) - \bar{z}_j(t_n)]^2} \leqslant 2\sqrt{l+1}\, R_1 R_2 \varepsilon \leqslant \rho, \quad (2.48)$$

$$|\nu(t, \varepsilon) - \nu(t_n, \varepsilon)| \leqslant 2R_1 M_6 \varepsilon. \quad (2.49)$$

Теорема 1 и формула конечных приращений дают:

$$x(t, \varepsilon) = \overset{*}{x}\left(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_n}^{t} \frac{1}{\mathfrak{T}(r)}\, dr + \nu(t, \varepsilon), \bar{h}(t), \bar{z}(t)\right) + O(\varepsilon) =$$

$$= \overset{*}{x}\left(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{t - t_n}{\mathfrak{T}(t_n)} + \nu(t_n, \varepsilon), \bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)\right) +$$

$$+ \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial \varphi}\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_n}^{t} \frac{d\left[\frac{1}{\mathfrak{T}(t_{\text{cp}})}\right]}{dt}(r - t_n)\, dr + \nu(t, \varepsilon) - \nu(t_n, \varepsilon)\right\} +$$

$$+ \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial h}[\bar{h}(t) - \bar{h}(t_n)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial z_j}[\bar{z}_j(t) - \bar{z}_j(t_n)] + O(\varepsilon), \quad (2.50)$$

где $\{h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}}\} \in \bar{G}_{h\rho}$, следовательно, в силу свойства 3,

$$\left|\frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial \varphi}\right|, \left|\frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial h}\right|,$$

$$\left|\frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial z_1}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial \overset{*}{x}(\varphi_{\text{cp}}, h_{\text{cp}}, z_{\text{cp}})}{\partial z_l}\right| \leqslant R_3 < \infty \quad (2.51)$$

(формула конечных приращений применима в силу (2.48)). А так как $r - t_n \leqslant 2\varepsilon \mathfrak{T}(t_n) \leqslant 2R_2\varepsilon$, то из соотношений (2.48) — (2.51) и неравенства (*) (см. сноску на стр. 698) следует соотношение (2.46), где

$$M^* = R_3[4R_1^3 + 2M_6R_1 + 2(l+1)R_1R_2] + M_0.$$

Точно так же выводится и соотношение (2.47).

Это следствие, по определению функций $\overset{*}{x}(\varphi, h, z)$, $\overset{*}{y}(\varphi, h, z)$, выражает тот факт, что на любом отрезке $[t_n, t_n + 2\varepsilon \mathfrak{T}(t_n)] \subseteq [t_0, L]$ функции $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ совпадают соответственно с функциями

$$\bar{x}_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \tilde{x}\left[\frac{t}{\varepsilon} - \frac{t_n}{\varepsilon} + \mathfrak{T}(t_n)(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) +\right.$$

$$+\nu(t_n, \varepsilon)), \alpha(\bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)), \beta(\bar{h}, (t_n), \bar{z}(t_n)), \bar{z}(t_n)],$$

$$\bar{y}_n\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \tilde{y}\left[\frac{t}{\varepsilon} - \frac{t_n}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{T}(t_n)(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) + \nu(t_n, \varepsilon)), \alpha(\bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)), \beta(\bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)), \bar{z}(t_n)\right],$$

представляющими собой решение гамильтоновой системы

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, y, \bar{z}(t_n))}{\partial y},$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x, y, \bar{z}(t_n))}{\partial x},$$

принимающее при $t = t_n$ значения

$$\bar{x}_n\left(\frac{t_n}{\varepsilon}\right) = \overset{*}{x}(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) + \nu(t_n, \varepsilon), \bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)),$$

$$\bar{y}_n\left(\frac{t_n}{\varepsilon}\right) = \overset{*}{y}(\bar{\varphi}(t_n, \varepsilon) + \nu(t_n, \varepsilon), \bar{h}(t_n), \bar{z}(t_n)).$$

3. Добавления к описанию решений системы (2.1) в случае невырожденного центра. Пусть система (2.3) имеет положение равновесия $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z}) \in E_{2+l}$ и в некоторой его окрестности $\tilde{G}_0$ функции $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}$ непрерывны вместе со всеми своими первыми частными производными. Пусть это положение равновесия является невырожденным центром. Это значит, что квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})}{\partial x^2}\alpha_1^2 + 2\frac{\partial^2 H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})}{\partial x\, \partial y}\alpha_1\alpha_2 + \frac{\partial^2 H(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})}{\partial y^2}\alpha_2^2$$

знакоопределенная. Следовательно, существует некоторая окрестность $G_0 \subseteq \tilde{G}_0$ точки $(\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{z})$ такая, что:

1) в G_0 определитель

$$D(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0; \tag{2.52}$$

2) система

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} = 0,$$

по теореме о неявных функциях, единственным образом разрешима в G_0 относительно x, y:

$$x = f(z), \quad y = g(z) \quad (\overset{0}{x} = f(\overset{0}{z}), \overset{0}{y} = g(\overset{0}{z}));$$

3) окрестность G_0 есть окрестность типа G из теоремы 1, если из G_0 исключить точки $\{x = f(z), y = g(z), z\}$.

Возникает вопрос, как ведут себя решения системы (2.1) во всей указанной окрестности G_0 (включая и положения равновесия $\{f(z), g(z), z\}$ системы (2.3)). На этот вопрос отвечают теорема 1 и нижеследующие теоремы 2 и 3.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в окрестности G_0 выполнены условия теоремы 1, касающиеся гладкости правых частей системы (2.1). Тогда найдется число $\varepsilon^0 > 0$, такое, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ ($\varepsilon^0 \leqslant a$) на конечном промежутке времени $[t_0, L]$ решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) с начальными условиями*

$$x(t_0, \varepsilon) = f(z_0), \quad y(t_0, \varepsilon) = g(z_0), \quad z(t_0, \varepsilon) = z_0 \quad (\{f(z_0), g(z_0), z_0\} \in G_0)$$

остается в G_0 и с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ совпадает с решением

$$\{\tilde{x}(t) = f[\tilde{z}(t)], \tilde{y}(t) = g[\tilde{z}(t)], \tilde{z}(t)\}$$

вырожденной системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (x = f(z)), \\ &\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} = 0 \quad (y = g(z)), \\ &\frac{dz}{dt} = Z(x, y, z, 0), \end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

проходящим при $t = t_0$ через то же положение равновесия

$$\tilde{x}(t_0) = f(z_0), \quad \tilde{y}(t_0) = g(z_0), \quad \tilde{z}(t_0) = z_0$$

(*предполагается, что решение $\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\}$ остается в G на $[t_0, L]$*).

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что в G_0

$$f(z) = 0, \quad g(z) = 0, \quad H(0, 0, z) = 0, \tag{2.54}$$

так как замена переменных $x, y, z_1, \ldots, z_l$ на $\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, z_1, \ldots, z_l$ и H на H^1, где

$$\overset{1}{x} = x - f(z), \quad \overset{1}{y} = y - g(z), \quad z = z,$$

$$H^1(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, z) = H[\overset{1}{x} + f(x), \overset{1}{y} + g(z), z] - H[f(z), g(z), z],$$

сохраняет вид системы (2.1), но дает условия (2.54). Следовательно, в силу (2.53), (2.54),

$$\{\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)\} = \{0, 0, \tilde{z}(t)\}.$$

Это решение на конечном промежутке времени $[t_0, L]$ составляет некоторое замкнутое ограниченное множество $F_0 \subset G_0$ и поэтому найдется $\rho_0 > 0$ такое, что $\overline{G}_{00} \subset G_0$ (G_{00} — ρ_0-окрестность F_0).

Пусть на отрезке $[t_0, t_{**}(\varepsilon)]$

$$\sqrt{x(t, \varepsilon)^2 + y(t, \varepsilon)^2 + \sum_{j=1}^{l} [z_j(t, \varepsilon) - \bar{z}_j(t)]^2} \leqslant \rho_0. \tag{2.55}$$

Положим

$$H_1(x, y, z, \varepsilon) = H(x, y, z) + \varepsilon y X(0, 0, z, \varepsilon) - \varepsilon x Y(0, 0, z, \varepsilon), \tag{2.56}$$

$$H(x, y, z)|_{\text{вдоль } \{x(t, \varepsilon),\, y(t, \varepsilon),\, y(t, \varepsilon)\}} = h(t, \varepsilon), \tag{2.57}$$

$$H_1(x, y, z)|_{\text{вдоль } \{x(t, \varepsilon),\, y(t, \varepsilon),\, z(t, \varepsilon)\}} = h_1(t, \varepsilon). \tag{2.58}$$

В силу (2.56) и (2.1), вдоль решения $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dH_1(x, y, z, \varepsilon)}{dt} = \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} [X(x, y, z, \varepsilon) - X(0, 0, z, \varepsilon)] + \\ + \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} [Y(x, y, z, \varepsilon) - Y(0, 0, z, \varepsilon)] + \\ + \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z} Z(x, y, z, \varepsilon) + \\ + \varepsilon X(0, 0, z, \varepsilon) [Y(x, y, z, \varepsilon) - Y(0, 0, z, \varepsilon)] - \\ - \varepsilon Y(0, 0, z, \varepsilon) [X(x, y, z, \varepsilon) - X(0, 0, z, \varepsilon)] + \\ + \varepsilon \left[y \frac{\partial X(0, 0, z, \varepsilon)}{\partial z} - x \frac{\partial Y(0, 0, z, \varepsilon)}{\partial z} \right] Z(x, y, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле Тейлора, примененной к функциям

$$\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z_j} \quad (j = 1, \ldots, l),$$
$$X(x, y, z, \varepsilon), \quad Y(x, y, z, \varepsilon)$$

относительно x, y в $\bar{G}_{00}$, в силу (2.54), (2.58), получим на $[t_0, t_{**}(\varepsilon)]$:

$$\frac{dh_1}{dt} = O^2(x, y, \varepsilon) \quad (h_1 = h_1(t, \varepsilon),\ x = x(t, \varepsilon),\ y = y(t, \varepsilon)) \tag{2.59}$$

(формула Тейлора применима в $\bar{G}_{00}$ относительно x, y, так как прямолинейный отрезок, соединяющий любые две точки (x, y, z) и $(0, 0, z)$ из $\bar{G}_{00}$, содержится в $\bar{G}_{00}$, поскольку каждое сечение области $\bar{G}_{00}$ плоскостью $z = \text{const}$ представляет собой круг с центром в точке $(0, 0, z)$, по определению $\bar{G}_{00}$).

Функция $O^2(x, y, \varepsilon)$, в силу указанной в условиях теоремы гладкости правых частей системы (2.1), является однородной квадратичной относительно x, y, ε с ограниченными в $\bar{G}_{00}$ коэффициентами, и поэтому

$$|O^2(x, y, \varepsilon)| \leqslant C_1(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)$$
$$((x, y, z) \in \bar{G}_{00},\ C_1 \text{ — постоянная величина}). \tag{2.60}$$

С другой стороны, по формуле Тейлора, в силу (2.54) имеем в $\bar{G}_{00}$

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial y^2} y^2 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2 \dfrac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x^2}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x^2} x + \frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x \partial y} y \right]^2 + \right.$$

$$+\left[\frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 H(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]y^2\Bigg\}$$

$$((x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z)\in G_{00}), \tag{2.61}$$

и так как при $(x, y, z)\in \overline{G}_{00}$, в силу (2.52),

$$0<w_0\leqslant D(x, y, z)\leqslant W^0<\infty, \tag{2.62}$$

$$0<a_{11}^0\leqslant\left|\frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial x^2}\right|\leqslant A_{11}^0,\quad \left|\frac{\partial^2 H(x, y, z)}{\partial x\,\partial y}\right|\leqslant A_{12}^0, \tag{2.63}$$

то соотношение (2.61), в силу (2.57), дает на $[t_0, t_{**}(\varepsilon)]$:

$$|x(t, \varepsilon)|\leqslant C_2\sqrt{|h(t, \varepsilon)|},\quad |y(t, \varepsilon)|\leqslant C_2\sqrt{|h(t, \varepsilon)|}$$

$$\left(C_2=\max\left\{\sqrt{\frac{2A_{11}^0}{w_0}},\ \frac{\sqrt{2A_{11}^0}}{a_{11}^0}\left(1+\frac{A_{12}^0}{\sqrt{w_0}}\right)\right\}\right). \tag{2.64}$$

Но, по (2.56) — (2.58) и (2.63),

$$|h_1(t, \varepsilon)|\geqslant|h(t, \varepsilon)|-2\frac{\sqrt{|h(t, \varepsilon)|}}{2}C_3\varepsilon,\quad C_3=2C_2C_4$$

(в $\overline{G}_{00}$ при $\varepsilon\in[0, a]$ $|X(0, 0, z, \varepsilon)|$, $|Y(0, 0, z, \varepsilon)|\leqslant C_4$, C_4 — постоянная), т. е.

$$|h(t, \varepsilon)|\leqslant C_5(|h_1(t, \varepsilon)|+\varepsilon^2),\quad C_5=\max\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}C_3^2\right). \tag{2.65}$$

Соотношения (2.59), (2.60), (2.64), (2.65) дают:

$$\frac{dh_1^2}{dt}\leqslant 2|h_1|C_1\,[2C_2^2C_5(|h_1|+\varepsilon^2)+\varepsilon^2]\leqslant C_6(h_1^2+\varepsilon^4),$$

$$C_6=6C_1C_2^2C_5+C_1,$$

или

$$\frac{d\ln[(h_1^2+\varepsilon^4)e^{-C_6 t}]}{dt}\leqslant 0,$$

откуда следует, что на отрезке $[t_0, t_*(\varepsilon)]$ $\left(t_*(\varepsilon)=\begin{cases}t_{**}(\varepsilon) & \text{при } t_{**}(\varepsilon)\leqslant L\\ L & \text{при } t_{**}(\varepsilon)\geqslant L\end{cases}\right)$

$$h_1^2(t, \varepsilon)\leqslant[h_1^2(t_0, \varepsilon)+\varepsilon^4]\,e^{C_6(L-t_0)}-\varepsilon^4. \tag{2.66}$$

Но так как, в силу (2.56), (2.57), $h_1(t_0, \varepsilon)=0$, то, согласно (2.65),

$$|h(t, \varepsilon)\leqslant C_7\varepsilon^2,\quad C_7=C_5\left[e^{\frac{1}{2}C_6(L-t_0)}+1\right], \tag{2.67}$$

т. е. окончательно, по (2.64), (2.67),

$$|x(t, \varepsilon)|\leqslant C_8\varepsilon,\quad |y(t, \varepsilon)|\leqslant C_8\varepsilon\quad (C_8=C_2\sqrt{C_7}). \tag{2.68}$$

Для $z(t, \varepsilon)$ на отрезке $[t_0, t_*(\varepsilon)]$, на основании (2.1) и формулы конечных приращений (применимой в силу (2.55)), имеем:

$$\frac{dz}{dt} = Z(0, 0, \tilde{z}, 0) + \frac{\partial Z(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial x} x + \frac{\partial Z(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial y} y + $$
$$+ \frac{\partial Z(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial z} (z - \tilde{z}) + \frac{\partial Z(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial \varepsilon} \varepsilon$$

$$(x = x(t, \varepsilon), \quad y = y(t, \varepsilon), \quad z = z(t, \varepsilon), \quad \tilde{z} = \tilde{z}(t),$$
$$\{x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}\} \in \bar{G}_{00}, \ \varepsilon_{\text{ср}} \leqslant \varepsilon),$$

или, в силу (2.53), (2.68) и в силу гладкости функций $Z_j(x, y, z, \varepsilon)$ $(j = 1, \ldots, l)$ в замкнутой области $(x, y, z) \in \bar{G}_{00} \subset G_0$, $\varepsilon \in [0, a]$:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial Z(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial z} z_1 + O(\varepsilon),$$

где

$$z_1 = z - \tilde{z}, \qquad \left| \frac{\partial Z_i(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}}, \varepsilon_{\text{ср}})}{\partial z_j} \right| \leqslant C_9$$
$$(i, j = 1, \ldots, l), \quad \|O(\varepsilon)\| \leqslant C_9 \varepsilon \tag{2.69}$$

(C_9 — постоянная величина). Следовательно,

$$\frac{d\|z_1\|^2}{dt} \leqslant C_{10}(\|z_1\|^2 + \varepsilon^2), \quad C_{10} = (2l + \sqrt{l})\, C_9,$$

откуда получаем:

$$\frac{d \ln [(\|z_1\|^2 + \varepsilon^2)\, e^{-C_{10} t}]}{dt} \leqslant 0,$$

что дает:

$$\|z_1(t, \varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\|z_1(t_0, \varepsilon)\|^2 + \varepsilon^2}\, e^{\frac{1}{2} C_{10}(L - t_0)}, \tag{2.70}$$

или, по (2.69),

$$\|z(t, \varepsilon) - \tilde{z}(t)\| \leqslant C_{11} \varepsilon, \quad C_{11} = e^{\frac{1}{2} C_{10}(L - t_0)}. \tag{2.71}$$

Соотношения (2.68), (2.71) доказывают теорему 2 на отрезке $(t_0, t_*(\varepsilon)]$ $(\varepsilon \in (0, a])$. Но $t_*(\varepsilon) = L$ при любом $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon^0 = \min\left\{a, \frac{\rho_0}{2\sqrt{2C_8^2 + C_{11}^2}}\right\}\right)$. Действительно, в противном случае

$$t_*(\varepsilon) = t_{**}(\varepsilon) < L$$

и, по (2.68), (2.71),

$$\sqrt{x(t_{**}, \varepsilon)^2 + y(t_{**}, \varepsilon)^2 + \sum_{j=1}^{l} [z_j(t_{**}, \varepsilon) - \tilde{z}_j(t_{**})]^2} \leqslant \frac{\rho_0}{2},$$

что противоречит определению $t_{**}(\varepsilon)$.

Итак, $t_*(\varepsilon) = L$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, что доказывает теорему 2 полностью $(|O(\varepsilon)| \leqslant C^0 \varepsilon$. $C^0 = \max(C_8, C_{11}))$.

Примечание 1. *В теореме 1 (2) рассматриваемая область G (G_0) открытая, но если одна из переменных $z_1, \ldots, z_l$, например z_1, имеет замкнутый интервал изменения $z_{10} \leqslant z_1 \leqslant z_{1L}$, где*

$$z_{10} = \bar{z}_1(t_0) = z_1(t_0, \varepsilon), \quad (z_{10} = \tilde{z}_1(t_0) = z_1(t_0, \varepsilon)),$$

и если к тому же известно, что при всех $\varepsilon \in (0, a]$, $t \in (t_0, L)$

$$z_1(t, \varepsilon) \in (z_{10}, z_{1L}), \quad \bar{z}_1(L) = z_1(L, \varepsilon) = z_{1L} \quad (\tilde{z}_1(L) = z_1(L, \varepsilon) = z_{1L}),$$

то теорема 1 (2) остается справедливой, так как существует замкнутая ограниченная область

$$z_{10} \leqslant z_1 \leqslant z_{1L}, \quad \sqrt{[h - \bar{h}(t)]^2 + \sum_{j=2}^{l} [z_j - \bar{z}_j(t)]^2} \leqslant \rho \quad (t \in [t_0, L])$$

$$\left(z_{10} \leqslant z_1 \leqslant z_{1L}, \quad \sqrt{[x - \tilde{x}(t)]^2 + [y - \tilde{y}(t)]^2 + \sum_{j=2}^{l} [z_j - \tilde{z}_j(t)]^2} \leqslant \rho_0 \quad (t \in [t_0, L])\right),$$

содержащаяся в G_h (G_0), *которая и будет соответствовать области* $\overline{G}_{h\varepsilon}$ ($\overline{G}_{00}$) *в теореме об усреднении (в теореме 2), что следует из доказательства этих теорем.*

Примечание 2. *Из доказательства теоремы об усреднении и теоремы 2 видно, что если в теореме об усреднении брать*

$$v_i(t_0, \varepsilon) - \bar{v}_i(t_0) = O(\varepsilon), \quad (i = 1, \ldots, r),$$
$$\varphi(t_0, \varepsilon) - \bar{\varphi}(t_0, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad (|O(\varepsilon)| \leqslant d_0\varepsilon),$$

а в теореме 2 брать

$$x(t_0, \varepsilon) - f(z_0) = O(\varepsilon), \quad y(t_0, \varepsilon) - g(z_0) = O(\varepsilon),$$
$$z_j(t_0, \varepsilon) - \tilde{z}_j(t_0) = O(\varepsilon),$$
$$(j = 1, \ldots, l;\ z_0 = \tilde{z}(t_0),\ |O(\varepsilon)| \leqslant b_0\varepsilon)$$

($v(t_0, \varepsilon), \bar{v}(t_0) \in D$, $\{x(t_0, \varepsilon), y(t_0, \varepsilon), z(t_0, \varepsilon)\}, \{f(z_0), g(z_0), z_0\} \in G_0$; d_0, b_0*—постоянные), то утверждения этих теорем остаются в силе* [см. (2.28), (2.31), (2.37), (2.56), (2.66), (2.70)].

Следовательно, в теореме 1 можно брать

$$h(t_0, \varepsilon) - \bar{h}(t_0) = O(\varepsilon), \quad z_j(t_0, \varepsilon) - \bar{z}_j(t_0) = O(\varepsilon)$$
$$(j = 1, \ldots, l;\ |O(\varepsilon)| \leqslant a_0\varepsilon)$$

(a_0 — постоянная величина, точка $\{\bar{h}(t), \bar{z}(t)\} \in G_h$ и всегда не зависит от ε).

Возьмем некоторую замкнутую ограниченную область $\overline{G}_{r_0}$:

$$\overset{0}{z}_j - r_{j0} \leqslant z_j \leqslant \overset{0}{z}_j + \overset{0}{r}_j \quad (j = 1, \ldots, l),$$
$$|H(x, y, z) - H[f(z), g(z), z]| \leqslant r_0 \quad (0 < r_{j0}, \overset{0}{r}_j, r_0 < \infty)$$

такую, чтобы замкнутая ограниченная область $\overline{\Gamma}_{r_0}$ ($\overline{\Gamma}_{r_0} \supseteq \overline{G}_{r_0}$),

$$\overset{0}{z}_j - r_{j0} \leqslant z_j \leqslant \overset{0}{z}_j + \overset{0}{r}_j \quad (j = 1, \ldots, l),$$

$$[x - f(z)]^2 + [y - g(z)]^2 \leqslant r_{00} - \sup_{(x,y,z)\in\overline{G}_{r_0}} \{[x - f(z)]^2 + [y - g(z)]^2\},$$

содержалась в G_0.

Обозначим через $\widetilde{G}_0$ ($\widetilde{G}_{r_0}$) область, совпадающую с областью G_0 ($\overline{G}_{r_0}$), если из последней исключить точки $\{f(z), g(z), z\}$, через G_{0h} (G_{r_0h}) — множество точек (h, z), в которое переходит $G_0(\overline{G}_{r_0})$, если принять $h = H(x, y, z)$, $z = z$, и через $\widetilde{G}_{0h}$ ($\widetilde{G}_{r_0h}$) — множество точек (h, z), в которое переходит $\widetilde{G}_0$ ($\widetilde{G}_{r_0}$), если принять $h = H(x, y, z)$, $z = z$.

В этих обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Пусть в G_0 выполнены условия теоремы 1, касающиеся гладкости правых частей системы (2.1). Тогда если решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) имеет начальные условия*

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \quad y(t_0, \varepsilon) = y_0, \quad z(t_0, \varepsilon) = z_0 \quad ((x_0, y_0, z_0) \in \widetilde{G}_{r_0})$$

и если решение $\{\bar{h}(t), \bar{z}(t)\}$ усредненной системы (2.8) с начальными условиями

$$\bar{h}(t_0) = h_0 = H(x_0, y_0, z_0), \quad \bar{z}(t_0) = z_0$$

не выходит из $\overline{G}_{r_0h}$ на некотором конечном промежутке времени $[t_0, L]$, то решение $\{\bar{h}(t), \bar{z}(t)\}$ не выходит на $[t_0, L]$ и из $\widetilde{G}_{r_0h}$ и, следовательно, решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) описывается теоремой 1.

Доказательство. Так же, как в теореме 2, будем считать, что

$$f(z) = 0, \quad g(z) = 0, \quad H(0, 0, z) = 0, \tag{2.72}$$

т. е. что $\widetilde{G}_{r_0h}$ совпадает с $\overline{G}_{r_0h}$, если из $\overline{G}_{r_0h}$ исключить точки $(0, z) \in \overline{G}_{r_0h}$. Покажем, что $\{\bar{h}(t), \bar{z}(t)\}$ не выходит на $[t_0, L]$ из $\widetilde{G}_{r_0h}$.

Действительно, в противном случае, по любому $\delta > 0$ можно было бы найти такое значение $t_\delta \in (t_0, L]$, что

$$\{\bar{h}(t_\delta), \bar{z}(t_\delta)\} \in \widetilde{G}_{r_0h}, \quad |\bar{h}(t_\delta)| < \delta. \tag{2.73}$$

Но, с другой стороны, в силу (2.17), имеем:

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \int_0^1 \Big[X(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z})}{\partial x} + Y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z})}{\partial y} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} Z_j(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z})}{\partial z_j}\Big] d\varphi \quad (\overset{*}{x} = \overset{*}{x}(\varphi, \bar{h}, \bar{z}), \ \overset{*}{y} = \overset{*}{y}(\varphi, \bar{h}, \bar{z}))$$

или

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \int_0^1 \Big\{[X(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) - X(0, 0, \bar{z}, 0)] \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z})}{\partial x} +$$

$$+ [Y(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) - Y(0, 0, \bar{z}, 0)] \frac{\partial H(\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z})}{\partial y} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} Z_j (\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, \bar{z}, 0) \frac{\partial H (\overset{*}{x}, \overset{*}{y}, z)}{\partial z_j} \Big\} d\varphi, \qquad (2.74)$$

поскольку, по (2.12),

$$\int_0^1 \frac{\partial H [\overset{*}{x} (\varphi, h, z), \overset{*}{y} (\varphi, h, z), z]}{\partial x} d\varphi = \oint_{H(x,y,z)=h} \left[-\frac{1}{T (h, z)}\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{T (h, z)} \oint_{H(x,y,z)=h} dy = 0,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial H [\overset{*}{x} (\varphi, h, z), \overset{*}{y} (\varphi, h, z), z]}{\partial y} d\varphi = \oint_{H(x,y,z)=h} \frac{1}{T (h, z)} dx = 0.$$

Подынтегральная функция правой части соотношения (2.74) является однородной квадратичной относительно x, y, что следует из формул Тейлора, примененных к функциям

$$X (x, y, z, 0), \quad \frac{\partial H (x, y, z)}{\partial x}, \quad Y (x, y, z, 0), \quad \frac{\partial H (x, y, z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H (x, y, z)}{\partial z_j} \quad (j = 1, \ldots, l)$$

относительно x, y (применимость формул Тейлора в $\bar{\Gamma}_{r_0}$ относительно x, y следует из выпуклости области $\bar{\Gamma}_{r_0}$ при каждом $z = \text{const}$). Но соотношения (2.62), (2.63) и (2.52) дают (подобно формуле (2.64)):

$$| x | \leqslant K_1 \sqrt{| h |}, \quad | y | \leqslant K_2 \sqrt{| h |}$$

($h = H (x, y, z)$, $(x, y, z) \in \bar{\Gamma}_{r_0}$, K_1, K_2 — постоянные величины). Поэтому на отрезке $[t_0, t_8]$ имеем:

$$\left| \frac{d\bar{h}}{dt} \right| \leqslant K_0 \, | \bar{h} (t) |$$

(K_0 — постоянная величина, $\{\overset{*}{x} (\varphi, \bar{h}, \bar{z}), \overset{*}{y} (\varphi, \bar{h}, \bar{z}), \bar{z}\} \in \tilde{G}_{r_0} \leqslant \bar{\Gamma}_{r_0}$, поскольку $\{\bar{h} (t), \bar{z} (t)\} \in \tilde{G}_{r_0 h}$ на отрезке $[t_0, t_8]$). Из последнего соотношения следует:

$$\frac{d \ln \{[\bar{h} (t)]^2 e^{2K_0 t}\}}{dt} \geqslant 0,$$

откуда получаем:

$$| \bar{h} (t) | \geqslant | \bar{h} (t_0) | \, e^{-K_0(t-t_0)} \geqslant | \bar{h} (t_0) | \, e^{-K_0(L-t_0)} > 0,$$

т. е.

$$| \bar{h} (t_8) | \geqslant | \bar{h} (t_0) | \, e^{-K_0(L-t_0)} = | \, h_0 \, | \, e^{-K_0(L-t_0)},$$

что противоречит соотношению (2.73) при $\delta = | h_0 | \, e^{-K_0(L-t_0)}$. Следовательно, на всем промежутке времени $[t_0, L]$ решение $\{\bar{h} (t), \bar{z} (t)\}$ остается в $\tilde{G}_{r_0 h} \subset \tilde{G}_{0h}$. Но область $\tilde{G}_{0h}$ — типа G_h в теореме 1, и поэтому решение $\{x (t, \varepsilon), y (t, \varepsilon), z (t, \varepsilon)\}$ системы (2.1) описывается на отрезке $[t_0, L]$ теоремой 1. Теорема 3 доказана.

Примечание 3. *Теоремы 1—3 справедливы и в том случае, когда рассматривается промежуток времени* $[L, t_0]$ $(-\infty < L < t_0)$, так как замена t на $-t$ сохраняет вид системы (2.1) (H переходит в $-H$), а промежуток времени $[L, t_0]$ переходит в $[-t_0, -L]$, на котором теоремы 1—3, по доказанному, справедливы.

§ 3. Вывод результатов работ ([8])—([12]) из теорем 1—3

В работах ([8]) — ([12]) В. М. Волосовым рассматривается уравнение

$$\mu \overset{(n)}{u} + Q(t, u, \acute{u}, \ldots, \overset{(n-2)}{u}) = \sqrt{\mu} F(t, u, \acute{u}, \ldots, \sqrt{\mu} \overset{(n-1)}{u}, \sqrt{\mu}), \quad (3.1)$$

где μ — малый положительный параметр, причем в работах ([8]), ([9])

$$n = 2, \quad F = 0, \quad Q(t, u) = 0 \rightleftarrows u = 0,$$

в работе ([10])

$$n = 2, \quad F = 0, \quad Q(t, u) = 0 \rightleftarrows u = f(t),$$

в работе ([11])

$$n = n, \quad F = 0, \quad Q(t, u, \ldots, \overset{(n-2)}{u}) = 0 \rightleftarrows \overset{(n-2)}{u} = f(t, u, \ldots, \overset{(n-3)}{u}),$$

в работе ([12])

$$n = 2, \quad Q(t, u) = 0 \rightleftarrows u = 0.$$

Предполагая в области $t \in [t_0, \bar{t}]$, $u, \dot{u}, \ldots, \overset{(n-1)}{u}, \sqrt{\mu} \overset{(n-1)}{u} \in (-\infty, \infty)$, $\mu \in [0, \mu_0]$, что

1) вырожденное уравнение

$$Q(t, u, \acute{u}, \ldots, \overset{(n-2)}{u}) = 0 \quad (3.2)$$

имеет корень

$$\overset{(n-2)}{u} = f(t, u, \acute{u}, \ldots, \overset{(n-3)}{u}), \quad (3.3)$$

2) $m |\overset{(n-2)}{u} - f| \leqslant |Q| \leqslant M |\overset{(n-2)}{u} - f|$

$(0 < m, M$ — постоянные величины), (3.4)

3) $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign}(\overset{(n-2)}{u} - f)$, (3.5)

4) функции $f(Q)$ и F достаточно гладкие,

В. М. Волосов получил, что на $[t_0, \bar{t}]$ решение $u(t, \mu)$ уравнения (3.1) с начальными условиями

$$u(t_0, \mu) = u_0, \quad \dot{u}(t_0, \mu) = \dot{u}_0, \ldots, \overset{(n-1)}{u}(t_0, \mu) = \overset{(n-1)}{u_0}$$

обладает следующими свойствами: если положить $f_0 = f(t_0, u_0, \ldots, \overset{(n-3)}{u_0})$, то

1. При $\overset{(n-2)}{u_0} = f_0$ решение $u(t, \mu)$ и его производные $\dot{u}(t, \mu), \ldots$ $\ldots, \overset{(n-2)}{u}(t, \mu)$ при $\mu \to 0$ равномерно стремятся к решению $\tilde{u}(t)$ уравнения (3.3) и соответствующим его производным.

2. При $\overset{(n-2)}{u_0} \neq f_0$ решение $u(t,\mu)$ и его производные $\overset{\prime}{u}(t,\mu)$, $\overset{\prime\prime}{u}(t,\mu), \ldots$ $\ldots, \overset{(n-3)}{u}(t,\mu)$ при $\mu \to 0$ равномерно стремятся к некоторым предельным функциям $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-3}(t)$, а производная $\overset{(n-2)}{u}(t,\mu)$ представима в виде

$$\overset{(n-2)}{u}(t,\mu) = f[t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-3}(t)] +$$

$$+ x_*(t,\mu)\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} f'_{\overset{(n-3)}{u}}[t_1, \varphi_0(t_1), \ldots, \varphi_{n-3}(t_1)]\, dt_1} + \sigma_0(\mu),$$

где $\overset{P}{\lim\limits_{\mu\to 0}} \sigma_0(\mu) = 0$, функция $x_*(t,\mu)$ — колеблющаяся с периодом порядка $O(\sqrt{\mu})$ и ее экстремумы «упираются» в опорные кривые $F_1^*(t)$, $F_2^*(t)$, для которых вместе с предельными функциями $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-3}(t)$ выведена общая система уравнений [см. ([11]), система (XIV), и ([12]), система (3)].

Покажем, как утверждения 1 и 2 можно вывести из теорем 1—3. Уравнение (3.1) в обозначениях

$$\sqrt{\mu} = \varepsilon, \quad \overset{(n-1)}{u_0} = \dot{x}_0, \quad t = z_1, \quad u = z_2, \ldots, \overset{(n-3)}{u} = z_{n-1},$$

$$\overset{(n-2)}{u} = x, \quad \varepsilon \frac{dx}{dt} = y, \tag{3.6}$$

$$H(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \frac{y^2}{2} + \int\limits_{f(z_1, \ldots, z_{n-1})}^{x} Q(z_1, \ldots, z_{n-1}, p)\, dp \tag{3.7}$$

равносильно системе

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial y}, \\
&\varepsilon \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x, y, z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial x} + \varepsilon F(z_1, \ldots, z_{n-1}, x, y, \varepsilon), \\
&\frac{dz_1}{dt} = 1 \quad (z_1(t_0) = t_0), \\
&\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1} \quad (i = 2, \ldots, n-2), \\
&\frac{dz_{n-1}}{dt} = x,
\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

которая является системой типа (2.1) с

$$X(x, y, z, \varepsilon) = 0, \quad Y(x, y, z, \varepsilon) = F(z, x, y, \varepsilon),$$

$$Z_1(x, y, z, \varepsilon) = 1, \quad Z_i(x, y, z, \varepsilon) = z_{i+1} \quad (i = 2, \ldots, n-2),$$

$$Z_{n-1}(x, y, z, \varepsilon) = x, \quad z = \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

В области G^*: $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $z_1 \in [t_0, \bar{t}]$, $|z_2|, \ldots, |z_{n-1}| < \infty$

правые части системы (3.8) удовлетворяют условиям гладкости, требуемым в теореме 1 от правых частей системы (2.1).

Соответствующая гамильтонова система

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = y, \qquad \varepsilon \frac{dy}{dt} = -Q(z, x) \tag{3.9}$$

имеет на каждой плоскости $z = \text{const}$ $(z_1 \in [t_0, \bar{t}])$ положение равновесия $\{x = f(z), y = 0, z\}$ типа невырожденного центра, поскольку, в силу (3.4) — (3.6), при всех $z \in G^*$

$$Q'_x(z, x)\,|_{x=f(z)} > 0. \tag{3.10}$$

Поэтому если из области G исключить точки $\{f(z), 0, z\}$, то мы получим область G типа G в примечании 1 к теореме 1, часть же области G^* (окрестность кривой $\{f(z), 0, z\}$), составленная из траекторий системы (3.9), где $Q'_x(z, x) > 0$, будет областью G_0 типа G_0 в примечании 1 к теореме 2. Поэтому из теоремы 2 и примечаний 1, 2 вытекает следующий результат: существует число $\varepsilon^0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, $t \in [t_0, \bar{t}]$ решение $\{x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (3.8) с начальными условиями

$$x(t_0, \varepsilon) = f(z_0), \qquad y(t_0, \varepsilon) = \varepsilon x'_0, \quad z(t_0, \varepsilon) = z_0 \qquad (x'_0 = \text{const})$$

совпадает с решением $\{\tilde{x}(t) = f[\tilde{z}(t)], \tilde{y}(t) = 0, \tilde{z}(t)\}$ вырожденной системы

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} = 0 \quad (y = 0),\\
&\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} = 0 \quad (x = f(z)),\\
&\frac{dz_1}{dt} = 1,\\
&\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1} \quad (i = 2, \ldots, n-2),\\
&\frac{dz_{n-1}}{dt} = x
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}(t_0) = f(z_0), \quad \tilde{y}(t_0) = 0, \quad \tilde{z}(t_0) = z_0 \qquad (z_0 = \{t_0, u_0, \ldots, \overset{(n-3)}{u_0}\})$$

с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$.

В силу (3.6), этот результат и есть утверждение 1.

Докажем теперь утверждение 2.

Соответствующая системе (3.8) усредненная система имеет, в силу (2.8), следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dh}{dt}=\frac{\oint\limits_{H(x,y,z)=h}\{yF(z,x,y,0)+\Phi(x,z)\}[Q(z,x)^2+y^2]^{-\frac{1}{2}}ds}{\oint\limits_{H(x,y,z)=h}[Q(z,x)^2+y^2]^{-\frac{1}{2}}dt},\\
&\frac{dz_1}{dt}=1\quad(z_1(t_0)=t_0),\\
&\frac{dz_i}{dt}=z_{i+1}\quad(i=2,3,\ldots,n-2),\\
&\frac{dz_{n-1}}{dt}=\frac{\oint\limits_{H(x,y,z)=h}x[Q(z,x)^2+y^2]^{-\frac{1}{2}}ds}{\oint\limits_{H(x,y,z)=h}[Q(z,x)^2+y^2]^{-\frac{1}{2}}ds},
\end{aligned}\right\}\quad(3.12)$$

где

$$\Phi(x,z)=\int\limits_{f(z)}^{x}\left[Q'_{z_1}(z,p)+\sum_{i=2}^{n-2}z_{i+1}Q'_{z_i}(z,p)+xQ'_{z_{n-1}}(z,p)\right]dp.$$

В силу теоремы 3 и вида системы (3.12), решение

$$\{\bar h(t),\ \bar z_1(t)=t,\ \bar z_2(t),\ \ldots,\ \bar z_{n-1}(t)\}$$

системы (3.12) с начальными условиями

$$\bar h(t_0)=\bar h_0=H(x_0,\bar y_0,z_0),\quad \bar z_1(t_0)=t_0,$$

$$z_2(t_0)=z_{20},\ \ldots,\ z_{n-1}(t_0)=z_{n-10}$$

$$(x_0=\overset{(n-2)}{u_0}\neq f_0,\quad \bar y_0=0,\quad z_0=\{t_0,u_0,\ldots,\overset{(n-3)}{u_0}\})$$

определено и остается в G_h на отрезке $[t_0,\bar t]$. Поэтому, согласно теореме 1 (см. примечания 1, 2), функции

$$h(t,\varepsilon)=H[x(t,\varepsilon),y(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon)],\quad z_1(t,\varepsilon),\ \ldots,\ z_{n-1}(t,\varepsilon)$$

совпадают с предельными функциями $\bar h(t)$, $\bar z_1(t)$, ..., $\bar z_{n-1}(t)$ с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$, а согласно следствию теоремы 1 имеем:

1) функции $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ являются функциями, колеблющимися около $f[\bar z(t)]$, 0 с периодом, равным $\varepsilon T[\bar h(t),\bar z(t)]$, с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ (следовательно, функция $x_*(t,\varepsilon)$, определяемая из формулы

$$x(t,\varepsilon)=f[z(t,\varepsilon)]+x_*(t,\varepsilon)\,e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}f'_{z_{n-1}}[z(t_1,\varepsilon)]dt_1},\qquad(3.13)$$

такая же, но колеблющаяся около нуля);

2) экстремумы функции $x(t, \varepsilon)$ с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ упираются в опорные кривые $F_1(t)$ и $F_2(t)$ $(F_1(t) > f[\bar{z}(t)],\ F_2(t) < f[\bar{z}(t)])$, являющиеся соответственно максимумом и минимумом для x на фазовой траектории $H[x, y, \bar{z}(t)] = \bar{h}(t)$ системы (3.9).

Таким образом, в силу (3.7), функции $F_1(t)$, $F_2(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\int_{f[\bar{z}(t)]}^{F_j(t)} Q[\bar{z}(t), p]\, dp = \bar{h}(t), \quad j = 1, 2. \tag{3.14}$$

Дифференцирование уравнений (3.14) по t дает вместе с системой (3.12) систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $F_1(t), F_2(t), \bar{z}_1(t), \ldots, \bar{z}_{n-1}(t)$ и которая равносильна системе (XIV) работы ([11]) и системе (3) работы ([12]) для функций $F_1^*(t)$, $F_2^*(t)$, $\bar{z}_1(t), \ldots$ $\ldots, \bar{z}_{n-1}(t)$, где $F_1^*(t)$, $F_2^*(t)$ — опорные кривые для $x_*(t, \varepsilon)$, т. е.

$$F_j^*(t) = \{F_j(t) - f[\bar{z}(t)]\}\, e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} f'_{z_{n-1}}[\bar{z}(t_1)]\,dt_1} \tag{3.15}$$

Чтобы убедиться в равносильности систем, достаточно для системы (3) работы ([12]) провести простые преобразования, а для системы (XIV) работы ([11]) сделать замену (3.15) и продифференцировать правые и левые части системы (XIV).

Таким образом, утверждение 2 доказано.

Поступило
16.III.1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21(1957), 605—626.

2 Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 5 (1955), 889—891.

3 Мищенко Е. Ф., Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 627—654.

4 Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23(1959), 643—660.

5 Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сборн., 31(73) : 3 (1952), 574—586.

6 Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва, 1955.

7 Митропольский Ю. А., Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд. АН УССР, 1955.

8 Волосов В. М., Дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 5 (1950), 145—147.

[9] Волосов В. М., К вопросу о дифференциальных уравнениях с малым параметром при старшей производной, Доклады Ак. наук СССР, 73, № 5 (1950), 873—876.
[10] Волосов В. М., Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной, Матем. сборн., 30 (72) : 2 (1952), 245—270.
[11] Волосов В. М., К теории нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при старшей производной, Матем. сборн., 31 (73):3 (1952), 645—674.
[12] Волосов В. М., Дифференциальные уравнения движения, содержащие параметр медленности, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 1 (1956), 7—10.
[13] Макаева Г. С., Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы «быстрых движений» которых близки к гамильтоновым, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 6 (1958), 973—976.
[14] Волосов В. М., Уравнения колебаний с медленно изменяющимися параметрами, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 1 (1958), 22—25.
[15] Волосов В. М., Асимптотика интегралов возмущенных систем, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 6 (1958), 959—962.
[16] Волосов В. М., О решениях некоторых возмущенных систем в окрестности периодических движений, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 4 (1959), 587—590.
[17] Аносов Д. В., Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро колеблющимися решениями, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 721—742.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 717—748

Е. Н. МОЧУЛЬСКИЙ

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В СТРУКТУРАХ. I

Работа посвящена вопросу существования прямо подобных продолжений для двух произвольных прямых разложений единицы модулярной структуры с конечным числом слагаемых.

Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании прямо подобных продолжений для двух прямых разложений единицы модулярной структуры лишь с конечным числом слагаемых. Для случая прямых разложений с бесконечным множеством слагаемых этот вопрос будет рассмотрен в следующей работе II, в которой существенно используются результаты настоящей статьи.

Введенная в § 1 гипотеза расщепления, частным случаем которой являются гипотезы расщепления, указанные в работах (4) и (3), позволила полностью решить вопрос, когда пара прямых разложений единицы структуры S с двумя слагаемыми каждое обладает каноническими продолжениями (теорема 1); в этом же параграфе приводятся условия, при которых такая пара прямых разложений единицы структуры S обладает единственными каноническими продолжениями (теорема 3).

Теоремы 1 и 4 § 1, представляющие собой обобщения соответственно теорем 4 и 5 работы (2), используются в § 3 для доказательства теоремы 10, частными случаями которой являются все остальные результаты этого параграфа и результаты § 2 работы (2).

В § 2 рассматриваются вопросы, связанные с частными случаями гипотезы расщепления.

Так как в настоящей статье используются многие понятия и результаты работы (1), то последняя предполагается известной.

Из результатов настоящей работы как частные случаи следуют соответствующие результаты работ (2), (3) и (4).

§ 1

Всюду в дальнейшем, если это не будет особо оговорено, рассматривается модулярная структура с нулем и единицей.

Определение 1. Если даны два произвольных прямых разложения единицы структуры S:

$$1 = a_1 \dotplus a_2 = b_1 \dotplus b_2, \tag{1}$$

то отображение, ставящее в соответствие элементу $x \in S$ его компоненту * в прямом слагаемом a_i, $i = 1, 2$, или b_j, $j = 1, 2$, будем называть *эндо-*

* См. (5), стр. 291.

морфизмом разложения структуры S и обозначать соответственно через φ_i, $i = 1, 2$, и θ_j, $j = 1, 2$.

Произведение эндоморфизмов разложения (взятых в конечном числе) назовем *эндоморфизмом структуры* S. (Здесь под произведением эндоморфизмов разложения понимается результат их последовательного применения.)

ЛЕММА 1. *Если эндоморфизм* $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* a, *то* $(a\theta_1)a_2 = 0$.

Действительно, так как эндоморфизм θ_1 индуцирует отображение элемента a на элемент $a\theta_1$, то, согласно лемме 3 работы ([2]), существует такой элемент $x \leqslant a$, что

$$x\theta_1 = (a\theta_1)\, a_2.$$

Отсюда имеем:

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1 = (a\theta_1 \cdot a_2)\, \varphi_1 = 0,$$

т. е.

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0.$$

Следовательно, $x = 0$, так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a, и поэтому

$$a\theta_1 \cdot a_2 = 0.$$

Определение 2. Если прямые разложения (1) обладают продолжениями

$$\begin{gathered} a_1 = a_1' + a_1'', \quad a_2 = a_2' + a_2'', \\ b_1 = b_1' + b_1'', \quad b_2 = b_2' + b_2'', \end{gathered} \tag{2}$$

которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{gathered} a_1' + a_2' = a_2' + b_1' = b_1' + b_2' = b_2' + a_1', \\ a_1'' + b_1'' = b_1'' + b_2'' = b_2'' + a_2'' = a_2'' + a_1'', \end{gathered} \tag{3}$$

то эти продолжения называются *каноническими продолжениями* прямых разложений (1).

Будем говорить, что в структуре S выполняется гипотеза расщепления, если по крайней мере одно из прямых слагаемых (1), например a_1, разлагается в такую прямую сумму

$$a_1 = a_1' + a_1'',$$

что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм элемента a_1''.

ТЕОРЕМА 1. *Два произвольных прямых разложения единицы структуры* S *с двумя прямыми слагаемыми каждое:*

$$1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

тогда и только тогда обладают каноническими продолжениями, если в структуре S *выполняется гипотеза расщепления.*

Доказательство. 1°. Пусть в структуре S выполняется гипотеза расщепления. Тогда одно из прямых слагаемых, например a_1, разлагается в такую прямую сумму

$$a_1 = a_1' + a_1'',$$

что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм элемента a_1''. Следовательно, на основании леммы 1 работы (2) и леммы 1 настоящей работы, из равенств

$$a_1'\varphi_1\theta_1\varphi_1 = a_1'$$

и

$$a_1''\varphi_1\theta_2\varphi_1 = a_1''$$

получим:

$$a_1'\theta_1 + a_2 = a_1' + a_2, \quad a_1''\theta_2 + a_2 = a_1'' + a_2,$$

откуда выводим:

$$a_1'\theta_1 + (a_2 + a_1'') = (a_1' + a_2) + a_1'' = 1,$$
$$a_1''\theta_2 + (a_2 + a_1') = (a_1'' + a_2) + a_1' = 1.$$

Так как структура модулярна, то, умножая обе части первого равенства на b_1, а второго — на b_2, получим:

$$b_1 = a_1'\theta_1 + b_1(a_2 + a_1''), \quad b_2 = a_1''\theta_2 + b_2(a_2 + a_1').$$

Положим

$$a_1'\theta_1 = b_1', \quad b_1(a_2 + a_1'') = b_1'', \quad a_1''\theta_2 = b_2'',$$
$$b_2(a_2 + a_1') = b_2', \quad a_2(b_2 + a_1') = a_2', \quad a_2(b_1 + a_1'') = a_2''$$

и покажем, что

$$a_2 = a_2' + a_2''.$$

Действительно, эндоморфизм φ_2 индуцирует изоморфное отображение элемента b_2' на a_2', так как

$$b_2'\varphi_2 = [b_2(a_2 + a_1') + a_1]\,a_2 = [b_2(a_2 + a_1') + a_1' + a_1'']$$
$$= [(b_2 + a_1')(a_2 + a_1') + a_1'']\,a_2 = [a_2(b_2 + a_1') + a_1]$$
$$= a_2(b_2 + a_1') + a_1a_2 = a_2(b_2 + a_1') = a_2',$$

т. е. имеем:

$$b_2'\varphi_2 = a_2'.$$

Пусть для элемента $x \leqslant b_2'$ выполняется равенство $x\varphi_2 = 0$. Тогда, согласно лемме 1 работы (2), из последнего равенства следует, что $x + a_1 = a_1$, т. е. $x \leqslant a_1$, и поэтому

$$x \leqslant a_1 \cdot b_2' = b_2 \cdot a_1'.$$

Но так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1', то из соотношений

$$b_2a_1' \leqslant a_1'$$

и

$$(b_2a_1')\,\varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0$$

вытекает равенство $b_2 \cdot a_1' = 0$ и поэтому $x = 0$.

С другой стороны, эндоморфизм θ_2 индуцирует изоморфное отображение a_2' на элемент b_2'.

В самом деле,

$$a_2'\theta_2 = [a_2(b_2 + a_1') + b_1]\, b_2 = [a_2(b_2 + a_1'\theta_1) + b_1' + b_1'']\, b_2 =$$
$$= [(a_2 + b_1')(b_2 + a_1'\theta_1) + b_1'']\, b_2 = [b_2(a_2 + b_1') + b_1'] b_2 =$$
$$= b_2(a_2 + b_1') = b_2(a_2 + a_1'\theta_1).$$

Но, согласно лемме 1 работы (2),

$$a_2 + a_1'\theta_1 = a_2 + a_1'\varphi_1\theta_1\varphi_1$$

и поэтому

$$b_2(a_2 + a_1'\theta_1) = b_2(a_2 + a_1'\varphi_1\theta_1\varphi_1) = b_2(a_2 + a_1') = b_2'.$$

Следовательно,

$$a_2'\theta_2 = b_2'.$$

Если для элемента $x \leqslant a_2'$ выполняется равенство $x\,\theta_2 = 0$, то, по лемме 1 работы (2), $x + b_1 = b_1$, т. е. $x \leqslant b_1$. Значит,

$$x \leqslant b_1 a_2' = a_2 \cdot a_1'\theta_1.$$

Но, в силу леммы 1, $a_2 \cdot a_1'\theta_1 = 0$; поэтому из предыдущих соотношений следует, что $x = 0$. Отсюда, на основании следствия 2 леммы 4 работы (1), заключаем, что эндоморфизм $\theta_2\varphi_2\theta_2$ индуцирует автоморфизм элемента b_2', а эндоморфизм $\varphi_2\theta_2\varphi_2$ — автоморфизм элемента a_2'.

Согласно лемме 1 работы (2) и лемме 1 настоящей работы, из равенств

$$b_2'\theta_2\varphi_2\theta_2 = b_2', \quad a_2'\varphi_2\theta_2\varphi_2 = a_2'$$

вытекают равенства:

$$b_2'\varphi_2 + b_1 = b_1 + b_2', \quad a_2'\theta_2 + a_1 = a_1 + a_2'.$$

Но так как

$$b_2'\varphi_2 = a_2', \quad a_2'\theta_2 = b_2',$$

то

$$a_2' + b_1 = b_1 + b_2', \quad b_2' + a_1 = a_1 + a_2'. \tag{4}$$

Прибавляя к обеим частям первого равенства элемент b_2'', получим:

$$a_2' + (b_1 + b_2'') = (b_1 + b_2') + b_2'' = 1.$$

Умножая обе части этого равенства на a_2 и учитывая при этом, что $b_1 + b_2'' = b_1 + a_1''$, будем иметь:

$$a_2 = a_2' + a_2(b_1 + a_1'') = a_2' + a_2''.$$

Далее, эндоморфизм θ_1 индуцирует изоморфное отображение элемента a_1' на элемент b_1'. Действительно, $a_1'\theta_1 = b_1'$.

Если для элемента $x \leqslant a_1'$ выполняется равенство $x\theta_1 = 0$, то на

основании леммы 1 работы (²) $x + b_2 = b_2$, т. е. $x \leqslant b_2$. Значит, $x \leqslant b_2 \cdot a_1' = 0$, откуда следует, что $x = 0$.

С другой стороны, эндоморфизм φ_1 индуцирует изоморфное отображение элемента b_1' на элемент a_1'. В самом деле, $b_1'\varphi_1 = a_1'$. Если для элемента $x \leqslant b_1'$ выполняется равенство $x\varphi_1 = 0$, то, по лемме 1 работы (²), $x + a_2 = a_2$ и поэтому $x \leqslant a_2$. Значит, $x \leqslant a_2 \cdot b_1' = 0$ (равенство $a_2 \cdot b_1' = 0$ следует из леммы 1). Из последнего неравенства вытекает, что $x = 0$.

Отсюда, на основании следствия 2 леммы 4 работы (¹), заключаем, что эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента b_1'. Из равенств

$$a_1'\varphi_1\theta_1\varphi_1 = a_1', \quad b_1'\theta_1\varphi_1\theta_1 = b_1',$$

в силу леммы 1 работы (²) и леммы 1 настоящей работы, вытекают равенства:

$$a_1'\theta_1 + a_2 = a_1' + a_2, \quad b_1'\varphi_1 + b_2 = b_1' + b_2.$$

Но так как

$$a_1'\theta_1 = b_1', \quad b_1'\varphi_1 = a_1',$$

то

$$b_1' + a_2 = a_1' + a_2, \quad a_1' + b_2 = b_2 + b_1'. \tag{5}$$

Полученные равенства (4) и (5) позволяют доказать справедливость первого ряда равенств (3).

Введем обозначения:

$$p = a_2 + a_1' = a_2 + b_1', \quad q = b_2 + a_1' = b_2 + b_1';$$

тогда имеют место следующие равенства:

$$a_2 \cdot pq = a_2 \cdot q = a_2 (b_2 + b_1') = a_2 (b_2 + a_1') = a_2',$$
$$b_2 \cdot pq = b_2 \cdot p = b_2 (a_2 + a_1') = b_2'.$$

Так как $pq \geqslant a_1'$, $pq \geqslant b_1'$, то

$$pq = a_1' + (a_2 \cdot pq) = a_1' + a_2' = a_1' + (b_2 \cdot pq) = a_1' + b_2' =$$
$$= b_1' + (a_2 \cdot pq) = b_1' + a_2' = b_1' + (b_2 \cdot pq) = b_1' + b_2'.$$

Докажем теперь справедливость второго ряда равенств (3). Эндоморфизм θ_2 индуцирует изоморфное отображение элемента a_1'' на элемент b_2''. В самом деле,

$$a_1''\theta_2 = b_2''.$$

Если для элемента $x \leqslant a_1''$ выполняется равенство $x\theta_2 = 0$, то, на основании леммы 1 работы (²), $x + b_1 = b_1$, т. е. $x \leqslant b_1$; значит, $x \leqslant b_1 a_1''$. Но эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1'', поэтому из соотношений

$$b_1 a_1'' \leqslant a_1''$$

и

$$(b_1 a_1'')\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0$$

вытекает равенство $b_1 a_1'' = 0$, откуда следует, что $x = 0$.

С другой стороны, эндоморфизм φ_1 индуцирует изоморфное отображение элемента b_2'' на элемент a_1''. В самом деле,

$$b_2''\varphi_1 = a_1''.$$

Если для $x \leqslant b_2''$ выполняется равенство $x\varphi_1 = 0$, то, на основании леммы 1 работы (2), $x + a_2 = a_2$, т. е. $x \leqslant a_2$; значит, $x \leqslant b_2'' \cdot a_2$. Но, согласно лемме 1, $b_2'' \cdot a_2 = 0$; поэтому из соотношения $x \leqslant b_2'' a_2 = 0$ следует, что $x = 0$. Отсюда, на основании следствия 2 леммы 4 работы (1), заключаем, что эндоморфизм $\theta_2\varphi_1\theta_2$ индуцирует автоморфизм элемента b_2''. В силу условия теоремы, имеем, кроме того, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1''; поэтому из равенств

$$a_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = a_1'', \quad b_2''\theta_2\varphi_1\theta_2 = b_2'',$$

согласно лемме 1 работы (2) и лемме 1 настоящей работы, следует:

$$a_1''\theta_2 + a_2 = a_2 + a_1'', \quad b_2''\varphi_1 + b_1 = b_1 + b_2'',$$

или, так как $a_1''\theta_2 = b_2''$, $b_2''\varphi_1 = a_1''$,

$$b_2'' + a_2 = a_2 + a_1'', \quad a_1'' + b_1 = b_1 + b_2''. \tag{6}$$

Покажем теперь, что эндоморфизм φ_2 индуцирует изоморфное отображение элемента b_1'' на элемент a_2''. Действительно,

$$b_1''\varphi_2 = [b_1(a_2 + a_1'') + a_1]\, a_2 = [b_1(a_2 + a_1'') + a_1'' + a_1']\, a_2 =$$

$$= [(b_1 + a_1'')(a_2 + a_1'') + a_1']\, a_2 = [a_2(b_1 + a_1'') + a_1]\, a_2 = a_2(b_1 + a_1'') = a_2'';$$

отсюда следует:

$$b_1''\varphi_2 = a_2''.$$

Пусть $x \leqslant b_1''$ и $x\varphi_2 = 0$. Тогда, по лемме 1 работы (2), $x + a_1 = a_1$, т. е. $x \leqslant a_1$. Значит,

$$x \leqslant a_1 b_1'' = b_1 \cdot a_1''.$$

Но эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1'', поэтому из соотношений

$$b_1 a_1'' \leqslant a_1''$$

и

$$(b_1 \cdot a_1'')\,\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0$$

вытекает равенство $b_1 a_1'' = 0$, откуда следует, что $x = 0$.

Далее, эндоморфизм θ_1 индуцирует изоморфное отображение элемента a_1'' на элемент b_1''. В самом деле,

$$a_2''\theta_1 = [a_2(b_1 + a_1'') + b_2]\, b_1 = [a_2(b_1 + a_1''\theta_2) + b_2'' + b_2']\, b_1 =$$

$$= [(a_2 + b_2'')(b_1 + a_1''\theta_2) + b_2']\, b_1 = [b_1(a_2 + b_2'') + b_2]\, b_1 = b_1(a_2 + a_1''\theta_2).$$

Но, согласно лемме 1 работы (2),

$$a_2 + a_1''\varphi_1\theta_2\varphi_1 = a_2 + a_1''\theta_2,$$

причем

$$a_1''\varphi_1\theta_2\varphi_1 = a_1''.$$

Поэтому

$$b_1(a_2 + a_1''\theta_2) = b_1(a_2 + a_1'') = b_1''.$$

Таким образом, $a_2''\theta_1 = b_1''$. Если $x \leqslant a_2''$ и $x\theta_1 = 0$, то $x + b_2 = b_2$ и, значит, $x \leqslant b_2$; следовательно,

$$x \leqslant b_2 a_2'' = a_2 \cdot a_1''\theta_2 = 0$$

(последнее равенство вытекает из леммы 1) и поэтому $x = 0$. Отсюда, согласно следствию 2 леммы 4 работы ([1]), заключаем, что эндоморфизм $\theta_1\varphi_2\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента b_1'', а эндоморфизм $\varphi_2\theta_1\varphi_2$ — автоморфизм элемента a_2''.

Из равенств

$$b_1''\theta_1\varphi_2\theta_1 = b_1'', \quad a_2''\varphi_2\theta_1\varphi_2 = a_2'',$$

на основании леммы 1 работы ([2]) и леммы 1 настоящей работы, следуют равенства:

$$b_1''\varphi_2 + b_2 = b_2 + b_1'', \quad a_2''\theta_1 + a_1 = a_1 + a_2''.$$

Но так как

$$b_1''\varphi_2 = a_2'', \quad a_2''\theta_1 = b_1'',$$

то

$$a_2'' + b_2 = b_2 + b_1'', \quad b_1'' + a_1 = a_1 + a_2''. \tag{7}$$

Положим

$$h = a_2 + a_1'' = a_2 + b_2'', \quad k = b_1 + a_1'' = b_1 + b_2''.$$

Тогда

$$b_1hk = b_1h = b_1(a_2 + a_1'') = b_1'',$$

$$hk = a_1'' + (b_1hk) = a_1'' + b_1'' = b_2'' + (b_1hk) = b_2'' + b_1''.$$

Докажем равенство

$$a_1(b_2 + b_1'') = a_1'',$$

которое потребуется нам в дальнейшем. Так как

$$a_1'' + b_1'' = b_2'' + b_1'',$$

то

$$a_1'' \leqslant b_2 + b_1''.$$

Умножая обе части равенства $a_1 = a_1' + a_1''$ на $b_2 + b_1''$, получим:

$$a_1(b_2 + b_1'') = a_1'(b_2 + b_1'') + a_1''. \tag{8}$$

Из соотношений

$$a_1'(b_2 + b_1'') \leqslant a_1'$$

и

$$[a_1'(b_2+b_1'')]\theta_1 = [a_1'(b_2+b_1'') + b_2]b_1 =$$
$$= (b_2+b_1'')(b_2+a_1')\cdot b_1 = b_1(b_2+b_1'')\cdot b_1(b_2+a_1') = b_1''\cdot b_1' = 0,$$

в силу того, что эндоморфизм θ_1 индуцирует изоморфное отображение элемента a_1' на элемент b_1', следует:

$$a_1'(b_2+b_1'') = 0.$$

Но тогда из (8) и вытекает справедливость равенства

$$a_1(b_2+b_1'') = a_1''.$$

Введем обозначения:

$$s = b_2 + b_1'' = b_2 + a_2'', \quad t = a_1 + b_1'' = a_1 + a_2''.$$

Тогда

$$a_1\cdot st = a_1 s = a_1(b_2+b_1'') = a_1'',$$
$$st = a_2'' + (a_1 st) = a_2'' + a_1'' = b_1'' + (a_1\cdot st) = b_1'' + a_1''.$$

Следовательно,

$$a_1'' + b_1'' = b_1'' + b_2'' = a_1'' + a_2''. \tag{9}$$

Из первого равенства (7) имеем:

$$b_2' + (b_2'' + b_1'') = b_2' + (b_2'' + a_2'').$$

Так как $a_2'' \leqslant b_2'' + b_1''$, то, умножая обе части последнего равенства на $b_2'' + b_1''$, будем иметь:

$$b_2'' + b_1'' = b_2'' + a_2''. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает справедливость второго ряда равенств (3).

2°. Допустим, что два произвольных прямых разложения единицы структуры S

$$1 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2$$

обладают каноническими продолжениями (2), т. е. продолжениями, для которых выполняются равенства (3). Покажем, что тогда в структуре S выполняется гипотеза расщепления.

Действительно, прибавляя к обеим частям равенства

$$a_1' + b_2' = b_2' + b_1'$$

элемент b_2'', а к обеим частям равенства

$$a_1' + a_2' = a_2' + b_1'$$

— элемент a_2'', мы получим:

$$a_1' + b_2 = b_2 + b_1', \quad a_1' + a_2 = a_2 + b_1',$$

откуда имеем:

$$a_1'\theta_1 = b_1', \quad b_1'\varphi_1 = a_1',$$

т. е.

$$a_1'\varphi_1\theta_1\varphi_1 = a_1'.$$

Пусть для элемента $x \leqslant a_1'$ выполняется равенство $x\varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0$. Тогда так как

$$[(x + b_2')\, b_1' + a_2']\, a_1' \leqslant x\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0,$$

то

$$[(x + b_2')\, b_1' + a_2']\, a_1' = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1 работы (²), следует, что

$$(x + b_2')\, b_1' + a_2' = a_2'$$

и поэтому

$$(x + b_2')\, b_1' \leqslant a_2'.$$

Умножая обе части последнего неравенства на b_1' и учитывая при этом, что $b_1'a_2' = 0$, получим:

$$(x + b_2')\, b_1' = 0.$$

Применяя к этому равенству лемму 1 работы (²), будем иметь:

$$x + b_2' = b_2',$$

т. е. $x \leqslant b_2'$, а так как $x \leqslant a_1'$, то $x \leqslant b_2'a_1' = 0$. Следовательно, $x = 0$.

Таким образом, мы доказали, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1'.

Покажем теперь, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1''. Действительно, прибавляя к обеим частям равенства

$$a_1'' + b_1'' = b_1'' + b_2''$$

элемент b_1', а к обеим частям равенства

$$b_2'' + a_2'' = a_2'' + a_1''$$

— элемент a_2', получим:

$$a_1'' + b_1 = b_1 + b_2'', \quad b_2'' + a_2 = a_2 + a_1''.$$

Из этих равенств соответственно имеем:

$$a_1''\theta_2 = b_2'', \quad b_2''\varphi_1 = a_1''$$

и, следовательно,

$$a_1''\varphi_1\theta_2\varphi_1 = a_1''.$$

Пусть для элемента $x \leqslant a_1''$ выполняется равенство $x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0$. Тогда из неравенства

$$[(x + b_1'')\, b_2'' + a_2'']\, a_1'' \leqslant x\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0$$

вытекает:

$$[(x + b_1'')\, b_2'' + a_2'']\, a_1'' = 0.$$

Отсюда, по лемме 1 работы (²), имеем:

$$(x + b_1'')\, b_2'' + a_2'' = a_2''.$$

т. е.

$$(x+b_1'')\,b_2''\leqslant a_2''.$$

Но так как $(x+b_1'')\,b_2''\leqslant b_2''$, то

$$(x+b_1'')\,b_2''\leqslant a_2''\cdot b_2''=0$$

и поэтому

$$(x+b_1'')\,b_2''=0.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства b_1'', в силу модулярности структуры будем иметь: $x+b_1''=b_1''$ и, следовательно, $x\leqslant b_1''$. Но $x\leqslant a_1''$, поэтому $x\leqslant a_1''b_1''=0$, т. е. $x=0$.

Теорема доказана полностью.

ТЕОРЕМА 2. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы структуры* S *прямое слагаемое* a_1 *разлагается в такую прямую сумму* $a_1=a_1'+a_1''$, *что эндоморфизм* $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* a_1', *а эндоморфизм* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* a_1'', *то прямые разложения* (1) *обладают каноническими продолжениями* (2), *в которых:*

1) *элементы* b_i', b_i'', $i=1, 2$, a_2', a_2'' *определены однозначно и имеют вид:*

$$\left.\begin{aligned} b_1'&=a_1'\theta_1, & b_1''&=b_1(a_1''+a_2),\\ b_2'&=b_2(a_1'+a_2), & b_2''&=a_1''\theta_2,\\ a_2'&=a_2(b_2+a_1'), & a_2''&=a_2(b_1+a_1'');\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

2) *эндоморфизм* $\theta_1\varphi_1\theta_1$ *индуцирует автоморфизм* b_1',
эндоморфизм $\theta_1\varphi_2\theta_1$ *индуцирует автоморфизм* b_1'',
эндоморфизм $\theta_2\varphi_2\theta_2$ *индуцирует автоморфизм* b_2',
эндоморфизм $\theta_2\varphi_1\theta_2$ *индуцирует автоморфизм* b_2'',
эндоморфизм $\varphi_2\theta_2\varphi_2$ *индуцирует автоморфизм* a_2',
эндоморфизм $\varphi_2\theta_1\varphi_2$ *индуцирует автоморфизм* a_2''.

Доказательство. 1) Пусть условия теоремы выполнены. Тогда, согласно теореме 1, прямые разложения (1) обладают каноническими продолжениями (2), элементы b_i', b_i'', $i=1, 2$, a_2', a_2'' которых имеют вид (11).

Предположим, что $a_1=a_1'+a_1''$, $b_i=\bar{b}_i+\bar{\bar{b}}_2$, $i=1, 2$, $a_2=\bar{a}_2+\bar{\bar{a}}_2$ являются другими каноническими продолжениями прямых разложений (1), т. е. имеют место равенства:

$$a_1'+\bar{a}_2=\bar{a}_2+\bar{b}_1=\bar{b}_1+\bar{b}_2=\bar{b}_2+a_1,$$

$$a_1''+\bar{\bar{b}}_1=\bar{\bar{b}}_1+\bar{\bar{b}}_2=\bar{\bar{b}}_2+\bar{\bar{a}}_2=\bar{\bar{a}}_2+a_1''.$$

Тогда, как и в доказательстве теоремы 1 (п. 2°), будем иметь:

$$\bar{b}_1=a_1'\theta_1=b_1',\quad \bar{\bar{b}}_2=a_1''\theta_2=b_2''.$$

Из равенства $\bar{\bar{b}}_1+\bar{\bar{b}}_2=\bar{\bar{a}}_2+a_1''$ после прибавления a_2 получим:

$$\bar{\bar{b}}_1+(\bar{a}_2+\bar{\bar{b}}_2)=a_2+a_1''.$$

Умножая это равенство на b_1, будем иметь:

$$\bar{\bar{b}}_1 + b_1(\bar{a}_2 + \bar{\bar{b}}_2) = b_1(a_2 + a_1'') = b_1'',$$

откуда следует, что $\bar{\bar{b}}_1 \leqslant b_1''$. Умножая равенство

$$b_1 = b_1' + b_1'' = b_1' + \bar{\bar{b}}_1$$

на b_1'', получим:

$$b_1'' = \bar{\bar{b}}_1.$$

Далее, так как $a_2'' = b_1''\varphi_2$ и $\bar{\bar{b}}_1\varphi_2 = \bar{\bar{a}}_2$, то из $b_1'' = \bar{\bar{b}}_1$ следует

$$\bar{\bar{a}}_2 = a_2''.$$

Теперь из равенства $\bar{b}_2 + \bar{b}_1 = \bar{a}_2 + a_1'$ получаем

$$\bar{b}_2 + (\bar{\bar{a}}_2 + \bar{b}_1) = a_2 + a_1'.$$

Умножая это равенство на b_2, будем иметь:

$$\bar{b}_2 + b_2(\bar{\bar{a}}_2 + \bar{b}_1) = b_2(a_2 + a_1') = b_2',$$

откуда следует, что $\bar{b}_2 \leqslant b_2'$. Умножая равенство $b_2 = \bar{b}_2 + b_2''$ на b_2', получим

$$b_2' = \bar{b}_2.$$

Так как $b_2'\varphi_2 = a_2'$ и $\bar{b}_2\varphi_2 = a_2$, то, очевидно,

$$\bar{a}_2 = a_2'.$$

Этим утверждение 1) теоремы доказано.

Справедливость утверждения 2) следует непосредственно из доказательства теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы структуры S по крайней мере одно из прямых слагаемых, например a_1, разлагается в такую прямую сумму $a_1 = a_1' + a_1''$, что*

1) *элемент a_1' является максимальным изоморфно отображающимся при $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ на себя, а элемент a_1'' — максимальным изоморфно отображающимся при $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ на себя;*

2) *эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм элемента a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента a_1'', то пара прямых разложений* (1) *обладает единственным каноническим продолжением:*

$$a_1 = a_1' + a_1'', \quad a_2 = a_2(b_2 + a_1') + a_2(b_1 + a_1''),$$
$$b_1 = a_1'\theta_1 + b_1(a_2 + a_1''), \quad b_2 = b_2(a_2 + a_1') + a_1''\theta_2.$$

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда, согласно теореме 1, пара прямых разложений (1) обладает каноническими продолжениями (2), т. е. продолжениями, для которых выполняются равенства (3).

Предположим, что прямые разложения (1) обладают другими каноническими продолжениями:

$$a_1 = \bar{a}_1 + \bar{\bar{a}}_1, \quad a_2 = \bar{a}_2 + \bar{\bar{a}}_2,$$
$$b_1 = \bar{b}_1 + \bar{\bar{b}}_1, \quad b_2 = \bar{b}_2 + \bar{\bar{b}}_2,$$

т. е. продолжениями, для которых выполняются равенства:

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{b}_1 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \bar{b}_2 + \bar{a}_1,$$

$$\bar{\bar{a}}_1 + \bar{\bar{b}}_1 = \bar{\bar{b}}_1 + \bar{\bar{b}}_2 = \bar{\bar{b}}_2 + \bar{\bar{a}}_2 = \bar{\bar{a}}_2 + \bar{\bar{a}}_1.$$

Из п. 2° доказательства теоремы 1 следует, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм элемента $\bar{\bar{a}}_1$.

Из условия 2) теоремы, на основании леммы 15 работы (1), следует, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $a_1' + \bar{a}_1$, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм элемента $a_1'' + \bar{\bar{a}}_1$. Но тогда, согласно условию 1) теоремы, будем иметь:

$$a_1' + \bar{a}_1 \leqslant a_1' \text{ и } a_1'' + \bar{\bar{a}}_1 \leqslant a_1''.$$

Поэтому $\bar{a}_1 \leqslant a_1'$ и $\bar{\bar{a}}_1 \leqslant a_1''$. Умножая равенство $a_1 = \bar{a}_1 + \bar{\bar{a}}_1$ на a_1', получим:

$$a_1' = \bar{a}_1,$$

а умножая то же равенство на a_1'', будем иметь:

$$a_1'' = \bar{\bar{a}}_1.$$

Остальные равенства

$$b_1' = \bar{b}_1, \quad b_1'' = \bar{\bar{b}}_1, \quad b_2' = \bar{b}_2, \quad b_2'' = \bar{\bar{b}}_2, \quad a_2' = \bar{a}_2, \quad a_2'' = \bar{\bar{a}}_2$$

вытекают из теоремы 2.

Для доказательства следующей теоремы нам потребуются две леммы:

ЛЕММА 2. *Если гипотеза расщепления справедлива для структуры S, то она справедлива и для каждого прямого слагаемого этой структуры (точнее, для подструктуры структуры S, состоящей из элементов, предшествующих этому прямому слагаемому единицы структуры S).*

Доказательство. Пусть в структуре S выполняется гипотеза расщепления и $1 = a_1 + a_2$. Покажем, что гипотеза расщепления выполняется и для элемента a_1.

Пусть

$$a_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{b}_1 + \bar{b}_2.$$

Обозначим через $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$ и $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ соответственно пары дополнительных эндоморфизмов разложения прямых разложений элемента a_1.

Рассмотрим два прямых разложения единицы структуры S:

$$1 = \bar{a}_1 + (\bar{a}_2 + a_2) = \bar{b}_1 + (\bar{b}_2 + a_2)$$

и обозначим через φ_1', φ_2' и θ_1', θ_2' соответственно пары дополнительных эндоморфизмов разложения этих прямых разложений. Так как для структуры S гипотеза расщепления выполнена, то элемент $\bar{a}_1$ разлагается в та-

кую прямую сумму $\bar{a}_1 = \bar{a}_1' + \bar{a}_1''$, что эндоморфизм $\varphi_1'\theta_1'\varphi_1'$ индуцирует автоморфизм элемента $\bar{a}_1'$, а эндоморфизм $\varphi_1'\theta_2'\varphi_1'$ — автоморфизм элемента $\bar{a}_1''$.

Для доказательства леммы, очевидно, достаточно показать, что для всякого $x \leqslant \bar{a}_1$

$$x\varphi_1'\theta_1'\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1\bar{\varphi}_1$$

и

$$x\varphi_1'\theta_2'\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_2\bar{\varphi}_1.$$

Докажем эти равенства. Очевидно, что

$$x = x\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1.$$

Далее,

$$x\theta_1' = (x + \bar{b}_2 + a_2)\,\bar{b}_1 = (x + \bar{b}_2 + a_2)\,\bar{b}_1 \cdot a_1 =$$
$$= [(x + \bar{b}_2) + a_2 \cdot a_1]\,\bar{b}_1 = (x + \bar{b}_2)\,\bar{b}_1 = x\bar{\theta}_1;$$

следовательно, $x\theta_1' = x\bar{\theta}_1$ и, значит,

$$x\varphi_1'\theta_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1.$$

Отсюда имеем:

$$x\varphi_1'\theta_1'\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1\varphi_1' = (x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1 + a_2 + \bar{a}_2)\,\bar{a}_1 =$$
$$= (x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1 + a_2 + \bar{a}_2)\,\bar{a}_1 \cdot a_1 = (x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1 + \bar{a}_2 + a_2 a_1)\,\bar{a}_1 =$$
$$= (x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1 + \bar{a}_2)\,\bar{a}_1 = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1\bar{\varphi}_1.$$

Таким образом,

$$x\varphi_1'\theta_1'\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_1\bar{\varphi}_1.$$

Равенство

$$x\varphi_1'\theta_2'\varphi_1' = x\bar{\varphi}_1\bar{\theta}_2\bar{\varphi}_1$$

доказывается аналогично.

ЛЕММА 3. *Если* $1 = d + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = d + b$, *то*

1) $d + a_i = d + b_i$, *где* $b_i = b\,(d + a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

2) $b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Докажем утверждение 2). Согласно лемме 2 работы (2),

$$b = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

где

$$b_i = b\,(d + a_i).$$

Покажем, что $b_i \cdot \bar{b}_i = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Действительно,

$$b_i \cdot \bar{b}_i = b\,(d + a_i)\,[b\,(d + a_1) + \ldots + b\,(d + a_{i-1}) + b\,(d + a_{i+1}) + \ldots$$
$$\ldots + b\,(d + a_n)] \leqslant b\,(d + a_i)\,(d + a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n) =$$
$$= b\,[d + (d + a_i)\,(a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n)] = b \cdot d = 0,$$

так как

$$(d + a_i)\,(a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n) = 0.$$

Таким образом, мы получили, что $b_i\bar{b}_i = 0$. Следовательно, окончательно имеем:

$$b = b_1 + \ldots + b_n.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если в структуре S выполняется гипотеза расщепления и если даны два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным числом слагаемых каждое:*

$$1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

то существуют такие прямые разложения

$$a_i = b_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$b_j = b_{j1} + b_{j2} + \ldots + b_{jm}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

что имеет место следующее свойство:

если J — подмножество множества всех целых чисел от 1 до n и $1 \leqslant k \leqslant m$, то

$$1 = \dot{\sum_{i \neq k}} a_i + \dot{\sum_{j \in J}} a_{kj} + \dot{\sum_{j \in J}} b_{jk}.$$

Доказательство. Если учесть леммы 2 и 3, то доказательство этой теоремы проводится точно так же, как и соответствующей теоремы в работе Р. Бэра (6).

§ 2

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые частные случаи гипотезы расщепления.

ЛЕММА 4. *Пусть в паре прямых разложений (1) единицы структуры S прямое слагаемое a_1 разлагается в такую прямую сумму $a_1 = a_1' + a_1''$, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм элемента a_1''. Если для элемента $x \leqslant a_1$ имеем $x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1''$ или $x\varphi_1\theta_2\varphi_1 \leqslant a_1'$, то соответственно будем иметь $x \leqslant a_1''$ и $x \leqslant a_1'$.*

Доказательство. Пусть, например, для $x \leqslant a_1$ выполняется неравенство $x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1''$; тогда

$$[(a_1'' + x)\, a_1']\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant (a_1'' + x)\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 =$$
$$= a_1''\varphi_1\theta_1\varphi_1 + x\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1'' + x\varphi_1\theta_1\varphi_1 = a_1''.$$

Но

$$[(a_1'' + x)\, a_1']\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1'.$$

Поэтому

$$[(a_1'' + x)\, a_1']\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1'' \cdot a_1' = 0,$$

т. е.

$$[(a_1'' + x)\, a_1]\, \varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0.$$

Отсюда, в силу того, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1', следует, что

$$(a'' + x)\, a_1' = 0.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства a_1'' и пользуясь модулярностью структуры, получим:

$$a_1'' + x = a_1'',$$

т. е. $x \leqslant a_1''$.

ЛЕММА 5. *Пусть дана пара прямых разложений* (1) *единицы полной структуры* S. *Если прямое слагаемое* a_1 *разлагается в такую прямую сумму* $a_1 = a_1' + a_1''$, *что эндоморфизм* $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* a_1', *а эндоморфизм* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — *автоморфизм элемента* a_1'', *то* $n_{11} \leqslant a_1'$, $n_{12} \leqslant a_1''$.

Доказательство. Так как $n_{12}^{(1)}\varphi_1\theta_1\varphi_1 = 0 \leqslant a_1''$, то, согласно лемме 4,

$$n_{12}^{(1)} \leqslant a_1''.$$

Предположим, что для некоторого i уже доказано, что $n_{12}^{(i)} \leqslant a_1''$; тогда из равенства

$$n_{12}^{(i+1)}(\varphi_1\theta_1\varphi_1)^{i+1} = 0$$

будет следовать, что

$$[n_{12}^{(i+1)}\varphi_1\theta_1\varphi_1](\varphi_1\theta_1\varphi_1)^i = 0.$$

Таким образом,

$$n_{12}^{(i+1)}\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant n_{12}^{(i)}$$

и поэтому

$$n_{12}^{(i+1)}\varphi_1\theta_1\varphi_1 \leqslant a_1'';$$

отсюда, согласно лемме 4, будем иметь:

$$n_{12}^{(i+1)} \leqslant a_1''.$$

Итак, для любого натурального i

$$n_{12}^{(i)} \leqslant a_1''.$$

Отсюда следует, что

$$n_{12} = \sum_{i=1}^{\infty} n_{12}^{(i)} \leqslant a_1'',$$

т. е.

$$n_{12} \leqslant a_1''.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$n_{11} \leqslant a_1'.$$

Определение 3. Будем говорить, что в структуре S выполняется гипотеза A-расщепления, если в произвольной паре прямых разложений (1) по крайней мере одно из прямых слагаемых, например a_1, разлагается в такую прямую сумму

$$a_1 = a_1' + a_1'' + c_{a_1},$$

что

1) эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм a_1'';

2) эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм c_{a_1};

3) если эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм $c' \in S$, то $c' \leqslant c_{a_1}$.

ЛЕММА 6. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы структуры* S *прямое слагаемое* a_1 *разлагается в такую прямую сумму*

$$a_1 = a_1' + a_1'' + c_{a_1}, \tag{12}$$

что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм* a_1', *а эндоморфизм* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — *автоморфизм* a_1'' *и элемент* c_{a_1} *удовлетворяет условиям* 2) *и* 3) *определения* 3, *то*

$$a_2 = a_2' + a_2'' + c_{a_2}, \quad b_1 = b_1' + b_1'' + c_{b_1}, \quad b_2 = b_2' + b_2'' + c_{b_2}, \tag{13}$$

где $\varphi_2\theta_2\varphi_2$ *индуцирует автоморфизм* a_2', $\varphi_2\theta_1\varphi_2$ — *автоморфизм* a_2'', $\theta_1\varphi_1\theta_1$ *индуцирует автоморфизм* b_1', $\theta_1\varphi_2\theta_1$ — *автоморфизм* b_1'', $\theta_2\varphi_2\theta_2$ *индуцирует автоморфизм* b_2', $\theta_2\varphi_1\theta_2$ — *автоморфизм* b_2'' *и элементы* c_{a_2}, c_{b_1}, c_{b_2} *удовлетворяют условиям* 2) *и* 3) *определения* 3 *соответственно относительно эндоморфизмов* $\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$, $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$, $\theta_2\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_2$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены; тогда, согласно лемме 2 работы ([7]) и условию настоящей леммы, эндоморфизмы $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ и элемент c_{a_1} удовлетворяют условию леммы 12 работы ([1]), поэтому эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1} и, на основании следствия из леммы 11 работы ([1]), этот эндоморфизм индуцирует автоморфизм элемента $a_1' + c_{a_1}$. Но, по условию леммы, эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента a_1''; поэтому, как и в теореме 1, получаем:

$$b_1 = (a_1' + c_{a_1})\,\theta_1 + b_1\,(a_1'' + a_2), \qquad b_2 = b_2\,(a_1' + c_{a_1} + a_2) + a_1''\theta_2.$$

Так как, в силу леммы 2 работы ([2]),

$$(a_1' + c_{a_1})\,\theta_1 = a_1'\theta_1 + c_{a_1}\theta_1,$$

а в силу леммы 1 работы ([2])

$$c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_1 + a_2 = c_{a_1}\theta_2 + a_2,$$

то

$$b_1 = (a_1'\theta_1 + c_{a_1}\theta_1) + b_1\,(a_1'' + a_2),$$

$$b_2 = b_2\,(a_1' + c_{a_1}\theta_2 + a_2) + a_1''\theta_2 = [b_2\,(a_1' + a_2) + c_{a_1}\theta_2] + a_1''\theta_2.$$

Отсюда следует, что

$$c_{a_1}\theta_1 \cdot b_1\,(a_1'' + a_2) = 0, \quad c_{a_1}\theta_2 \cdot a_1''\theta_2 = 0.$$

С другой стороны, так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $a_1'' + c_{a_1}$, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, по условию, индуцирует автоморфизм элемента a_1', то, аналогично предыдущему, будем иметь:

$$b_1 = a_1'\theta_1 + b_1\,(a_1'' + c_{a_1} + a_2),$$

$$b_2 = b_2\,(a_1' + a_2) + (a_1'' + c_{a_1})\,\theta_2.$$

Но

$$c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_1 + a_2 = c_{a_1}\theta_1 + a_2$$

и

$$(a_1'' + c_{a_1})\,\theta_2 = a_1''\theta_2 + c_{a_1}\theta_1.$$

Поэтому

$$b_1 = a_1\theta_1 + b_1\,(a_1'' + c_{a_1}\theta_1 + a_2) = a_1'\theta_1 + [b_1\,(a_1'' + a_2) + c_{a_1}\theta_1],$$
$$b_2 = b_2\,(a_1' + a_2) + (a_1''\theta_2 + c_{a_1}\theta_2).$$

Отсюда получаем:

$$c_{a_1}\theta_1 \cdot a_1'\theta_1 = 0, \quad c_{a_1}\theta_2 \cdot b_2\,(a_1 + a_2) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$b_1 = b_1' + b_1'' + c_{b_1}, \quad b_2 = b_2' + b_2'' + c_{b_2},$$

где

$$b_1' = a_1'\theta_1, \quad b_1'' = b_1\,(a_1'' + a_2), \quad c_{b_1} = c_{a_1}\theta_1,$$
$$b_2' = b_2\,(a_1' + a_2), \quad b_2'' = a_1''\theta_2, \quad c_{b_2} = c_{a_1}\theta_2.$$

Точно так же, как и в теореме 1, можно показать, что эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента b_1', эндоморфизм $\theta_1\varphi_2\theta_1$ — автоморфизм элемента b_1'', эндоморфизм $\theta_2\varphi_1\theta_2$ — автоморфизм элемента b_1'', эндоморфизм $\theta_2\varphi_2\theta_2$ — автоморфизм элемента b_2'.

Покажем теперь, что элемент c_{b_1} удовлетворяет условиям 2) и 3) определения 3 относительно эндоморфизма $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$. В самом деле,

$$c_{b_1}\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{b_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 =$$
$$= (c_{a_1}\varphi_1\theta_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = (c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_1)\,\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\theta_1\varphi_2\theta_1.$$

Так как, по лемме 1 работы (7),

$$c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1,$$

то

$$c_{b_1}\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1 = c_{a_1}\theta_1 = c_{b_1}.$$

Следовательно,

$$c_{b_1}\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{b_1}.$$

Пусть для элемента $x \leqslant c_{b_1}$ выполняется равенство

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = 0.$$

Так как эндоморфизм θ_1 индуцирует отображение элемента c_{a_1} на элемент c_{b_1}, то, по лемме 3 работы (2), существует такой элемент $y \leqslant c_{a_1}$, что $y\theta_1 = x$; отсюда получаем:

$$(y\varphi_1\theta_1)\,\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = 0.$$

Применяя к левой части последнего равенства несколько раз лемму 1 работы (7), будем иметь:

$$y\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = y\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1 = y\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1 = 0.$$

Следовательно,

$$y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) = y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^2 = 0.$$

Но эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1}; поэтому из последнего равенства вытекает, что $y = 0$, а значит, и $x = 0$, ибо $x = y\theta_1$.

Пусть теперь эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента $c' \in S$. Тогда из равенства

$$c'\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c'$$

следует:

$$(c'\varphi_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1 = c'\varphi_1.$$

Применяя к левой части этого равенства дважды лемму 1 работы (7), будем иметь:

$$(c'\varphi_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1 = (c'\varphi_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = c'\varphi_1.$$

Предположим, что для $x \leqslant c'\varphi_1$ выполняется равенство

$$x\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0.$$

Так как эндоморфизм φ_1 индуцирует отображение элемента c' на элемент $c'\varphi_1$, то, на основании леммы 3 работы (2), существует такой элемент $y \leqslant c'$, что $y\varphi_1 = x$; поэтому имеем:

$$y\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0,$$

но $y \leqslant b_1$, значит, последнее равенство можно записать в виде

$$y\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = 0.$$

Отсюда, согласно лемме 1 работы (7), следуют равенства:

$$y\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = y\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1 = y\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1 = 0,$$

из которых получаем:

$$y\,(\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)\,(\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1) = y\,(\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)^2 = 0.$$

Но, согласно предположению, эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента c'_1, поэтому из последнего равенства вытекает, что $y=0$, а значит, и $x=0$, ибо $x=y\varphi_1$. Таким образом мы показали, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $c'\varphi_1$.

Следовательно, согласно условию леммы, $c'\varphi_1 \leqslant c_{a_1}$. Из этого неравенства имеем:

$$c'\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 \leqslant c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1,$$

откуда, в силу леммы 1 работы (7), вытекает справедливость равенства

$$c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_2\theta_1 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1 = c_{a_1}\theta_1 = c_{b_1}.$$

Таким образом, $c' \leqslant c_{b_1}$.

Доказательство для элемента c_{b_2} проводится аналогично. Далее, эндоморфизм $\theta_1\varphi_2\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента $b''_1 + c_{b_1}$. Поэтому, при-

бавляя к обеим частям равенства

$$[b_1(a_1'' + a_2) + c_{b_1}]\,\theta_1\varphi_2\theta_1 = b_1(a_1'' + a_2) + c_{b_1}$$

элемент b_2, на основании леммы 1 работы (2) и леммы 1 настоящей работы, получим:

$$[b_1(a_1'' + a_2) + c_{b_1}]\,\varphi_2 + b_2 = b_1'' + c_{b_1} + b_2.$$

Отсюда следует:

$$[b_1(a_1'' + a_2) + c_{b_1}]\,\varphi_2 + (b_2 + b_1') = 1.$$

Умножая это равенство на a_2, будем иметь:

$$a_2 = a_2(b_1' + b_2) + [b_1(a_1'' + a_2) + c_{b_1}]\,\varphi_2 =$$
$$= a_2(b_1' + b_2) + \{[b_1(a_1'' + a_2)]\,\varphi_2 + c_{b_1}\varphi_2\}.$$

Так как, согласно лемме 1 работы (2),

$$b_1' + b_2 = a_1' + b_2$$

и так как

$$[b_1(a_1'' + a_2)]\,\varphi_2 = [b_1(a_1'' + a_2) + a_1'' + a_1']\,a_2 =$$
$$= [(b_1 + a_1'')(a_1'' + a_2) + a_1']\,a_2 = [a_2(a_1'' + b_1) + a_1]\,a_2 = a_2(a_1'' + b_1),$$

т. е.

$$[b_1(a_1'' + a_2)]\,\varphi_2 = a_2(a_1'' + b_1),$$

то

$$a_2 = a_2(a_1' + b_2) + [a_2(a_1'' + b_1) + c_{b_1}\varphi_2].$$

Из этого равенства следует:

$$c_{b_1}\varphi_2 \cdot a_2(a_1' + b_2) = 0.$$

С другой стороны, эндоморфизм $\theta_2\varphi_2\theta_2$ индуцирует автоморфизм элемента $b_2(a_1' + a_2) + c_{b_2}$. Поэтому аналогично предыдущему будем иметь:

$$a_2 = [b_2(a_1' + a_2) + c_{b_2}]\,\varphi_2 + a_2(a_1''\theta_2 + b_1) =$$
$$= \{[b_2(a_1' + a_2)]\,\varphi_2 + c_{b_2}\varphi_2\} + a_2(a_1''\theta_2 + b_1).$$

Но, как легко проверить,

$$a_1''\theta_2 + b_1 = a_1'' + b_1$$

и

$$[b_2(a_1' + a_2)]\,\varphi_2 = a_2(a_1' + b_2);$$

при этом

$$c_{b_2}\varphi_2 = c_{a_1}\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2 = (c_{a_1}\theta_1)\,\varphi_2 = c_{b_1}\varphi_2,$$

т. е.

$$c_{b_2}\varphi_2 = c_{b_1}\varphi_2.$$

Следовательно,

$$a_2 = [a_2(a_1' + b_2) + c_{b_1}\varphi_2] + a_2(a_1'' + b_1),$$

откуда получаем:

$$c_{b_1}\varphi_2 \cdot a_2 (a_1'' + b_1) = 0.$$

Полагая

$$a_2' = a_2 (a_1' + b_2), \quad a_2'' = a_2 (a_1'' + b_1), \quad c_{b_1}\varphi_2 = c_{a_2},$$

находим:

$$a_2 = a_2' + a_2'' + c_{a_2}.$$

Точно так же, как и в теореме 1, можно показать, что эндоморфизм $\varphi_2\theta_2\varphi_2$ индуцирует автоморфизм элемента a_2', а эндоморфизм $\varphi_2\theta_1\varphi_2$ — автоморфизм элемента a_2''.

Покажем, что элемент c_{a_2} удовлетворяет условиям 2) и 3) определения относительно эндоморфизма $\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$.

Действительно, на основании леммы 1 работы (7), имеем:

$$c_{a_2}\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = (c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2)\,\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_2 =$$

$$= c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_2 = c_{a_1}\theta_1\varphi_2\,,$$

т. е.

$$c_{a_2}\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = c_{a_2}.$$

Пусть для элемента $x \leqslant c_{a_2}$ выполняется равенство

$$x\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = 0.$$

Так как эндоморфизм $\theta_1\varphi_2$ индуцирует отображение элемента c_{a_1} на элемент c_{a_2}, то, согласно лемме 3 работы (2), существует элемент $y \leqslant c_{a_1}$ такой, что $\hat{y}\theta_1\varphi_2 = x$; отсюда получаем:

$$(y\varphi_1\theta_1\varphi_2)\,\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = 0.$$

Применяя к левой части последнего равенства несколько раз лемму 1 работы (7), будем иметь:

$$y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_2 = y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2 =$$

$$= y\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_2 = y\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1\theta_1\varphi_2 = y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_2 = 0.$$

Следовательно,

$$y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_1) = 0.$$

Применяя к этому равенству лемму 1 работы (7), получим:

$$y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1) = y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1)^2 = 0.$$

Так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1}, то $y = 0$ и поэтому $x = 0$, ибо $x = y\theta_1 y_2$.

Покажем теперь, что если эндоморфизм $\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$ индуцирует автоморфизм элемента c', то $c' \leqslant c_{a_2}$. Действительно, из равенства

$$c'\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = c'$$

следует:

$$(c'\theta_1)\,\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2\theta_1 = c'\theta_1.$$

Применяя дважды лемму 1 работы (7) к этому равенству, будем иметь:

$$(c'\theta_1)\,\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = c'\theta_1.$$

Предположим, что для $x \leqslant c'\theta_1$ выполняется равенство

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = 0.$$

Так как эндоморфизм θ_1 индуцирует отображение элемента c' на элемент $c'\theta_1$, то существует такой элемент $y \leqslant c'$, что $y\theta_1 = x$. Но тогда

$$(y\theta_1)\,\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = (y\varphi_2\theta_1)\,\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = y\varphi_2\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = 0,$$

откуда, по лемме 1 работы (7), следует:

$$y\,(\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2)\,\theta_1 = 0$$

и поэтому

$$y\,(\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2)\,(\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2) = y\,(\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2)^2 = 0.$$

Но, по условию, эндоморфизм $\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2$ индуцирует автоморфизм элемента c'; значит, $y = 0$, а так как $x = y\theta_1$, то и $x = 0$.

Таким образом, мы показали, что эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента $c'\theta_1$. Следовательно, $c'\theta_1 \leqslant c_{b_1}$. Из этого неравенства получаем:

$$c'\varphi_2\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 \leqslant c_{b_1}\varphi_2\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 =$$
$$= c_{a_1}\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\varphi_1\theta_2\varphi_2 = c_{a_1}\theta_1\varphi_2 = c_{a_2}$$

и, значит,

$$c' \leqslant c_{a_2}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы полной структуры S прямое слагаемое a_1 разлагается в такую прямую сумму $a_1 = a_1' + a_1'' + c_{a_1}$, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм a_1'' и элемент c_{a_1} удовлетворяет условиям* 2) *и* 3) *определения* 3, *то $n_{11} \leqslant a_1'$, $n_{12} \leqslant a_1''$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 работы (7) и лемме 6 настоящей работы, эндоморфизмы $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ и элемент c_{a_1} удовлетворяют условию леммы 12 работы (1), поэтому каждый из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1}. Согласно следствию из леммы 11 работы (1), эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $a_1'' + c_{a_1}$. Следовательно, согласно лемме 5,

$$n_{11} \leqslant a_1', \quad n_{12} \leqslant a_1'' + c_{a_1}.$$

Так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1}, то из неравенства

$$n_{12} \leqslant a_1'' + c_{a_1},$$

на основании леммы 5, получаем:

$$n_{12} \leqslant a_1''.$$

ТЕОРЕМА 5. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы структуры S прямое слагаемое a_1 разлагается в такую прямую сумму $a_1 = a_1' + a_1'' + c_{a_1}$, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм a_1', а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — автоморфизм a_1'' и элемент c_{a_1} удовлетворяет условиям* 2) *и* 3) *определения* 3 *относительно эндоморфизма $\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$, то прямые разло-*

жения (1) *обладают продолжениями*

$$a_1 = a'_1 + a''_1 + c_{a_1}, \quad a_2 = a'_2 + a''_2 + c_{a_2},$$
$$b_1 = b'_1 + b''_1 + c_{b_1}, \quad b_2 = b'_2 + b''_2 + c_{b_2},$$

для которых справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &a'_1 + a'_2 = a'_2 + b'_1 = b'_1 + b'_2 = b'_2 + a'_1, \\ &a''_1 + b''_1 = b''_1 + b''_2 = b''_2 + a''_2 = a''_2 + a''_1, \\ &c_{b_1} + c_{a_1} = c_{a_1} + c_{a_2} = c_{a_2} + c_{b_1} = c_{b_1} + c_{b_2} = \\ &\qquad = c_{b_2} + c_{a_2} = c_{b_2} + c_{a_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда, согласно лемме 6, прямые разложения (1) обладают продолжениями (12) и (13), для которых два первых ряда равенств (14) доказываются так же, как и в теореме 1. Поэтому нам остается установить лишь справедливость третьей цепочки равенств (14).

Так как каждый из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{a_1}, а каждый из эндоморфизмов $\varphi_2\theta_1\varphi_2$ и $\varphi_2\theta_2\varphi_2$ — автоморфизм элемента c_{a_2} (см. доказательство леммы 6), то на основании леммы 1 работы ([2]) и леммы 1 настоящей работы будем иметь:

$$\begin{aligned} &c_{a_1}\theta_1 + a_2 = c_{a_1} + a_2, \quad c_{a_1}\theta_2 + a_2 = c_{a_1} + a_2, \\ &c_{a_2}\theta_1 + a_1 = c_{a_2} + a_1, \quad c_{a_2}\theta_2 + a_1 = c_{a_2} + a_1. \end{aligned} \qquad (15)$$

Учитывая, что

$$c_{a_1}\theta_1 = c_{b_1}, \quad c_{a_1}\theta_2 = c_{b_2}, \quad c_{a_2}\theta_1 = c_{b_1}, \quad c_{a_2}\theta_2 = c_{b_2}$$

(см. доказательство леммы 6) и замечая, что правые части первого и второго, а также третьего и четвертого равенств попарно равны между собой, будем иметь:

$$c_{b_1} + a_2 = a_2 + c_{b_2}, \quad c_{b_1} + a_1 = a_1 + c_{b_2}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим:

$$(c_{b_1} + a_1)(c_{b_1} + a_2) = (c_{b_2} + a_1)(c_{b_2} + a_2).$$

В силу модулярности структуры, последнее равенство дает:

$$c_{b_1} + a_1(c_{b_1} + a_2) = a_1(c_{b_2} + a_2) + c_{b_2},$$
$$c_{b_1} + a_2(c_{b_1} + a_1) = a_2(c_{b_2} + a_1) + c_{b_2}.$$

Эти равенства можно записать в виде:

$$c_{b_1} + c_{a_1} = c_{a_1} + c_{b_2}, \quad c_{b_1} + c_{a_2} = c_{a_2} + c_{b_2},$$

или, в силу равенства друг другу последних соотношений,

$$c_{a_2} + c_{b_1} = c_{b_1} + c_{a_1} = c_{a_1} + c_{b_2} = c_{b_2} + c_{a_2}.$$

Перемножая почленно первое и третье равенства (15), получим:

$$c_{b_1} + c_{a_2} = c_{a_2} + c_{a_1}. \qquad (16)$$

Далее, эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_1$ индуцирует автоморфизм элемента c_{b_1}, а эндоморфизм $\theta_1\varphi_1\theta_2$ — автоморфизм элемента c_{b_2} (см. доказательство леммы 6); поэтому по лемме 1 работы (2) и лемме 1 настоящей работы имеем:

$$c_{b_1}\varphi_1+b_2 = c_{b_1}+b_2, \quad c_{b_2}\varphi_1+b_1 = c_{b_2}+b_1.$$

Эти равенства можно переписать так:

$$c_{a_1}+b_2 = c_{b_1}+b_2, \quad c_{a_1}+b_1 = c_{b_2}+b_1,$$

откуда следует:

$$(c_{a_1}+b_2)(c_{a_1}+b_1) = (c_{b_1}+b_2)(c_{b_2}+b_1).$$

В силу модулярности структуры, из этого равенства будем иметь:

$$c_{a_1}+c_{b_1} = c_{b_1}+c_{b_2}. \tag{17}$$

Из (15), (16), (17) окончательно имеем:

$$c_{b_1}+c_{a_1}=c_{a_1}+c_{a_2}=c_{a_2}+c_{b_1}=c_{b_1}+c_{b_2}=c_{b_2}+c_{a_2}=c_{b_2}+c_{a_1},$$

что и требовалось доказать.

Если учесть лемму 7, то теорему 5 можно, очевидно, считать обобщением теоремы 4 работы (2).

ЛЕММА 8. *Если гипотеза A-расщепления справедлива для структуры S, то она справедлива и для каждого прямого слагаемого этой структуры (точнее, для подструктуры структуры S, состоящей из всех элементов, предшествующих этому прямому слагаемому единицы структуры S).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 работы (3).

Учитывая теорему 5 и лемму 8, легко заметить, что если в теореме 4 выражение «выполняется гипотеза расщепления» заменить выражением «выполняется гипотеза A-расщепления», то эта теорема останется справедливой. Отсюда, при учете леммы 7 следует справедливость теоремы 5 работы (2).

ЛЕММА 9. *Пусть дана полная структура S^* и пусть $x \leqslant n_1$. Если эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента x, то $x \leqslant n_{11}$; если же эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента x, то $x \leqslant n_{12}$.*

Доказательство. Пусть эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $x \leqslant n_1$. Тогда так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм n_{11}, то, по лемме 15 работы (1), $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $n_{11}+x$. Умножая обе части равенства

$$n_1 = n_{11}+n_{12}$$

на $n_{11}+x$, получим:

$$n_{11}+x = n_{11}+n_{12}(n_{11}+x).$$

Покажем, что $n_{12}(n_{11}+x) = 0$. Действительно, так как в структуре S выполнено условие (*) [см. (1)], то

$$n_{12}(n_{11}+x) = \sum_{i=1}^{\infty} n_{12}^{(i)}(n_{11}+x).$$

Ввиду того что $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм $n_{11}+x$, то, очевидно, эндоморфизм $(\varphi_1\theta_1\varphi_1)^i$ индуцирует автоморфизм $n_{11}+x$. Но тогда из равенства

$$[n_{12}^{(i)}(n_{11}+x)](\varphi_1\theta_1\varphi_1)^i=0$$

следует, что

$$n_{12}^{(i)}(n_{11}+x)=0$$

для любого i.

Таким образом,

$$n_{12}(n_{11}+x)=\sum_{i=1}^{\infty}n_{12}^{(i)}(n_{11}+x)=0,$$

т. е.

$$n_{12}(n_{11}+x)=0.$$

Следовательно, $n_{11}+x=n_{11}$ и, значит, $x\leqslant n_{11}$.

Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

ЛЕММА 10. *Если в полной структуре* S^*

$$n_1=n_{11}\dotplus n_{12}=u+v,$$

где эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм* u, *а* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ — *автоморфизм* v, *то* $u=n_{11}$, $v=n_{12}$.

Согласно лемме 9, $u\leqslant n_{11}$, $v\leqslant n_{12}$. Умножая равенство $n_1=u+v$ на n_{11}, получим:

$$n_{11}=u+n_{11}v.$$

Но $n_{11}v=0$. Действительно,

$$n_{11}v=\sum_{i=1}^{\infty}n_{11}^{(i)}v,$$

а так как $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм v, то из равенства

$$[n_{11}^{(i)}v](\varphi_1\theta_2\varphi_1)^i=0$$

следует, что $n_{11}^{(i)}v=0$ для любого натурального i и, таким образом,

$$n_{11}v=0.$$

Следовательно, $u=n_{11}$.

Аналогично доказывается равенство $v=n_{12}$.

ЛЕММА 11. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы полной структуры* S^*

$$a_1=n_1\dotplus c=u+v,$$

причем эндоморфизм $\eta=\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ *индуцирует* η-*автоморфизм элемента* c, *эндоморфизм* $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* u, *а* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* v, *то*

$$u=n_{11}\dotplus cu,\quad v=n_{12}\dotplus cv.$$

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Тогда, согласно лемме 2 работы (7) и лемме 26 работы (1), а также в силу условия настоящей леммы, эндоморфизмы $\varphi_1\theta_1\varphi_1$, $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ и элемент c удовлетворяют условиям леммы 18 работы (1). Поэтому каждый из эндоморфизмов $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует соответственно $\varphi_1\theta_1\varphi_1$- и $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента c. Отсюда и из леммы 29 работы (1) будем иметь, на основании леммы 13 работы (1), что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм элемента $n_{11}+c$, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента $n_{12}+c$. Но тогда, как и в доказательстве теоремы 4 работы (1),

$$u = u\cdot n_{12}+u\,(n_{11}+c), \quad v = vn_{11}+v\,(n_{12}+c).$$

Легко заметить, что $un_{12} = 0$ и $vn_{11} = 0$. Следовательно,

$$u = u\,(n_{11}+c), \quad v = v\,(n_{12}+c),$$

что дает:

$$u = n_{11}+c, \quad v \leqslant n_{12}+c.$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы 4 работы (1), получаем:

$$u = un_{11}+uc, \quad v = vn_{12}+vc.$$

Но тогда

$$a_1 = (un_{11}+cu) + (vn_{12}+cv).$$

Умножая это равенство на n_1, находим:

$$n_1 = n_{11}+n_{12} = un_{11}+n_{12}v.$$

Так как эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм элемента un_{11}, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента vn_{12}, то, на основании леммы 10, будем иметь:

$$n_{11} = u\cdot n_{11}, \quad n_{12} = vn_{12}.$$

Отсюда следует, что

$$n_{12} \leqslant u, \quad n_{12} \leqslant v.$$

Поэтому

$$u = un_{11}+uc = n_{11}+cu,$$

$$v = vn_{12}+cv = n_{12}+cv,$$

т. е.

$$u = n_{11}+cu, \quad v = n_{12}+cv.$$

Легко видеть также, что

$$c = cu + cv.$$

Замечание. Из доказательства леммы следует, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм элемента u, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента v.

Определение 4. Пусть даны два произвольных прямых разложения единицы структуры S:

$$1 = a_1+a_2 = b_1+b_2.$$

Назовем эндоморфизмы структуры S $\varphi_i\theta_1\varphi_i\theta_2\varphi_i$, $\theta_i\varphi_1\theta_i\varphi_2\theta_i$, $i = 1, 2$, *отмеченными эндоморфизмами* данных прямых разложений.

ТЕОРЕМА 6. *Если в полной структуре* S^* *отмеченный эндоморфизм* $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ *является* η*-расщепляющим, то существует, и притом единственное, прямое разложение* $a_1 = u \dot{+} v$, *для которого*

1) $v \leqslant a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1)$;

2) *эндоморфизм* $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* u, *а эндоморфизм* $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ *индуцирует автоморфизм элемента* v.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены; тогда, очевидно,

$$a_1 = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) \dot{+} a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) \dot{+} c,$$

где $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует η-автоморфизм элемента c. Ясно, что эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_1\varphi_1$-автоморфизм элемента $a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \dot{+} c$, а $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует $\varphi_1\theta_2\varphi_1$-автоморфизм элемента $a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1)$. Поэтому, полагая

$$u = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \dot{+} c, \quad v = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1),$$

мы и получим прямое разложение $a_1 = u \dot{+} v$, удовлетворяющее условиям 1) и 2) теоремы.

Пусть $a_1 = u' \dot{+} v'$ — другое прямое разложение элемента a_1, удовлетворяющее условиям 1) и 2) теоремы. Тогда, согласно лемме 11, будем иметь:

$$u' = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \dot{+} u'c, \quad v' = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) \dot{+} v'c.$$

Но так как $v' \leqslant a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1)$, то $v'c = 0$ и поэтому

$$v' = a_1 r(\varphi_1\theta_1\varphi_1) = v,$$

а так как $c = cu' + cv'$, то $c = cu'$, т. е. $c \leqslant u'$, и поэтому

$$u' = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \dot{+} cu' = a_1 r(\varphi_1\theta_2\varphi_1) \dot{+} c = u.$$

Мы доказали, что $u' = u$ и $v' = v$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы правильной * и полной структуры* S

$$a_1 = n_{11} \dot{+} n_{12},$$

то пара прямых разложений (1) *обладает каноническими продолжениями*

$$\begin{aligned} a_1 &= n_{11} \dot{+} n_{12}, & a_2 &= n_{21} \dot{+} n_{22}, \\ b_1 &= m_{11} \dot{+} m_{12}, & b_2 &= m_{21} \dot{+} m_{22}. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены. Тогда, согласно лемме 12 работы ([2]), эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента n_{11}, а эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента n_{12}; поэтому, по теореме 1, имеем:

$$a_2 = a_2(b_2 + n_{11}) \dot{+} a_2(b_1 + n_{12}),$$

$$b_1 = n_{11}\theta_1 \dot{+} b_1(a_2 + n_{12}), \quad b_2 = b_2(a_2 + n_{11}) \dot{+} n_{12}\theta_2.$$

* См. работу ([3]).

На основании леммы 10 работы (7), $n_{11}\theta_1 \leqslant m_1$ и, аналогично, $m_{11}\varphi_1 \leqslant n_{11}$. Следовательно,

$$n_{11} = n_{11}\theta_1\varphi_1 \leqslant m_{11}\varphi_1 \leqslant n_{11},$$

т. е. $m_{11}\varphi_1 = n_{11}$. Отсюда имеем:

$$m_{11}\varphi_1\theta_1 = n_{11}\theta_1$$

или

$$m_{11} = n_{11}\theta_1.$$

Покажем теперь, что

$$b_1(a_2 + n_{12}) \leqslant m_{12}.$$

Действительно,

$$[b_1(a_1 + n_{12})]\,\theta_1\varphi_1\theta_1 \leqslant$$
$$\leqslant (a_2 + n_{12})\,\varphi_1\theta_1 = a_2\varphi_1\theta_1 + n_{22}\varphi_1\theta_1 = n_{12}\theta_1,$$

следовательно,

$$[b_1(a_2 + n_{12})]\,\theta_1\varphi_1\theta_1 \leqslant n_{12}\theta_1.$$

Но так как

$$n_{12} = \sum_{k=1}^{\infty} n_{12}^{(k)},$$

то, по лемме 2 работы (2), будем иметь:

$$n_{12}\theta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} n_{12}^{(k)}\theta_1.$$

Далее, согласно лемме 1 работы (7) и определению элементов $n_{12}^{(k)}$, получим:

$$n_{12}^{(k)}\theta_1\,(\theta_1\varphi_1\theta_1)^k = n_{12}^{(k)}\varphi_1\theta_1\,(\theta_1\varphi_1\theta_1)^k = n_{12}^{(k)}(\theta_1\varphi_1\theta_1)^k\cdot\theta_1 = 0$$

и поэтому

$$n_{12}^{(k)}\theta_1 \leqslant m_{12}^{(k)}.$$

Таким образом,

$$n_{12}\theta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} n_{12}^{(k)}\theta_1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m_{12}^{(k)} = m_{12},$$

т. е.

$$n_{12}\theta_1 \leqslant m_{12}.$$

Следовательно,

$$[b_1(a_2 + n_{12})]\,\theta_1\varphi_1\theta_1 \leqslant m_{12},$$

а так как структура правильная, то

$$b_1(a_2 + n_{12}) \leqslant m_{12}.$$

Умножая равенство $b_1 = m_{11} \dot{+} b_1(a_2 + n_{12})$ на m_{12}, получим, очевидно, что

$$m_{12} = b_1(n_2 + n_{12}).$$

Аналогично доказываются равенства

$$m_{21} = n_{12}\theta_2, \quad m_{22} = b_2(a_2 + n_{11}).$$

Легко видеть, что

$$[b_2 (a_2 + n_{11})] \varphi_2 = a_2 (b_2 + n_{11}),$$
$$[b_1 (a_2 + n_{12})] \varphi_2 = a_2 (b_1 + n_{12}).$$

Очевидно, что $m_{22}\varphi_2 \leqslant n_{22}$, а $m_{12}\varphi_2 \leqslant n_{21}$. Поэтому, как и выше, будем иметь:

$$n_{22} = a_2 (b_2 + n_{11}), \quad n_{21} = a_2 (b_1 + n_{12}).$$

Таким образом, мы построили продолжения (18) для двух прямых разложений $1 = a_1 \dot{+} a_2 = b_1 \dot{+} b_2$.

То, что они будут каноническими, следует из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 8. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы полной структуры* S^* $a_1 = n_{12} \dot{+} n_{12}$, *то разложения* (1) *обладают единственными каноническими продолжениями* (18).

Доказательство. Существование продолжений (18) следует из теоремы 7, так как полная структура S^* является и правильной (см. лемму 7 работы (³)).

Единственность канонических продолжений следует из теоремы 1 и леммы 10.

Следствие. *Если в паре прямых разложений* (1) *единицы структуры* S *прямое слагаемое* $a_1 = n_{11}^{(k)} \dot{+} n_{12}^{(k)}$, *то разложения* (1) *обладают единственными каноническими продолжениями*

$$a_1 = n_{11}^{(k)} \dot{+} n_{12}^{(k)}, \quad a_2 = n_{22}^{(k)} \dot{+} n_{21}^{(k)},$$

$$b_1 = m_{11}^{(k)} \dot{+} m_{12}^{(k)}, \quad b_2 = m_{22}^{(k)} \dot{+} m_{21}^{(k)}.$$

(Здесь полнота структуры не предполагается, так как определение элементов $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$, $m_1^{(k)}$ и $m_2^{(k)}$ не требует полноты структуры; см. доказательство леммы 4 работы (²).)

Существование этих продолжений вытекает из теоремы 7, так как структура правильная (см. замечание 1 к определению 4 работы (³)), а единственность следует из теоремы 8.

ТЕОРЕМА 9. *Если один из отмеченных эндоморфизмов* η *двух произвольных прямых разложений* (1) *единицы полной структуры* S^* *является* A-*расщепляющим или* η-*расщепляющим, то и остальные отмеченные эндоморфизмы этих прямых разложений являются соответственно такими же эндоморфизмами.*

Доказательство. Справедливость теоремы относительно A-расщепляющих отмеченных эндоморфизмов следует из теоремы 7 и леммы 6.

Пусть теперь, например, отмеченный эндоморфизм $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ прямых разложений (1) является η-расщепляющим. Тогда, согласно теореме 7 и лемме 6, прямые разложения (1) будут обладать следующими продолжениями:

$$a_1 = n_1 \dot{+} c_{a_1}, \quad a_2 = n_2 \dot{+} c_{a_2},$$
$$b_1 = m_1 \dot{+} c_{b_1}, \quad b_2 = m_2 \dot{+} c_{b_2},$$

где

$$c_{b_1} = c_{a_1}\theta_1, \quad c_{b_2} = c_{a_1}\theta_2, \quad c_{a_2} = c_{b_1}\varphi_2$$

и элемент c_{a_1} является η-автоморфическим.

Покажем, что элемент c_{b_1} есть $\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1$-автоморфический.

Действительно, пусть для $x \leqslant c_{b_1}$ выполняется неравенство

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 \leqslant x;$$

тогда

$$(x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1)\,\varphi_1 \leqslant x\varphi_1 \leqslant c_{b_1}\varphi_1 = c_{a_1}.$$

Отсюда, согласно условию теоремы, следует:

$$(x\varphi_1)\,\varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1 = x\varphi_1.$$

Применяя к левой части последнего равенства лемму 1 работы (7), будем иметь:

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1\varphi_1 = x\varphi_1.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства a_2, получим, в силу модулярности структуры:

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 + a_2 = x + a_2.$$

Умножая это равенство на c_{b_1} и учитывая при этом, что $c_{b_1}\cdot a_2 = 0$ (см. лемму 1), будем иметь:

$$x\theta_1\varphi_1\theta_1\varphi_2\theta_1 = x,$$

что и доказывает наше утверждение.

Относительно элементов c_{b_2}, c_{a_2} доказательство проводится аналогично.

§ 3

Определение 5. Назовем эндоморфизмы $\varphi_i\theta_j\varphi_i$, $\theta_j\varphi_i\theta_j$, $i, j=1,2$, *регулярными эндоморфизмами пары прямых разложений* (1) *единицы структуры* S.

ТЕОРЕМА 10. *Если по крайней мере для одного регулярного эндоморфизма* η *любой пары прямых разложений единицы структуры* S *с двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число* i, *что эндоморфизм* η *индуцирует автоморфизм элемента* $1\eta^i$, *то два произвольных прямых разложения единицы структуры* S *с конечным числом прямых слагаемых каждое обладает прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Пусть $1 = a_1 \dot{+} a_2 = b_1 \dot{+} b_2$ — два произвольных прямых разложения единицы структуры S, и пусть, например, для $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1$ существует такое целое положительное число i, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$, тогда, согласно теореме 7 работы (1), эндоморфизм η будет A-расщепляющим и

$$1 = k\,(\eta^i) + 1\eta^i.$$

Так как $1\eta^i \leqslant a_1$, то, согласно модулярности структуры, будем иметь

$$a_1 = a_1\cdot k\,(\eta^i) + c,$$

где $c = 1\eta^i$. Но, как следует из доказательства леммы 12 работы (2), эндоморфизм $\varphi_1\theta_2\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента $a_1\cdot k\,(\eta^i)$, а по условию

теоремы эндоморфизм $\varphi_1\theta_1\varphi_1$ индуцирует автоморфизм элемента c. Следовательно, в структуре S выполняется гипотеза расщепления, и справедливость нашей теоремы вытекает из теоремы 4.

Учитывая теорему 20 работы ([1]), можно заключить, что теорема 10 является обобщением следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 11. *Если по крайней мере для одного отмеченного эндоморфизма η любой пары прямых разложений единицы структуры S с двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число i, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$, то два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Пусть $1 = a_1 \dotplus a_2 = b_1 \dotplus b_2$ — два произвольных прямых разложения единицы структуры S, и пусть, например, для отмеченного эндоморфизма $\eta = \varphi_1\theta_1\varphi_1\theta_2\varphi_1$ этой пары прямых разложений существует такое целое положительное число i, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$. Тогда, согласно теореме 7 работы ([1]), эндоморфизм η будет A-расщепляющим и

$$1 = k(\eta^i) \dotplus 1\eta^i.$$

Так как $1\eta^i \leqslant a_1$, то

$$a_1 = a_1 k(\eta^i) \dotplus c,$$

где $c = 1\eta^i$. Отсюда имеем:

$$a_1 = a_1 k(\eta_1^i) \dotplus a_1 k(\eta_2^i) \dotplus c,$$

где $\eta_1 = \varphi_1\theta_1\varphi_1$ и $\eta_2 = \varphi_1\theta_2\varphi_1$. Так как эндоморфизм η_2 индуцирует автоморфизм элемента $a_1 k(\eta_1^i)$, а эндоморфизм η_1 — автоморфизм $a_1 k(\eta_2^i)$ и элемент c удовлетворяет условиям 2) и 3) определения 3, то тем самым мы показали, что в структуре S выполняется гипотеза A-расщепления. Но так как гипотеза A-расщепления является частным случаем гипотезы расщепления, то справедливость нашей теоремы вытекает из теоремы 4.

Теорема 11 является усилением теоремы 6 работы ([2]).

ТЕОРЕМА 12. *Если хотя бы для одного регулярного (отмеченного) эндоморфизма η любой пары прямых разложений единицы структуры S двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число i, что*

$$1\eta^i = 1\eta^{i+1} \quad \text{и} \quad k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}),$$

то два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.

Доказательство. Пусть для какого-либо регулярного (отмеченного) эндоморфизма η произвольной пары прямых разложений единицы структуры S с двумя слагаемыми каждое

$$1\eta^i = 1\eta^{i+1} \quad \text{и} \quad k(\eta^i) = k(\eta^{i+1});$$

тогда, согласно лемме 6 работы ([1]),

$$1\eta^i k(\eta^i) = 0.$$

Пусть для $x \leqslant 1\eta^i$ выполняется равенство $x\eta = 0$; тогда $x \leqslant k(\eta)$ и поэтому

$$x \leqslant 1\eta^i k(\eta) \leqslant 1\eta^i k(\eta^i) = 0,$$

откуда следует, что $x = 0$.

Мы получили, что эндоморфизм η индуцирует автоморфизм элемента $1\eta^i$. Таким образом, справедливость теоремы для регулярного эндоморфизма следует из теоремы 10, а для отмеченного — из теоремы 11.

Следствие 1. *Если хотя бы для одного отмеченного эндоморфизма η произвольной пары прямых разложений единицы структуры S с двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число i, что $1\eta^i = 1\eta^{i+1}$, и если структура $S_u(\eta)$, где $u = 1\eta$, удовлетворяет условию* A) *работы* (1), *то два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Пусть условия следствия выполнены. Тогда, так как

$$1\eta^i \mid 1\eta^i \cdot k(\eta^i) \approx 1\eta^i \mid 0,$$

будем иметь, согласно условию A):

$$1\eta^i \cdot k(\eta^i) = 0.$$

Отсюда, в силу леммы 6 работы (1), получим:

$$k(\eta^i) = k(\eta^{i+1}).$$

Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 12.

Следствие 2. *Если по крайней мере для одного отмеченного эндоморфизма η произвольной пары прямых разложений единицы структуры S с двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число i, что $k(\eta^i) = k(\eta^{i+1})$, и если $1 \mid k(\eta^i)$ удовлетворяет условию* B) *работы* (1), *то два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.*

Доказательство. Пусть условия следствия выполнены. Так как

$$1 \mid k(\eta^i) \approx 1\eta^i \mid 0,$$

то $1\eta^i \mid 0$ удовлетворяет условию B). С другой стороны,

$$1\eta^i \mid 1\eta^i \cdot k(\eta^i) \simeq 1\eta^{i+1} \mid 0;$$

поэтому, согласно лемме 6 работы (1), имеем:

$$1\eta^i \cdot k(\eta^i) = 0.$$

Следовательно, на основании условия B),

$$1\eta^i = 1\eta^{i+1}.$$

Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 12.

Из теоремы 12 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Если хотя бы для одного отмеченного эндоморфизма η произвольной пары прямых разложений единицы структуры S с двумя*

слагаемыми каждое структура $S_u(\eta)$, *где* $u = 1\eta$, *обладает главным рядом, то два произвольных прямых разложения единицы структуры* S *с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.*

ТЕОРЕМА 13. *Если хотя бы для одного регулярного эндоморфизма* η *любой пары прямых разложений единицы полной структуры* S^{***} *с двумя слагаемыми каждое существует такое целое положительное число* i, *что* $1\eta^i$ *есть элемент* η-*цепи Леви, то два произвольных прямых разложения единицы полной структуры* S^{***} *с конечным множеством слагаемых каждое обладают прямо подобными продолжениями.*

Справедливость этой теоремы следует из теоремы 16 работы ([1]) и теоремы 10.

Поступило
1.VI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мочульский Е. Н., Расщепляющие эндоморфизмы структур, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 25 (1961), 443—476.

[2] Мочульский Е. Н., Прямые разложения дедекиндовых структур, Матем. сборн., 37 (79) : 1 (1955), 89—102.

[3] Лившиц А. Х., Прямые разложения вполне дедекиндовых структур, Матем. сборн., 28 (70) : 3 (1951), 481—502.

[4] Hostinsky L. A., Direct decomposition in lattices, Amer. J. of Math., LXXIII, № 4 (1951), 741—755.

[5] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1953.

[6] Baer R., Direct decompositions, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 62—68.

[7] Курош А. Г., Изоморфизмы прямых разложений. II, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 47—72.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 749—754

И. М. ВИНОГРАДОВ

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА

Доказана некоторая теорема, характеризующая равномерность распределения дробных частей значений многочлена.

Обозначения. n — целое, $n \geqslant 4$, $\nu = \frac{1}{n}$, m — целое положительное, $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — вещественные, $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x$.

Для вещественных A и B с условием $0 \leqslant B - A \leqslant 1$ обозначение $A \leqslant z < B \pmod 1$ показывает, что при некотором целом d имеем $A + d \leqslant z < B + d$.

$p > 1$, x пробегает возрастающую последовательность (x) целых чисел (например, числа натурального ряда, простые числа и т. п.), p_1 — число всех членов последовательности (x) с условием $0 < x \leqslant p$, а $p_1(A, B)$ — число тех членов с таким же условием, для которых имеем $A \leqslant f(x) < B \pmod 1$. Наконец,

$$T_m = \sum_{0 < x \leqslant p} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Целью этой работы является доказательство некоторой общей теоремы, показывающей, что при достаточно малом положительном δ, меньшем 0,5, из n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$ можно выделить некоторую область, которая содержит все без исключения точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ этого n-мерного куба с условием, что при каких-либо A и B выполняется неравенство

$$|\, p_1(A, B) - (B - A)\, p_1 \,| \geqslant 3p^{1-\delta},$$

и объем которой при неограниченном возрастании p весьма быстро стремится к нулю.

ЛЕММА 1. *Пусть l — целое положительное,*

$$D_l = 2^{2,9n^2 l + nl^2} n^{n^2 l}, \quad b_l = \left[nl + \frac{n(n+1)}{4} + 1 \right].$$

Тогда

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |\, T_1 \,|^{2b_l} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 < D_l p^{2b_l - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu)^l)}.$$

Доказательство. Положим $P_l = (2n)^{2n(1-\nu)^{-l}}$. При $p \geqslant P_l$ эта лемма является видоизменением теоремы работы [1], которое получается путем лучшего использования формул, содержащихся в последних четырех

строках стр. 583. Докажем эту лемму полностью, применяя метод индукций.

Пусть лемма полностью верна при некотором l. Тогда при $p \leqslant P_{l+1}$ найдем:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_1|^{2b_{l+1}} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 \leqslant p^{2n} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_1|^{2b_l} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 <$$

$$< D_l p^{2b_{l+1} - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu)^l)},$$

причем будем иметь:

$$\frac{D_l p^{2b_{l+1} - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu)^l)}}{D_{l+1} p^{2b_{l+1} - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu)^{l+1})}} < \frac{P_{l+1}^{\frac{n+1}{2(1-\nu)}(1-\nu)^{l+1}}}{2^{2,9n^2+n(2l+1)} n^{n^2}} < 1.$$

Поэтому лемма остается верной и после замены l на $l+1$.

Но лемма полностью верна при $l=1$. Действительно, при $p \leqslant P_1$ найдем:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |T_1|^{2b_1} d\alpha_n \ldots d\alpha_1 \leqslant p^{2b_1},$$

причем будем иметь:

$$\frac{p^{2b_1}}{D_1 p^{2b_1 - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu))}} \leqslant \frac{P_1^{\frac{n+1}{2}}}{2^{2,9n^2+n} n^{n^2}} < 1.$$

Следовательно, лемма полностью верна и при любом l.

ЛЕММА 2. *Пусть* $k \geqslant 1$, $h = \ln k$, $\delta_0 = \frac{1}{4k}$,

$$D' = (2^{2,9h+h^2} n^h)^{n^3}, \quad \lambda' = 1 - \frac{h+1,3}{k}.$$

Тогда из n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$ *можно выделить область* Ω' *с объемом, не превосходящим*

$$D' p^{-\lambda' \frac{n(n+1)}{2}},$$

содержащую все без исключения точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ *этого n-мерного куба с условием*

$$|T_1| \geqslant p^{1-\delta_0}. \tag{1}$$

Доказательство. При $k \leqslant 1,96$ лемма тривиальна, так как в этом случае $\lambda' < 0$. Поэтому будем предполагать, что $k > 1,96$. Пусть $l = [nh]$, $\sigma = nh - l$. Упомянутый в лемме n-мерный куб можно разбить на одинаковые n-мерные параллелепипеды, длины ребер которых настолько малы, что модуль разности значений $|T_1|^{2b_l}$, отвечающих двум точкам одного и того же параллелепипеда, всегда не превосходит

разности между правой и левой частями неравенства леммы 1. Областью Ω' будем считать область, образованную всеми теми малыми параллелепипедами, которые содержат хотя бы одну точку с условием (1). Представляя объем области Ω' в виде $D'R$, согласно лемме 1 легко найдем:

$$D'Rp^{2b_l-2b_l\delta_0} \leqslant D_l p^{2b_l - \frac{n(n+1)}{2}(1-(1-\nu)^l)},$$

$$R \leqslant p^{-\frac{n(n+1)}{2}(1-G)}, \quad G = (1-\nu)^l + \frac{4b_l\delta_0}{n(n+1)},$$

$$G < \frac{1}{k(1-\nu)^\sigma} + \left(\frac{4nh}{n+1} - \frac{4\sigma}{n+1} + 1 + \frac{1}{n+1}\right)\delta_0 <$$

$$< \frac{1}{k(1-\nu)} + \left(4h - \frac{3+4h}{n+1} + 1\right)\delta_0 < \frac{h+1{,}3}{k},$$

$$1 - G > \lambda', \quad D'R < D'p^{-\lambda'\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Пример. Полагая $k = 2{,}5$, убедимся, что объем области Ω', содержащей все точки n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$ с условием

$$|T_1| \geqslant p^{0,9},$$

будет

$$< (12n)^{n^3} p^{-0,1\frac{n(n+1)}{2}}.$$

ЛЕММА 3. *Пусть α и β — вещественные,*

$$0 < \Delta < 0{,}5, \quad \Delta \leqslant \beta - \alpha \leqslant 1 - \Delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(z)$ с периодом 1 и с условиями:

1. *$\psi(z) = 1$ в интервале $\alpha + 0{,}5\Delta \leqslant z \leqslant \beta - 0{,}5\Delta$;*

2. *$0 \leqslant \psi(z) \leqslant 1$ в интервале $\alpha - 0{,}5\Delta \leqslant z \leqslant \alpha + 0{,}5\Delta$ и в интервале $\beta - 0{,}5\Delta \leqslant z \leqslant \beta + 0{,}5\Delta$;*

3. *$\psi(z) = 0$ в интервале $\beta + 0{,}5\Delta \leqslant z \leqslant 1 + \alpha - 0{,}5\Delta$;*

4. *$\psi(z)$ разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(z) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos 2\pi mz + b_m \sin 2\pi mz),$$

где

$$|a_m| < \frac{2}{\pi m}, \qquad |b_m| < \frac{2}{\pi m},$$

$$|a_m| < \frac{2}{\pi^2 m^2 \Delta}, \quad |b_m| < \frac{2}{\pi^2 m^2 \Delta}.$$

Доказательство. Эта лемма является следствием при $r = 1$ леммы 12 гл. 1 книги (²).

ТЕОРЕМА. *Пусть $k \geqslant 1$, $h = \ln k$, $\delta = \frac{1}{5k}$,*

$$D = (2^{3h+h^2} n^h)^{n^3}, \quad \lambda = 1 - \frac{h+1{,}35}{k}.$$

Тогда из n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$ можно выделить

область Ω *с объемом, не превосходящим*

$$Dp^{-\lambda\frac{n(n+1)}{2}},$$

содержащую все без исключения точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ *этого* n*-мерного куба, для которых при каких-либо* A *и* B *с условием* $0 \leqslant B - A \leqslant 1$ *выполняется неравенство*

$$|p_1(A, B) - (B - A)\,p_1| \geqslant 3p^{1-\delta}.$$

Доказательство. Мы будем пользоваться леммами 2 и 3 и их обозначениями, причем положим

$$t = p^{\delta}, \quad \Delta = \frac{1}{6t}, \quad M = \frac{6t}{\pi}, \quad M_1 = \frac{60t^2}{\pi}.$$

При $k \leqslant 2$ теорема тривиальна, так как в этом случае $\lambda < 0$. Поэтому будем предполагать, что $k > 2$.

Область Ω мы построим следующим образом. При заданном m вообразим фигуру, подобную n-мерному кубу, разбитому на n-мерные параллелепипеды, рассмотренному при доказательстве леммы 2, но с длинами ребер, уменьшенными в m раз. Объемы нового куба, каждого нового параллелепипеда, а также области Ω_m, в которую перейдет область Ω', будут меньше прежних в m^n раз. Прежний n-мерный куб может быть разбит на m^n таких новых кубов. Совокупность областей Ω_m всех этих новых кубов назовем областью Ω'_m. Объем области Ω'_m равен объему области Ω'. Областью Ω будем считать общую часть областей Ω'_m, отвечающих значениям m, не превосходящим M_1. Объем области Ω будет

$$\leqslant D'p^{-\lambda'\frac{n(n+1)}{2}}M_1$$

и, следовательно, не будет превосходить указанной в лемме границы, так как

$$\frac{60}{\pi} < 2^{4,3} < 2^{0,1kn^3}, \quad t^2 \leqslant p^{\frac{1}{20k}\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Пусть $0 \leqslant B - A \leqslant 1 - 2\Delta$ и точка $(\alpha_n, \ldots \alpha_1)$ n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$ не принадлежит области Ω. Тогда при $m \leqslant M_1$ будем иметь:

$$|T_m| < p^{1-\delta_0}, \quad \Big|\sum_{0<x\leqslant p}\cos 2\pi m f(x)\Big| + \Big|\sum_{0<x\leqslant p}\sin 2\pi m f(x)\Big| < \sqrt{2}p^{1-\delta_0},$$

а при $m > M_1$ правую часть последнего неравенства мы можем заменить произведением $\sqrt{2}p$.

Полагая $\alpha = A - 0{,}5\Delta$, $\beta = B + 0{,}5\Delta$ и замечая, что $\beta - \alpha = B - A + \Delta$, согласно лемме 3 будем иметь:

$$\sum_{0<x\leqslant p}\psi(f(x)) - (B - A)\,p_1 <$$

$$< p\Delta + \sqrt{2}\,p^{1-\delta_0}\Big(\sum_{0<m\leqslant M}\frac{2}{\pi m} + \sum_{M<m\leqslant M_1}\frac{2}{\pi^2 m^2\Delta} + \sum_{m>M_1}\frac{2t}{\pi^2 m^2\Delta}\Big) <$$

$$< \frac{\sqrt{8}}{\pi}\,p^{1-\delta_0}\Big(\frac{\pi}{6\sqrt{8}} + 1 + \int_1^M \frac{dm}{m} + \int_M^{M_1}\frac{dm}{\pi m^2\Delta} + \frac{t}{\pi M_1^2\Delta} + \int_{M_1}^{\infty}\frac{t\,dm}{\pi m^2\Delta}\Big) <$$

$$< \frac{\sqrt{8}}{\pi}\,p^{1-\delta_0}\Big(\frac{\pi}{6\sqrt{8}}1 + \ln t + \ln\frac{6}{\pi} + 1 + \frac{1}{10}\Big) < \frac{\sqrt{8}}{\pi}\,p^{1-\delta_0}(\ln t + 2{,}94).$$

Но легко находим:

$$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\,\frac{\ln t + 2{,}94}{t^{0,2}} \leqslant \frac{\sqrt{8}}{\pi}\,\frac{6}{e^{0,412}} < 3, \qquad p^{-\delta_0}t^{0,2} = p^{-\delta}.$$

Следовательно,

$$p_1(A,B) < (B-A)\,p_1 + 3p^{1-\delta}. \tag{2}$$

Аналогичным путем при $2\Delta \leqslant B - A \leqslant 1$, полагая $\alpha = A + 0{,}5\Delta$, $\beta = B - 0{,}5\Delta$, получим:

$$p_1(A,B) > (B-A)\,p_1 - 3p^{1-\delta}. \tag{3}$$

Поэтому при $2\Delta \leqslant B - A \leqslant 1 - 2\Delta$ будем иметь:

$$|\,p_1(A,B) - (B-A)\,p_1\,| < 3p^{1-\delta}. \tag{4}$$

При $0 \leqslant B - A \leqslant 2\Delta$ из неравенств $0 \leqslant p_1(A,B)$ и (2), а при $1 - 2\Delta \leqslant B - A \leqslant 1$ из неравенств $p_1 \geqslant p_1(A,B)$ и (3) снова получим неравенство (4).

Пример. Полагая $k = 3$, убедимся, что объем области Ω, содержащей все точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ n-мерного куба $0 < \alpha_n \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha_1 \leqslant 1$, для которых при каких-либо A и B с условием $0 \leqslant B - A \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$p_1(A,B) - (B-A)\,p_1 \geqslant 3p^{1-\frac{1}{15}},$$

не превосходит

$$(24n^{1,1})^{n^3}p^{-\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Замечание 1. Леммы 1 и 2, а также теорема останутся верными и в том случае, если функция $f(x)$ будет заменена суммою $f(x) + F(x)$, где $F(x)$ — любая заданная функция, принимающая вещественные значения для значений x, принадлежащих последовательности (x). Это утверждение является следствием того тривиально доказываемого факта, что от указанной замены рассматриваемый в лемме 1 кратный интеграл может лишь или остаться равным прежнему, или же уменьшиться.

Более того, леммы 1 и 2, а также теорема при надлежащем новом толковании символов p_1 и $p_1(A, B)$, останутся верными и в том случае, если сумма T_m будет заменена суммою

$$\sum_{0<x\leqslant p} \tau(x)\,e^{2\pi i m f(x)},$$

где $\tau(x)$ — любая заданная функция, принимающая значения с условием $|\tau(x)| \leqslant 1$ для значений x, принадлежащих последовательности (x).

Замечание 2. Результат, аналогичный указанному в примере к лемме 2, отмечался мною раньше, например во введении к книге (2) на стр. 9.

Поступило
16.VIII.1961

ЛИТЕРАТУРА

1 Виноградов И. М., Об одном кратном интеграле, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 577—588.

2 Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 755—764

А. Д. ТАЙМАНОВ

ХАРАКТЕРИСТИКА АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССОВ МОДЕЛЕЙ. II

В работе рассматривается вопрос об эквивалентности двух систем аксиом S, T относительно системы аксиом K и дается усиление теоремы А. Робинсона осносительно σ-устойчивости. Результаты работы ([1]) переносятся на формулы, содержащие свободные предметные переменные.

Настоящая работа является продолжением работы автора ([2]) и работы А. Робинсона ([1]), в которой дается усиление теоремы Лося — Сушко.

Д. А. Захаров, развивая идеи и методы А. Робинсона, усилил его результаты и перенес их на случай классов аксиом вида

$$\underbrace{UE\ \ldots}_{l} C_{\Delta}.$$

В настоящей работе дается другое, на наш взгляд более простое доказательство теорем А. Робинсона и Д. А. Захарова. В § 4 результаты работы ([1]) переносятся на формулы, содержащие свободные предметные переменные.

§ 1. Определения и обозначения

Мы сохраняем все определения и обозначения из работы ([2]) и считаем их известными читателю.

Пусть дана система K аксиом У. И. П. Система аксиом H называется эквивалентной системе аксиом T относительно K, если из систем H, K выводима система T и из систем K, T выводима система H:

$$H \sim T \ (\mathrm{mod}\ K).$$

Это определение введено в работе ([1]).

Через $M(\Sigma)$ обозначается класс моделей, определяемый системой аксиом Σ. Если S — некоторый класс аксиом и M — класс моделей, то $M \in SC_{\Delta}$ означает, что класс M может быть определен системой аксиом, принадлежащих S.

Класс аксиом видимой степени $l+1$, начинающихся с $\forall$, обозначается через $\underbrace{UE\ \ldots}_{l}$. Аналогично определяется класс $\underbrace{EU\ \ldots}_{l}$.

§ 2. Теорема А. Робинсона

Система аксиом H называется σ-устойчивой относительно K, если для любой возрастающей последовательности моделей $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ из $M(K)$ из соотношений

$$\mathfrak{M}_i \in M(K, H), \quad \bigcup \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} \in M(K),$$

следует

$$\mathfrak{M} \in M\ (H).$$

ТЕОРЕМА 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *система аксиом H σ-устойчива относительно K;*

2) *существует система T аксиом вида UE, эквивалентная системе H относительно K.*

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1) следует условие 2). Класс моделей $M\ (K, H) = M\ (K) \cap M\ (H)$ аксиоматизируем, и по теореме Чжана [см. (3), теорема 7], имеем:

$$L = Cl\ (\bigcup (M\ (K, H))) \in UEC_{\Delta}.$$

Класс L описывается системой всех аксиом α вида UE, истинных на всех моделях из L. Эту систему обозначим через T. Остается показать, что

$$T \sim H\ (\mathrm{mod}\ K).$$

Включение $M\ (K, H) \subset M\ (K, T)$ очевидно. Покажем, что

$$M\ (K, T) \subset M\ (K, H).$$

Допустим, что существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что

$$\mathfrak{M} \in M\ (K, T) - M\ (K, H).$$

Тогда

$$\mathfrak{M} \in Cl\ (\bigcup (M\ (K, H))$$

и существуют такая модель $\mathfrak{M}'$, арифметически эквивалентная $\mathfrak{M}$, и такая возрастающая последовательность моделей $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\mathfrak{M}_i \in M\ (K, H)$, что $\mathfrak{M}' = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i$. Из условия 1) и определения σ-устойчивости следует, что $\mathfrak{M}' \in M\ (H)$. Это означает, что

$$M\ (K, T) \subset M\ (K, H)$$

и

$$M\ (K, T) = M\ (K, H)$$

или

$$T \sim H\ (\mathrm{mod}\ K).$$

Докажем теперь, что из условия 2) следует условие 1). Пусть выполнено условие 2) и дана возрастающая последовательность моделей $\mathfrak{M}_i$ $i = 1, 2, 3, \ldots$, таких, что $\mathfrak{M}_i \in M\ (K, H)$, $\bigcup \mathfrak{M}_i \in M\ (K)$.

Из $H \sim T\ (\mathrm{mod}\ K)$ следует, что $\mathfrak{M}_i \in M\ (T)$ и, в силу теоремы Лося — Сушко, $\bigcup \mathfrak{M}_i \in M\ (T)$. Если $\bigcup \mathfrak{M}_i \in M\ (K)$, то

$$\bigcup \mathfrak{M}_i \in M\ (T) \cap M\ (K) = M\ (K, T) = M\ (K, H).$$

Отсюда получаем:

$$\bigcup \mathfrak{M}_i \in M\ (H).$$

т. е. система H σ-устойчива относительно K, что и требовалось доказать.

В доказательстве теоремы 1 мы использовали следующие факты:

1. Существует оператор P, ставящий в соответствие некоторой последовательности моделей $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, из класса моделей M новую модель $P(\mathfrak{M}_i)$.

2. Эквивалентность следующих условий:

а) $M \in UEC_\Delta$,

б) класс моделей M аксиоматизируем и класс M замкнут относительно операции P, т. е. $P(M) \subset M$, где

$$PM = \{\text{совокупность всех } P(\mathfrak{M}),\ \mathfrak{M} \in M\}.$$

3. Если $M \in AC_\Delta$, то $Cl(P(M)) \in UEC_\Delta$.

Используя это очевидное замечание, можно усилить теорему А. Робинсона и сформулировать ее в более общей форме.

Пусть S обозначает некоторый класс аксиом и $M \in SC_\Delta$. Пусть $P(\mathfrak{M}_i)$, $i \in I$, обозначает оператор, ставящий в соответствие последовательности моделей $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, из класса M, удовлетворяющей некоторому условию l, некоторую модель $P(\mathfrak{M}_i)$. В зависимости от l, оператор P может быть всюду определенным или частично определенным на M. Оператор P может быть и многозначным. В последнем случае последовательности $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, ставится в соответствие класс моделей $P(\mathfrak{M}_i)$.

Мы скажем, что класс моделей M замкнут относительно операции P, если из $\mathfrak{M}_i \in M$, $i \in I$, следует, что $P(\mathfrak{M}\ ) \subset M$ ($P(\mathfrak{M}_i) \in M$, если P — однозначный оператор).

В дальнейшем будем предполагать, что оператор P удовлетворяет условию $M \subset P(M)$, т. е. если $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$, $i \in I$, то $\mathfrak{M} \in P(\mathfrak{M}_i)$.

Допустим, что нами доказаны следующие две теоремы для данного оператора P и класса аксиом S.

ТЕОРЕМА L — S. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $M \in SC_\Delta$;

2) $M \in AC_\Delta$ *и* $P(M) \subset M$.

ТЕОРЕМА T — C. *Если* $M \in AC_\Delta$, *то* $Cl(P(M)) \in SC_\Delta$.

Из этих теорем легко получается следующее усиление теоремы 1 (Робинсона).

ТЕОРЕМА 2. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует система аксиом* T, $T \subset S$, *эквивалентная системе аксиом* H *относительно* K, $H \sim T \pmod K$;

2) *если все модели* $\mathfrak{M}_i$, $i \in I$, *принадлежат классу* $M(K, H)$, *то*

$$M(T) \cap P(\mathfrak{M}_i) \subset M(H).$$

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1) следует условие 2). Пусть система T аксиом вида S определяет класс моделей $M(T) \in SC_\Delta$ и $H \sim T \pmod K$. Покажем, что в этом случае имеет место условие 2). Пусть $\mathfrak{M}_i \in M(K, H)$, $i \in I$. По теореме L — S,

$$P(M(T)) \subset M(T).$$

Из соотношений $T \sim H \pmod K$ и $\mathfrak{M}_i \in M(T, H)$ вытекает, что

$$\mathfrak{M}_i \in M(K, T) \subset M(T)$$

и, следовательно,

$$P(\mathfrak{M}_i) \subset M(T),$$

$$M(K) \cap P(\mathfrak{M}_i) \subset M(K) \cap M(T) = M(K, T) = M(K, H),$$

$$M(K) \cap P(\mathfrak{M}_i) \subset M(H).$$

Докажем теперь, что из условия 2) следует условие 1). Пусть из $\mathfrak{M}_i \in M(K, H)$, $i \in I$, всегда следует $M(K) \cap P(\mathfrak{M}_i) \subset M(H)$.

Покажем, что в этом случае существует система T аксиом вида S, эквивалентная системе H относительно K. Рассмотрим P-замыкание класса моделей $M(K, H)$, т. е. $P(M(K, H))$ и $ClP(M(K, H))$.

По теореме Т — С имеем:

$$Cl(P(M(K, H))) \subset SC_\Delta.$$

Систему всех аксиом вида S, истинных на $Cl(P(M(K, H)))$, обозначим через T. Покажем, что $H \sim T \pmod K$. Очевидно,

$$M(K, H) \subset M(T)$$

и

$$M(K, H) \subset M(K, T).$$

Если K, T не влечет K, H, то существует модель $\mathfrak{M}$ такая, что

$$\mathfrak{M} \in M(K, T) \setminus M(K, H).$$

Но тогда существует последовательность $\mathfrak{M}_i$, для которой

$$\mathfrak{M}_i \in M(K, H),\ i \in I, \text{ и } \mathfrak{M} \in Cl(P(\mathfrak{M}_i)).$$

Из $\mathfrak{M} \in M(K, T)$ следует, что

$$\mathfrak{M} \in Cl(P(\mathfrak{M}_i) \cap M(K))$$

и

$$\mathfrak{M} \in M(H), \quad \mathfrak{M} \in M(H) \cap M(K).$$

Мы получаем:

$$M(K, T) \subset M(K, H),$$

т. е.

$$H \sim T \pmod K.$$

Из этой теоремы следуют другие, аналогичные теореме Робинсона.

Усиление теоремы Лося — Тарского. Определим оператор P следующим образом: каждой модели $\mathfrak{M}$ поставим в соответствие класс всех ее подмоделей $P(\mathfrak{M})$. Это будет многозначное отображение.

Пусть S обозначает класс всех универсальных аксиом (т. е. аксиом, не содержащих квантора существования). В качестве теоремы L — S возьмем утверждение, доказанное Тарским [4] и Лосем [5]:

Следующие условия эквивалентны:

1) $M \in SC_\Delta = UC_\Delta$,

2) $M \in AC_\Delta$ *и* $P(M) \subset M$.

В качестве теоремы Т — С возьмем утверждение, доказанное Тарским [4] и Чжаном [3]:

Если $M \in AC'_\Delta$, *то* $P(M) \in UC_\Delta$.

Из этих утверждений и теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует система* T *универсальных аксиом, эквивалентная данной системе* H *аксиом относительно* K, *т. е.* $H \sim T \pmod K$ *и* $T \subset U$;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M} \in M(K, H)$ *всякая подмодель* $\mathfrak{N} \in S(\mathfrak{M})$, *принадлежащая классу* $M(K)$, *принадлежит классу* $M(H)$.

Теперь определим оператор P так, что

$$P(\mathfrak{M}) = \mathfrak{S}_l(\mathfrak{M}) = \{\text{класс всех } l\text{-подмоделей модели } \mathfrak{M}\},$$

и через S обозначим класс аксиом $\underbrace{UE\ldots}_{l}$.

Теорему L — S заменим теоремой 10 работы (2):

Следующие условия эквивалентны:

1) $M \in \underbrace{UE\ldots}_{l} C_\Delta$,

2) $M \in AC_\Delta$ *и* $\mathfrak{S}_l(M) \subset M$.

Теорему Т — С заменим теоремой 11 работы (2):

Если $M \in AC_\Delta$, *то* $\mathfrak{S}_l(M) \in \underbrace{UE\ldots}_{l} C_\Delta$.

Из этих теорем и теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует система* T *аксиом вида* $\underbrace{UE\ldots}_{l}$, *эквивалентная данной системе аксиом* H *относительно* K, *т. е.* $T \sim H \pmod K$ *и* $T \in \underbrace{UE\ldots}_{l}$;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M}$ *из* $M(K, H)$ *всякая* l*-подмодель* $\mathfrak{N}$ *модели* $\mathfrak{M}$, *принадлежащая классу* $M(K)$, *принадлежит классу* $M(H)$.

§ 3. Приведение аксиомы к данному виду

В работе (2) и в § 2 настоящей работы мы рассматривали условие эквивалентности системы аксиом H системе аксиом T определенного класса S. Возникает вопрос: если система H содержит только одну аксиому, то каково будет условие эквивалентности H одной аксиоме T из класса S? Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от свойств класса S.

Определение. Класс аксиом S назовем &-классом ($\vee$-классом), если для любой конечной системы аксиом $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ из этого класса аксиома $\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_n$ (аксиома $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_n$) дедуктивно эквивалентна одной аксиоме класса S.

Классы U, E, UE, EU, ... являются &, $\vee$-классами. Класс аксиом хорновского вида является &-классом, но не является $\vee$-классом.

Если аксиома $\mathfrak{A}$ эквивалентна системе аксиом H относительно K, $\mathfrak{A} \sim H \pmod K$, то система аксиом $\{K, H \neg \mathfrak{A}\}$ противоречива. В этом случае, согласно теореме А. И. Мальцева (6), существует конечная подсистема

$$\neg \mathfrak{A}, h_1, \ldots, h_{k_1}, \ h_i \in H,$$

такая, что система $\{K, h_1, \ldots, h_{k_1}, \neg \mathfrak{A}\}$ не совместна.

Очевидно, $K, \mathfrak{A}$ влечет $h_1, \& \ldots \& h_{k_1}$ и $h_1 \& \ldots \& h_{k_1}, K$ влечет $\mathfrak{A}$. Следовательно,

$$h_1 \& \ldots \& h_{k_1} \sim \mathfrak{A} \pmod K.$$

Если H есть &-класс, то $h = h_1 \& \ldots \& h_{k_1} \in H$ и аксиома $\mathfrak{A}$ эквивалентна относительно K одной аксиоме h из H. Это простое замечание позволяет из условия эквивалентности аксиомы $\mathfrak{A}$ системе Σ аксиом класса S получить условие эквивалентности аксиомы $\mathfrak{A}$ одной аксиоме $\mathfrak{B}$ класса S, если S есть &-класс. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Из следствия 1 теоремы 2, замечая, что $S = U$ образует &-класс, непосредственно получаем

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *для данной аксиомы существует аксиома* $\mathfrak{B}$ *из* $S = U$ *такая, что* $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \pmod K$;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M}$ *из* $M(\mathfrak{A}, K)$ *всякая подмодель* $\mathfrak{N} \in S(\mathfrak{M})$, *принадлежащая классу* $M(K)$, *принадлежит классу* $M(\mathfrak{A})$.

Пример 2. Из следствия 2 теоремы 2, замечая, что $S = \underbrace{UE\ldots}_{l}$ есть &-класс, непосредственно получаем

Следствие 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует аксиома* $\mathfrak{B} \in S = \underbrace{UE\ldots}_{l}$, *эквивалентная данной аксиоме* $\mathfrak{A}$ *относительно* K, *т. е.* $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A} \pmod K$;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M}$ *из* $M(K, \mathfrak{A})$ *всякая* l*-подмодель* $\mathfrak{N}$ *модели* $\mathfrak{M}$, *принадлежащая классу* $M(K)$, *принадлежит классу* $M(\mathfrak{A})$.

§ 4. Приведение формул, содержащих свободные переменные, к определенному виду

Рассмотрим формулы У. И. П., содержащие предикатные символы $P_1, \ldots, P_k$, т. е. формулы вида

$$\mathfrak{A} = Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m \mathfrak{A}^* (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, P_1, \ldots, P_k),$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — сочетание кванторов, $y_1, \ldots, y_n$ — свободные переменные. Обозначим через S определенный класс таких формул. Например, S может изображать класс U формул, не содержащих квантора существования, класс UE формул сколемовского вида и т. д.

А. И. Мальцев поставил задачу выяснить условия приводимости данной формулы $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$ к виду S, т. е. условия существования такой формулы $\mathfrak{B}$ из класса S, что формула $\forall y_1, \ldots, y_n (\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$ выводима.

В ряде работ эта задача при различных вариантах определения класса S решается для высказываний, т. е. для $n = 0$ [см. ([4]), ([7]), ([2]), ([8])]. Для $S = \exists$ (класса экзистенциальных формул) этот вопрос решен полностью А. Робинсоном ([7]). В этом параграфе показывается, что из решения вопроса для высказываний можно получить его решение для формул, содержащих свободные переменные.

Пусть дан класс формул S, удовлетворяющий следующему условию: если формула $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$, содержащая постоянные $a_1, \ldots, a_n$, принадлежит S, то формула, полученная из $\mathfrak{B}$ заменой $a_1, \ldots, a_n$ свободными переменными, тоже принадлежит S. Пусть также дана система K аксиом, не содержащих постоянных. Предикаты, встречающиеся в K, обозначим через $P_1, \ldots, P_k$.

Предположим, что доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *высказывание* $\mathfrak{A}$, *не содержащее предикатов, отличных от* $P_1, \ldots, P_k$, *приводимо к виду* S *относительно* K, *т. е. существует высказывание* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \in S$, *такое, что* $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ *выводимо из* K;

2) *высказывание* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию* P.

Из этой теоремы легко получить нижеследующую теорему В, являющуюся усилением теоремы А для формул, содержащих свободные переменные. Для этого введем следующее определение. Мы скажем, что формула $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$, содержащая свободные переменные $y_1, \ldots, y_n$ и не содержащая предикатов, отличных от $P_1, \ldots, P_k$, удовлетворяет условию P относительно K, если для любой модели $\mathfrak{M}$ из $M(K)$ и для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{M}$ высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию P.

ТЕОРЕМА В. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *формула* $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$ *удовлетворяет условию* P *относительно* K;

2) *формула* $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$ *приводима к виду* S *относительно* K, *т. е. существует формула* $\mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n) \in S$ *такая, что формула*

$$\forall y_1, \ldots, y_n (\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n) \sim \mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n))$$

выводима из K.

Доказательство. Докажем сначала, что из условия 1) следует условие 2). Пусть для модели $\mathfrak{M}$ из $M(K)$ и постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}$, не встречающихся в $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$, высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию P. Тогда, по теореме А, существует высказывание $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ вида S такое, что

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \sim \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$$

выводимо из K. Вообще говоря. не обязательно, чтобы $\mathfrak{B}$ содержало все константы $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Но если некоторых из них в $\mathfrak{B}$ нет, то их можно ввести, рассматривая вместо $\mathfrak{B}$ конъюнкцию $\mathfrak{B}$ и какого-нибудь доказуемого предложения, содержащего нужные констаны, и полученную формулу снова обозначить через $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$. Заменяя в $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ константы $a_1, \ldots, a_n$ свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$, мы получим формулу $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$. Константы $a_1, \ldots, a_n$ не встречаются ни в $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$, ни в $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$. Из правил исчисления предикатов следует, что тогда из K выводимо высказывание

$$\forall y_1, \ldots, y_n (\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n) \sim \mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n))$$

и $\mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n) \in S$.

Докажем теперь, что из условия 2) следует условие 1). Пусть формула $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$ приводима к виду S, т. е. существует формула $\mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n) \in S$ такая, что формула

$$\forall y_1, \ldots, y_n [\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n) \sim \mathfrak{B}(y_1, \ldots, y_n)]$$

выводима из K. Тогда для любой модели $\mathfrak{M}$ из $M(K)$ и любого набора элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{M}$ имеем:

$$\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \sim \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n).$$

Это означает, что формула $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \sim \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ выводима из K. По теореме А, высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию P, а высказывание $\mathfrak{A}(y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет условию P относительно K. Теперь мы можем из теорем типа А, доказанных в работах ([1]), ([7]), ([2]), ([3]), получить теоремы типа В.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть S обозначает класс $\exists$ экзистенциальных формул. В этом случае условие P относительно K состоит в следующем: высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию P относительно K, если для любой модели $\mathfrak{M} \in M(K)$ из истинности $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{M}$ следует истинность $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ во всех расширениях модели $\mathfrak{M}$, принадлежащих $M(K)$.

ТЕОРЕМА ТИПА А [Лось ([6])]. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *высказывание* $\mathfrak{A}$ *приводимо к виду* $S = \exists$;

2) *высказывание* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию* P.

Формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ называется устойчивой относительно K, если для любой модели $\mathfrak{M}$ из $M(K)$ и любого набора элементов $a_1,\ldots,a_n$ в $\mathfrak{M}$ из истинности $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ в $\mathfrak{M}$ следует истинность $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ во всех расширениях модели $\mathfrak{M}$, принадлежащих $M(K)$.

В качестве теоремы типа В мы получаем

Следствие 1 [Робинсон ([7])]. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *формула* $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ *устойчива относительно системы аксиом* K;

2) *существует формула* $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n) \in \exists$ *такая, что из* K *выводима формула* $\forall x_1, \ldots, x_n\ (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n))$.

Пример 2. Пусть $S = U$ обозначает класс всех универсальных формул. В этом случае условие P означает следующее: аксиома $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию P, если из истинности $\mathfrak{A}$ в модели $\mathfrak{M}$ следует ее истинность во всех подмоделях $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \in S(\mathfrak{M}) \cap M(K)$.

Используя в качестве теоремы типа А следствие 3 теоремы 2, мы получаем в качестве теоремы типа В

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует формула* $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n) \in U$ *такая, что формула* $\forall x_1, \ldots, x_n\ (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n))$ *выводима из* K;

2) *формула* $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ *удовлетворяет условию* P *относительно* K, *т. е. для любой модели* $\mathfrak{M} \in M(K)$ *и любых элементов* $a_1, \ldots, a_n$ *из* $\mathfrak{M}$ *из истинности высказывания* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *следует истинность высказывания* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *во всех подмоделях модели* $\mathfrak{M}$, *принадлежащих* $M(K)$.

Пример 3. Из следствия 4 теоремы 2 получаем

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует формула* $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n) \in \underbrace{UE\ldots}_{l}$, *эквивалентная данной формуле* $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ *относительно* K, *т. е. формула*

$$\forall x_1, \ldots, x_n\ (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n))$$

выводима из K;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M}$ *из* $M(K)$ *и любого набора элементов* $a_1, a_2,\ldots,a_n$ *из* $\mathfrak{M}$ *высказывание* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *таково, что если* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *ис-*

тинно в $\mathfrak{M}$, *то всякая* l-*подмодель* $\mathfrak{N}$ *модели* $\mathfrak{M}$, *содержащая элементы* $a_1, \ldots, a_n$ *и принадлежащая классу* $M(K)$, *принадлежит классу* $M(\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n))$.

Пример 4. Из теоремы Робинсона получаем

Следствие 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует формула* $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n) \in UE$, *эквивалентная* $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$ *относительно* K, *т. е. формула* $\forall x_1, \ldots, x_n (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1,\ldots,x_n))$ *выводима из* K;

2) *для любой модели* $\mathfrak{M}$ *из* $M(K)$ *и любого набора элементов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *высказывание* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *таково, что для любой возрастающей последовательности моделей* $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *содержащих элементы* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *и принадлежащих* $M(K, \mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n))$, *из* $\bigcup \mathfrak{M}_i \in M(K)$ *следует, что* $\bigcup \mathfrak{M}_i \in M(\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n))$.

Формулы хорновского вида. Формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$, содержащая свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, называется хорновской, если она имеет вид

$$Q_1 x_1, \ldots, Q_m x_m \mathop{\&}_{i=1}^{k} \left[\mathop{\&}_{j=1}^{k_j} \alpha_{ij} \supset \beta_i \right],$$

где α_{ij}, β_i — основные предикаты без знака отрицания.

В работе (8) было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *аксиома* $\mathfrak{A}$ *эквивалентна аксиоме* $\mathfrak{B}$ *хорновского вида;*

2) *для любых двух моделей* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *из* $M(\mathfrak{A})$ *существуют* S-*предикаты* S_1, S_2 *такие, что* $S_i \subset A$ *в* $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2$, *и* $S_1 \times S_2 \subset A$ *в* $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$.

Используя эту теорему в качестве теоремы типа А, мы можем получить в качестве теоремы типа В условие эквивалентности формулы $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$, содержащей свободные переменные $x_1, \ldots, x_n$, формуле $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ хорновского вида.

Мы скажем, что формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ qs-замкнута, если для любых моделей $\mathfrak{M}_i = \langle M, \ldots \rangle$, содержащих элементы $a_1, \ldots, a_n$, в которых $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ истинно, существуют s-предикаты S_i в $\mathfrak{M}_i$, состоящие из точек вида $(a_1, \ldots, a_n, Q_1 x_1, \ldots, Q_m x_m, \ldots)$,

$$S_i = \{(a_1, \ldots, a_n, Q_1 x_1^i, \ldots, Q_2 x_2^i, \ldots, Q_m x_m^i, \ldots)\}, \qquad i = 1, 2,$$

такие, что $S_i \subset A$, $i = 1, 2$, в $\mathfrak{M}_i$ и $S_1 \times S_2 \subset A$ в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$, где

$$S_1 \times S_2 = \{(\langle a_1, a_1 \rangle, \ldots, \langle a_n, a_n \rangle, \langle Q_1 x_1^1, Q_1^1 \; x_1^2 \rangle, \ldots)\}.$$

Пусть формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна формуле хорновского вида $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. выводима формула

$$\forall x_1, \ldots, x_n (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Для произвольной модели $\mathfrak{M}$ и любого набора элементов $a_1, \ldots, a_n$ из M высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \sim \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ истинно. Если в двух моделях $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, содержащих элементы $a_1, \ldots, a_n$, истинно высказывание $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$, то в этих же моделях истинно

высказывание $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$. Высказывание $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$, по предположению, хорновского вида и, следовательно, qs-замкнуто. Это означает, что формула $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ qs-замкнута. Отсюда и из эквивалентности $\forall x_1, \ldots, x_n (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n))$ следует, что формула $\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тоже qs-замкнута.

Мы показали, что если формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна хорновской формуле $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$, то формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ qs-замкнута. Докажем обратное утверждение. Пусть формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ qs-замкнута. Возьмем элементы $a_1, \ldots, a_n$, не входящие в $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$. Для них формула $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ qs-замкнута и, следовательно, приводима к хорновскому виду, т. е. существует формула $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ хорновского вида такая, что формула $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n) \sim \mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n)$ выводима в У. И. П. Но тогда, по правилам исчисления предикатов, выводима формула

$$\forall x_1, \ldots, x_n (\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Мы получили

Следствие 5. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует формула* $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n)$ *хорновского вида такая, что формула* $\forall x_1, \ldots, x_n (\forall (x_1, \ldots, x_n) \sim \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n))$ *выводима;*

2) *для любого набора элементов* $a_1, \ldots, a_n$ *в* $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ *высказывание* $\mathfrak{A}(a_1, \ldots, a_n)$ *qs-замкнуто.*

Автор выражает искреннюю благодарность А. И. Мальцеву за постановку проблемы, а также А. В. Гладкому за ряд ценных замечаний советов при редактировании работы.

Поступило
6.VI.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Robinson A., Obstruction to arithmetical extension and the theorem of Łoś and Suzko, Indag. Math., XXI, fasc. 5, 489—95.

[2] Тайманов А. Д., Характеристика аксиоматизируемых классов моделей. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 25 (1961), 601—620.

[3] Chang C., On the unions of models, Proc. Am. Math. Soc., 10, № 1 (1959), 120—127.

[4] Tarski A., Contributions to the theory of models. I, II, III, Indag. Math., 16 (1954), 572, 582; 17 (1955), 55.

[5] Łoś I., On the extending of models (I), Fund. Math., 42 (1955), 38—54.

[6] Новиков П. С., Элементы математической логики, Москва, 1959.

[7] Robinson A., Completeness and persistence in theory of Models, Zeitschr. f. Math. Logik and Grund. d. Math., 2 (1956), 15—26.

[8] Тайманов А., О классе моделей, замкнутых относительно прямого произведения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 24 (1960), 493—510.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 765—788

А. Б. ЖИЖЧЕНКО

О ГРУППАХ ГОМОЛОГИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе вычисляются ранги групп Бетти проективных и аффинных алгебраических многообразий и указывается геометрический смысл образующих этих групп. Передоказываются теоремы Лефшетца, Фари и Уоллеса о гомологическом строении алгебраических многообразий.

Введение

В работе изучается гомологическое строение алгебраического многообразия в классическом случае (основное поле — поле комплексных чисел).

В § 1 вводятся основные обозначения и приводятся результаты (без доказательств), на которые, в основном, опирается дальнейшее изложение.

В § 2 рассматривается геометрическая картина гомологического строения аффинного алгебраического многообразия; в частности, приводится более простое доказательство некоторых теорем Лефшетца, Фари и Уоллеса [см. (1), (2), (3), (6)].

В § 3 приводится доказательство основной теоремы о прямом разложении группы гомологий гиперплоского сечения проективного алгебраического многообразия и естественный аналог этой теоремы для аффинного случая.

В § 4 вычисляются ранги групп гомологий аффинного и проективного алгебраических многообразий и указывается геометрический смысл соответствующих групп.

Все рассматриваемые в работе группы являются конечномерными векторными пространствами над полем комплексных чисел. Если H — некоторая группа, то через ΔH обозначаем ее ранг; если ранг равен единице, то пишем $H \approx A$.

Гомологии рассматриваются с произвольными носителями.

Всегда, когда встречается утверждение, что некоторые циклы α, β, $\gamma, \ldots$ порождают группу гомологий, под этим, естественно, понимается, что соответствующие классы гомологий порождают эту группу. Цикл и соответствующий ему класс гомологий обозначаются (как правило) одной и той же буквой.

В работе широко используется метод коммутативных диаграмм; доказательство коммутативности проводится во всех подробностях лишь в двух—трех случаях. В остальных случаях доказательство коммутативности либо тривиально следует из аксиом, либо содержится в цитированной литературе, либо может быть проведено аналогично разобранным случаям.

Приношу глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, под руководством которого была написана эта работа.

Благодарю также А. С. Шварца за ценные советы и указания.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Пусть P^N — N-мерное комплексное проективное пространство, W^n — неособое проективное алгебраическое многообразие размерности n, расположенное в P^N, а P^{N-2} — $(N-2)$-мерное линейное подпространство P^N. Рассмотрим линейное семейство Ξ гиперплоскостей, проходящих через P^{N-2}. Эти гиперплоскости будут высекать на многообразии W^n линейное семейство гиперплоских сечений (подмногообразий размерности $n-1$), которое мы также будем обозначать через Ξ. Очевидно, что если P^1 — прямая в P^N, не пересекающаяся с P^{N-2}, то семейство Ξ параметризуется точками P^1. Ясно, что любые два гиперплоских сечения семейства Ξ будут в своем пересечении содержать подмногообразие

$$P^{n-2} = P^{N-2} \cap W^n$$

и только его, но, возможно, с некоторой кратностью. Подмногообразие $P^{n-2} \subset W^n$ назовем базисным многообразием семейства Ξ. О семействе Ξ будем говорить, что оно соответствует линейному подпространству P^{N-2} (поскольку полностью им определяется).

Любое неособое алгебраическое многообразие W'^n в $P'^{N'}$ можно так бирегулярно отобразить на многообразие $W^n \subset P^N$, $N \geqslant N'$, что в пространстве P^N найдется подпространство P^{N-2} такое, что семейство Ξ, соответствующее этому подпространству, будет удовлетворять следующим условиям (условия А):

А1. Все гиперплоские сечения семейства Ξ являются неприводимыми алгебраическими подмногообразиями.

А2. Лишь для конечного числа точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu \in P^1$ (где P^1 — некоторая раз навсегда выбранная прямая в P^N, $P^1 \cap P^{N-2} = 0$, параметризующая семейство Ξ) соответствующие гиперплоские сечения семейства Ξ являются особыми алгебраическими подмногообразиями; подмногообразие, соответствующее точке γ_i, будем обозначать через W_{γ_i}, $i = 1, \ldots, \mu$ (вообще, если $K \subset P^1$, то через $W(K)$ будем обозначать множество гиперплоских сечений, соответствующих точкам $\eta \in K$).

А3. Каждое из подмногообразий $W_\gamma, \ldots, W_{\gamma_\mu}$ имеет в точности одну особую точку, которая является обыкновенной квадратической особенностью на соответствующем подмногообразии. Через c_i обозначаем особую точку гиперплоского сечения W_{γ_i}, $i = 1, \ldots, \mu$.

А4. Ни одна из точек c_i, $i = 1, \ldots, \mu$, не лежит на базисном подмногообразии $P^{n-2} = W^n \cap P^{N-2}$, которое предполагается неприводимым.

А5. Если W_α и W_β — гиперплоские сечения семейства Ξ, то $W_\alpha \cap W_\beta = P^{n-2}$, т. е. в пересечение любых двух гиперплоских сечений базисное многообразие входит с кратностью 1.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать бирегулярную модель многообразия, удовлетворяющую условиям А. Подобное расслоение назовем *нормальным проективным расслоением*.

Выберем систему координат в P^N следующим образом:

1. Бесконечно удаленная гиперплоскость P_∞, задаваемая уравнением $z_0 = 0$, содержит P^{N-2}: $P^{N-2} \subset P_\infty$.

2. Точки $c_1, \ldots, c_\mu$ не лежат на P_∞.

3. Точки $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ не лежат на P_∞.

Рассмотрим N-мерное аффинное комплексное пространство

$$C^N = P^N - P_\infty$$

и n-мерное аффинное алгебраическое многообразие

$$V^n = W^n - W^n \cap P_\infty.$$

Заданное нормальное проективное расслоение W^n индуцирует расслоение аффинного многообразия V^n; гиперплоские сечения этого расслоения будут параметризованы точками $P^1 - P_\infty = C^1$ — плоскостью Коши и не будут пересекаться в силу условия 1 выбора системы координат в P^N. Это расслоение аффинного многообразия V^n будет также удовлетворять условиям A1, A2, A3; такое расслоение мы назовем *нормальным аффинным расслоением.*

Нормальное аффинное расслоение можно определить также заданием на многообразии V^n аналитической функции f, удовлетворяющей следующим условиям (условия B):

B1. f осуществляет отображение V^n на плоскость Коши C^1 ($f: V^n \to C^1$).

B2. Точки $c_1, \ldots, c_\mu$, и только они, являются критическими точками функции f (т. е. в них все частные производные первого порядка функции f обращаются в 0).

B3. В некоторой достаточно малой окрестности каждой критической точки c_i ($i = 1, \ldots, \mu$) можно выбрать такую аналитическую систему координат $(z_1^i, \ldots, z_n^i)$, что функция f в этой системе будет иметь вид:

$$f(z_1^i, \ldots, z_n^i) = \gamma_i + (z_1^i)^2 + \ldots + (z_n^i)^2, \quad \gamma_i = f(c_i).$$

B4. $f_\zeta^{-1} = V_\zeta$, где $\zeta \in C^1$, есть аффинное гиперплоское сечение многообразия V^n; очевидно, что критические точки функции f являются особыми точками соответствующих плоских сечений (c_i — особая точка V_{γ_i}).

B5. f не имеет критических точек на бесконечности. Точный смысл этого условия мы разъяснять не будем [см., например, ([1])], заметим только, что оно эквивалентно условию A3 (ведь по самому своему определению нормальный аффинный пучок индуцируется некоторым нормальным проективным пучком).

Доказательство эквивалентности первого и второго определения нормального аффинного пучка содержится, например, в работе ([1]).

Пусть условие B3 выполняется в шаре $B_{\alpha_i}^i$: $|z_1^i|^2 + \ldots + |z_n^i|^2 \leqslant \alpha_i$ с центром в точке $c_i = f(\gamma_i)$.

Рассмотрим шар в два раза меньшего радиуса $B_{\frac{\alpha_i}{2}}^i$ и «проекцию» этого шара на плоскость Коши $C^1: f(B_{\frac{\alpha_i}{2}}^i)$. Это будет круг K^i с центром в

точке $\gamma_i = f(c_i)$; мы назовем его регулярной окрестностью точки γ_i. Если $\zeta_i \in K_i$, $\zeta_i \neq \gamma_i$, то $V_{\zeta_i} = f^{-1}(\zeta_i)$ — слой под точкой ζ_i. По условию В3 и в силу определения шара B^i, пересечение $V_{\zeta_i} \cap B^i_{\alpha_i}$ задается уравнениями:

$$Q_i: \quad (z^i_1)^2 + \ldots + (z^i_n)^2 = \zeta_i - \gamma_i,$$

$$B_{\alpha_i}: \quad |z^i_1|^2 + \ldots + |z^i_n|^2 \leqslant \rho,$$

т. е. слой V_{ζ_i} внутри шара $B^i_{\alpha_i}$ устроен как квадрика:

$$R_i = V_{\zeta_i} \cap B^i_{\alpha_i} = Q_i \cap B^i_{\alpha_i}.$$

Особый же слой V_{γ_i} внутри шара $B^i_{\alpha_i}$ устроен как конус

$$(Q): \quad C Q_i: \quad (z^i_1)^2 + \ldots + (z^i_n)^2 = 0.$$

Рассмотрим вещественную часть квадрики Q_i, задаваемую уравнением

$$(\tilde{z}^i_1)^2 + \ldots + (\tilde{z}^i_n)^2 = 1,$$

где

$$\tilde{z}^i_k = \frac{z^i_k}{(\xi_i - \gamma_i)^{\frac{1}{2}}}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

— действительные числа. Это будет сфера S^{n-1}_i, $S^{n-1}_i \subset R_i$, — цикл в R_i. Имеют место следующие леммы [см. (1)].

ЛЕММА 1.

$$H_r(R_i) = 0, \quad r \neq 0, n-1, 2n-2,$$

$$H_0(R_i) = A, \quad H_{n-1}(R_i) \approx A, \quad H_{2n-2}(R_i) \approx A,$$

причем циклом, класс гомологий которого порождает группу $H_{n-1}(R_i)$ будет сфера S^{n-1}_i.

В то же время сфера S^{n-1}_i будет (компактным) циклом на V_{ξ_i}; ее класс гомологий мы обозначим через δ_i, $\delta_i \in H_{n-1}(V_{\xi_i})$.

Цикл S^{n-1}_i называется циклом Лефшетца или исчезающим циклом, соответствующим критической точке γ_i.

Пусть $U_i = f^{-1}(K_i)$; тогда имеет место

ЛЕММА 2. *$U_i - B^i_{\alpha_i}$ изоморфно прямому произведению $K_i \times (V_{\xi_i} - B^i_{\alpha_i})$, V_{γ_i} является деформационным ретрактом U_i.*

Эту ретракцию мы будем обозначать через

$$r_i: \quad U_i \to V_{\gamma_i}.$$

Важную роль играет изучение отображения $V_{\xi_1} \to V_{\gamma_i}$ при ретракции r_i (проекция неособого гиперплоского сечения неособая), в частности изучение отображения

$$r_i: H_*(V_{\xi_i}) \to H_*(V_{\gamma_i}).$$

При этом отображении сфера S^{n-1}_i, как легко видеть, «стягивается» в точку c_i — особую точку слоя V_{γ_i}. Таким образом, если $\delta_i \neq 0$ на V_{ξ_i}, то δ_i принадлежит ядру отображения r_i.

С другой стороны, если $\delta_i = 0$ на V_{ξ_i}, то на V_{ξ_i} существует цепь $\overline{S}_i$ такая, что $\partial \overline{S}_i = S_i^{n-1}$. При отображении r_i эта цепь перейдет в цикл S_i, ибо граница ее «стянется» в точку c_i. Класс гомологий, порожденный циклом S_i, определяет, таким образом, ненулевой элемент коядра гомоморфизма r_i. Цикл S_i мы назовем «мешком», соответствующим критической точке γ_i. Оказывается, эта картина исчерпывает собою все, что можно сказать об отображении r_i, а именно, имеет место лемма Фари:

ЛЕММА 3 (лемма Фари). *Отображение $r_i^p : H_p(V_{\xi_i}) \to H_p(V_{\gamma_i})$ является изоморфизмом для $p \neq n,\ n-1$, причем если $\delta_i \neq 0$, то $r_i^{n-1} : H_{n-1}(V_{\xi_i}) \to H_{n-1}(V_{\gamma_i})$ является эпиморфизмом, ядро которого порождается классом δ_i, а $r_i^n : H_n(V_{\xi_i}) \to H_n(V_{\gamma_i})$ является изоморфизмом; если же $\delta_i = 0$, то r_i^{n-1} является изоморфизмом, а r_i^n — мономорфизмом; при этом цикл S_i определяет ненулевой элемент, порождающий коядро отображения r_i^n.*

Доказательство леммы Фари проводится на основании изучения точной последовательности

$$\ldots \to H_p(V_{\xi_i}) \xrightarrow{\tau_p} H_p(V_{\xi_i} - R_i) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(R_i) \to \ldots .$$

Группа $H_p(V_{\xi_i} - R_i)$, как легко устанавливается, изоморфна группе $H_p(V_{\gamma_i})$:

$$\ker r_i^p \approx \ker \tau_p,$$
$$\operatorname{coker} r_i^p \approx \operatorname{coker} \tau_p \approx \operatorname{Im} \partial_p.$$

В дальнейшем мы будем считать, что критические точки перенумерованы таким образом, что

$$\delta_1 \neq 0, \ldots, \delta_\nu \neq 0, \quad \delta_{\nu+1} = \ldots = \delta_\mu = 0.$$

Выберем на плоскости C некоторую некритическую точку ξ_0 и будем всюду в дальнейшем считать ее фиксированной. Соответствующий ей слой $V_{\xi_0} = f^{-1}\xi_0$ обозначим через V_0 и будем его считать «стандартным».

Пусть

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\mu} \gamma_i, \quad V_\Gamma = \sum_{i=1}^{\mu} V_{\gamma_i}.$$

Тогда

$$f^{-1}(C - \Gamma) = V - V_\Gamma$$

будет расслоенным пространством с базой $C - \Gamma$, слоем V_0 и с проекцией $f: V - V_\Gamma \to C - \Gamma$. Это расслоенное пространство обозначим через $\widetilde{V}$. Проведем на плоскости C непересекающиеся (параллельные) лучи, выходящие из точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$. Луч без начала, выходящий из точки γ_i, обозначим через D_i,

$$\overline{D}_i = D_i + \gamma_i, \quad \overline{D} = \sum \overline{D}_i, \quad D = \sum D_i.$$

Эти лучи выберем так, чтобы точка ξ_0 не лежала ни на одном из них. Проведем из точки ξ_0 гомеоморфные окружности пути σ_i, ведущие вокруг

точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$, такие, что

$$\sigma_i \cap \overline{D}_j = 0, \quad i \neq j.$$

Эти пути («обходы») являются образующими фундаментальной группы базы расслоенного пространства $\widetilde{V}$; они порождают автоморфизмы группы гомологий слоя V_0. Автоморфизм, порожденный обходом вокруг точки γ_i, обозначим через θ_i. Элементы $h \in H_p(V_0)$, инвариантные относительно всех автоморфизмов θ_i, образуют подгруппу

$$\operatorname{Inv} H_p(V_0) \subset H_p(V_0).$$

Соединяя любую точку $\xi \in C - \Gamma$ с точкой ξ_0 путем $\sigma_{\xi\xi_0}$, $\sigma_{\xi\xi_0} \cap \overline{D}_\Gamma = 0$, и перемещая ξ по $\sigma_{\xi\xi_0}$, мы получаем гомеоморфизм $V_\xi \to V_0$, который индуцирует соответствующий изоморфизм групп гомологий

$$\varphi_\sigma: \quad H_*(V_\xi) \to H_*(V_0).$$

Если $\sigma_{\xi\xi_0}$ и $\sigma'_{\xi\xi_0}$ — два пути, причем

$$\sigma_{\xi\xi_0} \cap \overline{D} = 0, \quad \sigma'_{\xi\xi_0} \cap \overline{D} = 0,$$

то $\varphi_\sigma = \varphi_{\sigma'}$. Если же точка ξ лежит на луче («купюре») D_i, то для нее необходимо выбрать раз навсегда один из двух возможных классов путей, ведущих в точку ξ_0 и не пересекающихся с остальными купюрами, причем для точек одной и той же купюры эти классы необходимо выбирать согласованно (т. е. так, чтобы пути, ведущие в разные точки купюры, лежали по одну сторону купюры). Если $h_\xi \in H_p(V_\xi)$, то, говоря об h_ξ как об элементе группы $H_p(V_0)$, мы всегда будем иметь в виду элемент $\varphi_\sigma h_\xi$, где $\sigma_{\xi\xi_0}$ — любой путь, соединяющий точки ξ и ξ_0 и удовлетворяющий условию

$$\sigma_{\xi\xi_0} \cap \overline{D} = 0,$$

если $\xi \in C - \overline{D}$, и путь раз навсегда выбранного класса, если $\xi \in \overline{D}$. Все вышесказанное позволяет говорить о классе Лефшетца δ_i как об элементе группы $H_{n-1}(V_0)$ и определить «модуль Лефшетца» — подгруппу $L \subset H_{n-1}(V_0)$, порожденную $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$. Имеет место

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ.

$$\theta_i h = h,$$

если $h \in H_r(V_0)$, $r \neq n-1$,

$$h - \theta_i h = (h, \delta_i)\, \delta_i,$$

если $h \in H_{n-1}(V_0)$.

Для того чтобы перенести вышеизложенные рассуждения на случай проективного многообразия, поступим следующим образом. Пусть K — открытое множество на P^1, не содержащее критических точек. Пусть $\eta \in K$; тогда можно построить «нормальный пучок» $B(\eta, \varepsilon)$, базой которого будет гиперплоское сечение $W(\eta)$, а слоем — 2-мерная ячейка. Этот пучок строится путем проведения геодезических нормалей к $W(\eta)$ в некоторой

малой окрестности B слоя $W(\eta)$. Если точка η' лежит достаточно близко к η, то $W(\eta')$ будет аналитической секущей пучка $B(\eta, \varepsilon)$.

Мы можем устроить под множеством K косое произведение $X(K)$ с базой K и слоем $W(\eta)$; основным свойством этого косого произведения будет наличие непрерывного отображения $\psi: X(K) \to W(K)$ такого, что оно является гомеоморфизмом, если удалить подмногообразие P из $W(K)$ и из каждого слоя $X(K)$. Точнее: в $X(K)$ существует подпроизведение

$$K \times P = X'(K)$$

такое, что отображение

$$\psi: X(K) - X'(K) \to W(K) - P$$

есть гомеоморфизм. Подробное описание конструкции содержится в работах [2], [3].

Теперь можно легко определить гомеоморфизм двух проективных плоских сечений $W(\eta_0)$ и $W(\eta_1)$, индуцированный путем $\sigma_{\eta_0\eta_1}$, соединяющим точки η_0 и η_1 и не проходящим через критические точки прямой $\overline{P}_1^1$, рассматривая $W(\eta_0)$ и $W(\eta_1)$ как слои расслоенного пространства $X(\sigma_{\eta_0\eta_1})$.

Можно также доказать и «проективную» теорему Пуанкаре, являющуюся повторением, с соответствующими изменениями, «аффинной» теоремы Пуанкаре, и определить проективные инвариантные подгруппы $\mathrm{Inv}\, H_p(W_0)$ и «проективный модуль Лефшетца», порождаемый теми же циклами $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$, рассмотренными на W_0; этот модуль мы также обозначим через L, $L \subset H_{n-1}(W_0)$.

§ 2. Группы гомологий аффинного алгебраического многообразия

Докажем предварительно три вспомогательные «локальные» леммы, которые потребуются нам при доказательстве леммы 6. Пусть γ — некоторая фиксированная критическая точка плоскости C, $V_\gamma = f^{-1}\gamma$, K — регулярная окрестность точки γ: круг радиуса α, O — окружность, граница круга K. Обозначим

$$\tilde{V} = f^{-1}K, \quad \Phi_0 = f^{-1}O, \quad G_0 = \Phi_0 \cap B,$$

где B — шар малого радиуса $\frac{\alpha}{2}$ с центром в точке C — особой точке слоя V_γ (см. § 1). Пусть, далее,

$$\tilde{V}_\gamma = f^{-1}(K - O - \gamma),$$

где O и G_0 — расслоенное пространство с базой O и слоем $R_\eta = V_\eta \cap B$.

Рассмотрим точную последовательность

$$\ldots \to H_r(R_\eta) \to H_r(G_0) \to H_r(G_0 - R_\eta) \to H_{r-1}(R_\eta) \to \ldots. \quad (1)$$

Интерес представляет лишь «средняя» ее часть:

$$H_n(R_\eta) \to H_n(G_0) \to H_n(G_0 - R_\eta) \to H_{n-1}(R_\eta) \to$$
$$\to H_{n-1}(G_0) \to H_{n-1}(G_0 - R_\eta) \to H_{n-2}(R_\eta), \quad (2)$$

так как вне этого отрезка, как нетрудно установить, все группы равны нулю (кроме тривиальных крайних).

В последовательности (2) крайние левый и правый члены равны 0 (лемма 1 § 1), $G_0 - R_\eta$ есть прямое произведение (лемма 2 § 1)

$$(O - \eta') \times R_\eta, \quad \eta' \in O, \quad \eta \neq \eta',$$

а

$$H_{n-1}(G_0 - R_\eta) = 0$$

по лемме 1 § 1 и в силу того факта, что $H_0(O - \eta') = 0$, так как $\sigma - \eta'$ некомпактно. Таким образом, получается точная последовательность

$$\begin{gathered} 0 \to H_n(G_0) \xrightarrow{s} H_n(G_0 - R_\eta) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(R_\eta) \xrightarrow{i} H_{n-1}(G_0) \to 0, \\ H_n(G_0 - R_\eta) = H_1(O - \eta') \otimes H_{n-1}(R_\eta). \end{gathered} \tag{3}$$

Так как образующим элементом группы $H_{n-1}(R_\eta)$ является класс гомологий δ сферы S^{n-1} (см. § 1), то, очевидно, образ гомоморфизма ∂ есть $\delta - \theta\delta$. Отсюда [см. ([1])] следует, что в случае четного n отображение ∂ будет нулевым гомоморфизмом, а в случае нечетного n ∂ будет изоморфизмом. Мы получили следующее утверждение.

ЛЕММА 1.

$$H_n(G_0) = H_{n-1}(G_0) = 0, \textit{ если } n \textit{ нечетно},$$
$$H_n(G_0) \approx A, \quad H_{n-1}(G_0) \approx A, \textit{ если } n \textit{ четно}.$$

Замечание 1. В точной последовательности групп гомологий (3) отображения s и i будут изоморфизмами, а ∂ будет нулевым гомоморфизмом в случае n четного и изоморфизмом — в случае n нечетного.

Лемма 1 совершенно ясна геометрически: если сфера S^{n-1}, лежащая в слое R_η, при обходе θ переходит в себя (случай n четного), то ее «разнос» по окружности, соответствующим образом подправленный, и дает n-мерный цикл $\mathcal{L}^n$ в пространстве G_0; класс гомологий $\mathcal{L}^n$ и будет образующим элементом $H_n(G_0)$. Сама же сфера S^{n-1} в этом случае не будет гомологична 0 в G_0 и ее класс гомологий будет образующим элементом группы $H_{n-1}(G_0)$. В этом случае G_0 устроено (гомологически) как прямое произведение $O \times R_\eta$.

Когда сфера S^{n-1} после обхода θ переходит в сферу противоположной ориентации (случай n нечетного), в результате «разноса» этой сферы никакого n-мерного цикла не получается, а получается n-мерная цепь Z_n, $\partial Z_n = 2S^{n-1}$, т. е. сфера S^{n-1} оказывается гомологичной 0 в G_0 и

$$H_n(G_0) = H_{n-1}(G_0) = 0.$$

Рассмотрим треугольник отображений

$$\begin{array}{ccc} H_q(V_\gamma) & \xleftarrow{\partial_1} & H_{q+1}(\widetilde{V}) \\ {\scriptstyle r}\nwarrow & & \swarrow{\scriptstyle \partial_2} \\ & H_q(\Phi_0) & \end{array} \tag{T$_1$}$$

где r — отображение, порожденное ретракцией.

ЛЕММА 2. *Треугольник* (T_1) *коммутативен.*

Действительно, пусть $h \in H_{q+1}(\widetilde{V})$, и пусть s — цикл, принадлежащий классу h, т. е. некоторая цепь в $\widetilde{V}$, $\partial s = \sigma_1 - \sigma_2$, где σ_1 — цикл на V_γ,

а σ_2 — цикл на Φ_0. Пусть $R\sigma_2$ — $(n+1)$-мерная цепь в $\overline{V}$, получающаяся при ретракции r (§ 1) из цикла σ_2:

$$\partial R\sigma_2 = \sigma_1' - \sigma_2,$$

где σ_1' — цикл на V_γ. Тогда

$$\partial (R\sigma_2 - s) = \sigma_1' - \sigma_1,$$

где $R\sigma_2 - s$ — цикл в $\overline{V} - V_\gamma$. Так как

$$H_r(\overline{V} - V_\gamma) = 0, \quad r = 0, \ldots, 2n-2$$

(лемма 1 § 1), то $\sigma_1' \sim \sigma_1$, откуда и следует утверждение леммы 2.

Предположим теперь, что $\delta = 0$ для нашей точки γ, т. е. существует цикл S_γ («мешок»), $S_\gamma \in H_n(V_\gamma)$, не входящий в образ отображения

$$r\colon \quad H_n(V_\xi) \to H_n(V_\gamma), \quad \xi \in K.$$

Рассмотрим гомоморфизм вложения

$$i\colon \quad H_n(V_\gamma) \to H_n(f^{-1}(K-O)).$$

ЛЕММА 3. *$iS_\gamma \neq 0$, т. е. цикл $S_\gamma \not\sim 0$ в (открытой) окрестности $f^{-1}(K-O)$ слоя V_γ.*

Рассмотрим точную последовательность

$$\ldots \to H_{n+1}(\overline{V}_\gamma) \xrightarrow{\partial} H_n(V_\gamma) \to H_n(f^{-1}(K-O)) \to \ldots . \tag{4}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что S_γ не принадлежит образу гомоморфизма ∂ в (4). Так как гомоморфизм ∂_2 в коммутативном треугольнике (T_1) является изоморфизмом (что сразу усматривается из точной последовательности)

$$\ldots \to H_{q+1}(\overline{V} - V_\gamma) \to H_{q+1}(\overline{V}_\gamma) \to H_q(\Phi_0) \to H_q(\overline{V} - V_\gamma)),$$

то для доказательства леммы достаточно установить, что S_γ не принадлежит образу гомоморфизма r (T_1).

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\Phi_0) & \xrightarrow{p} & H_n(\Phi_0 - G_0) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(G_0) \\ \downarrow r & \text{I} & \downarrow i & \text{II} & \downarrow j \\ H_n(V_\gamma) & \xrightarrow{p'} & H_n(V_\xi - R_\xi) & \xrightarrow{\partial'} & H_{n-1}(R_\xi). \end{array} \tag{D}$$

Гомоморфизм p' есть изоморфизм, задаваемый следующей цепочкой изоморфизмов:

$$H_n(V_\gamma) \approx H_n(\overline{V}) \approx H_n(\overline{V} - B) \approx H_n(V_\xi - R_\xi).$$

Нам достаточно рассмотреть лишь случай n четного, ибо при n нечетном $S_\gamma = 0$ [см. (1)].

В случае n четного $H_{n-1}(G_0) \approx A$, и эта группа порождается сферой S^{n-1}, лежащей в слое R_ξ расслоенного пространства G_0, а j есть изоморфизм (см. доказательство леммы 1). Имеем:

$$H_n(\Phi_0 - G_0) \approx H_0(O) \otimes H_n(V_\xi - R_\xi) + H_1(O) \otimes H_{n-1}(V_\xi - R_\xi).$$

и гомоморфизм i, как легко проверить, является мономорфизмом. Докажем теперь, что $S_\gamma \overline{\in} \operatorname{Im} \partial$ [см. (4)]. Предположим противное: пусть существует элемент $\alpha \in H_n(\Phi_0)$, $r\alpha = S_\gamma$. Обозначим $p'S_\gamma = S'$; из коммутативности квадрата I диаграммы (D) и свойств гомоморфизма i имеем:

$$p\alpha = iS' \neq 0.$$

С другой стороны,

$$\partial' S' = S^{n-1} \neq 0$$

(см. § 1). Следовательно, используя коммутативность квадрата II и тот факт, что j — изоморфизм, получаем:

$$j\partial' S' = \partial i S' = \partial p\alpha \neq 0,$$

что невозможно, ибо верхняя строка диаграммы (D) точна.

Рассмотрим теперь геометрическую картину гомологического строения аффинного алгебраического многообразия.

Изучим прежде всего группы гомологий прообразов купюр, т. е. найдем

$$H_p(f^{-1}\overline{D}_i), \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Рассмотрим точную последовательность

$$\ldots \to H_p(V_{\gamma_i}) \to H_p(f^{-1}\overline{D}_i) \to H_p(f^{-1}D_i) \xrightarrow{\partial_{p-1}} H_{p-1}(V_{\gamma_i}) \to \ldots \quad (5)$$

$f^{-1}D_i$ изоморфно прямому произведению $D_i \times V_{\xi_i}$, где $\xi_i \in D_i$, т. е.

$$H_p(f^{-1}D_i) \approx H_{p-1}(V_{\xi_i});$$

p-мерными циклами $f^{-1}D_i$ являются циклы вида $D_i \times \alpha$, где α — $(p-1)$-мерный цикл на V_{ξ_i}. Гомоморфизм ∂_{p-1} сводится очевидным образом к гомоморфизму

$$r_{p-1}: \quad H_{p-1}(V_{\xi_i}) \to H_{p-1}(V_{\gamma_i}).$$

Из леммы Фари § 1 мы сразу выводим:

$$H_p(f^{-1}\overline{D}_i) = 0, \quad p \neq n, 2n-1. \quad (6)$$

Рассмотрим случай $p = n$, т. е. следующий отрезок точной последовательности (5):

$$H_{n+1}(f^{-1}D_i) \xrightarrow{\partial_n} H_n(V_{\gamma_i}) \to H_n(f^{-1}\overline{D}_i) \xrightarrow{p} H_n(f^{-1}D_i) \xrightarrow{\partial_{n-1}} H_{n-1}(V_{\gamma_i}).$$

Возможны два случая:

1) $\delta_i = 0$; тогда отображение ∂_{n-1}, в силу его связи с r_{n-1}, будет изоморфизмом, а отображение ∂_n будет в качестве коядра иметь «мешок» δ_i, не гомологичный 0 на $f^{-1}\overline{D}_i$, класс гомологий которого является образующим элементом группы $H_n(f^{-1}D_i)$.

2) $\delta_i \neq 0$; тогда ∂_n будет изоморфизмом, а отображение ∂_{n-1} будет иметь ядро; циклом, порождающим ядро ∂_{n-1}, будет, очевидно, цикл $D_i \times \delta_i$. Группа $H_n(f^{-1}\overline{D}_i)$ в этом случае будет иметь также одну образующую; цикл, порождающий соответствующий класс гомологий, обозначим

через Δ_i и назовем «сачком». При отображении p сачок, очевидно, отобразится на цикл $D_i \times \delta_i$. Интуитивный геометрический смысл «сачка» Δ_i ясен: это цикл, который получается «разнесением» вдоль купюры $\overline{D}_i$ цикла δ_i, «стягивающегося» в конечной точке γ_i купюры $\overline{D}_i$ в особую точку c_i.

Так как

$$H_p(f^{-1}\overline{D}) = H_p(f^{-1}(\sum \overline{D}_i)) = \sum H_p(f^{-1}\overline{D}_i),$$

то полученный результат можно сформулировать в виде следующей леммы.

ЛЕММА 4.

$$H_p(f^{-1}\overline{D}) = 0, \quad p \neq n, 2n-1,$$
$$\Delta H_n(f^{-1}\overline{D}) = \mu,$$

причем образующими группы $H_n(f^{-1}\overline{D})$ будут классы гомологий, порожденные ν «сачками» $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu$ и $(\mu - \nu)$ «мешками» $S_{\nu+1}, \ldots, S_\mu$.

Рассмотрим точную последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_p(f^{-1}\overline{D}) \to H_p(V) \to H_p(V - f^{-1}\overline{D}) \to \ldots. \tag{7}$$

$V - f^{-1}\overline{D}$ является расслоенным пространством со слоем V_0 (неособое аффинное гиперплоское сечение) и с базой $C - \overline{D}$ — односвязной областью. Поэтому $V - f^{-1}\overline{D}$ эквивалентно прямому произведению $(C - \overline{D}) \times V_0$ и, по формуле Кюннета,

$$H_p(V - f^{-1}\overline{D}) \approx H_{p-2}(V_0).$$

Этот изоморфизм обозначается через loc, т. е. если $\alpha \in H_{p-2}(V_0)$, то $\operatorname{loc}\alpha \in H_p(V - f^{-1}\overline{D})$.

Итак, имеет место

ЛЕММА 5. *Существует изоморфизм*

$$\operatorname{loc}: H_{p-2}(V_0) \to H_p(V - f^{-1}\overline{D}).$$

Исследуем гомоморфизмы

$$\mathcal{D}: H_p(V - f^{-1}\overline{D}) \to H_{p-1}(f^{-1}\overline{D}), \quad p = 1, \ldots, 2n.$$

В силу леммы 4, интерес представляет лишь случай $p = n + 1$.

ЛЕММА 6. *Рассмотрим гомоморфизм*

$$\mathcal{D}: H_{n+1}(V - f^{-1}\overline{D}) \to H_n(f^{-1}\overline{D}).$$

Пусть $\alpha \in H_{n-1}(V_0)$; тогда

$$\mathcal{D}\operatorname{loc}\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha, \delta_i)\,\Delta_i.$$

Заметим, прежде всего, что задача вычисления гомоморфизма $\mathcal{D}$ является локальной задачей. Действительно, для вычисления гомоморфизма $\mathcal{D}$ достаточно знать гомоморфизмы

$$\mathcal{D}_i: \quad H_{n+1}(V - f^{-1}\overline{D}) \to H_n(f^{-1}\overline{D}_i), \quad i = 1, \ldots, \mu,$$

ибо

$$H_n(f^{-1}\overline{D}) = \sum_{i=1}^{\mu} H_n(f^{-1}\overline{D}).$$

Обозначим через U_i открытую регулярную окрестность точки γ_i и положим

$$\overline{D}_i^l = \overline{D}_i \cap U_i, \quad D_i^l = D_i \cap U_i.$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(V - f^{-1}\overline{D}) & \xrightarrow{\mathscr{D}_i} & H_n(f^{-1}\overline{D}_i) \\ j\downarrow & & k\downarrow \\ H_{n+1}(f^{-1}U_i - f^{-1}\overline{D}_i') & \xrightarrow{\partial_i} & H_n(f^{-1}\overline{D}_i'). \end{array}$$

Этот квадрат, как легко проверить, коммутативен; отображение j является изоморфизмом, так как

$$H_{n+1}(f^{-1}U_i - f^{-1}\overline{D}_i') \approx H_{n-1}(V_{\xi_i}),$$

где $\xi_i \in U_i$, $\xi_i \neq \gamma_i$. Этот изоморфизм мы будем обозначать через loc_i. Образующим элементом группы $H_n(f^{-1}\overline{D}_i')$ будет класс гомологий, которому принадлежит цикл

$$\Delta_i^l = \Delta_i \cap f^{-1}U_i$$

в случае, если $\delta_i \neq 0$, и цикл S_i в случае, если $\delta_i = 0$. Очевидно, что

$$k\Delta_i = \Delta_i^l, \quad kS_i = S_i,$$

т. е. отображение k будет изоморфизмом.

Лемма 6 сводится, таким образом, к следующему утверждению: пусть $\alpha \in H_{n-1}(V_{\xi_i})$; тогда

$$\partial_i \,\mathrm{loc}_i\, \alpha = 0$$

в случае, если $\delta_i = 0$, и

$$\partial_i \,\mathrm{loc}_i\, \alpha = (\alpha, \delta_i)\, \Delta_i^l$$

в случае, если $\delta_i \neq 0$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_n(V_{\gamma_i}) & \xrightarrow{e} & H_n(V_{\gamma_i}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \partial_i\tau\downarrow & & \downarrow\tau' & & \downarrow \\ H_{n+1}(V_i - f^{-1}\overline{D}_i^l) & \xrightarrow{\partial_i} & H_n(f^{-1}\overline{D}_i^l) & \xrightarrow{\chi} & H_n(V_i) & \rightarrow & H_n(V_i - f^{-1}\overline{D}_i^l) \\ \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(V_i - f^{-1}\overline{D}_i^l) & \xrightarrow{\partial_i'} & H_n(f^{-1}D_i^l) & \xrightarrow{\chi'} & H_n(\widetilde{V}_i) & \rightarrow & H_n(V_i - f^{-1}\overline{D}_i^l) \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

В этой диаграмме введены обозначения:

$$V_i = f^{-1}U_i, \quad \widetilde{V}_i = f^{-1}U_i - V_{\gamma_i}.$$

Диаграмма коммутативна и точна в каждой строке и каждом столбце.

Гомоморфизм ∂_i' легко определяется: $V_i - f^{-1}\overline{D}_i^l$ есть расслоенное пространство над односвязной областью — открытым кольцом $U_i - \gamma_i$, в котором проведен разрез D_i^l. Легко видеть, что если α — цикл на V_{ξ_i}, то

$$\partial_i' \operatorname{loc}_i \alpha = (\sigma_+\alpha - \sigma_-\alpha) \times \overline{D}_i^l,$$

где σ_+ и σ_- — два гомеоморфизма V_{ξ_i} на V_{η_i}, $\eta_i \in D_i^l$, соответствующие путям σ_+ и σ_- (см. рисунок). Если положить

$$\sigma_+\alpha = \alpha', \quad \alpha' \in H_{n-1}(V_{\eta_i}),$$

то будем иметь:

$$\sigma_+\alpha - \sigma_-\alpha = \alpha' - \theta_i\alpha' = (\alpha', \delta_i)\,\delta_i = (\alpha, \delta_i)\,\delta_i.$$

Через $\theta_i\alpha'$ здесь обозначен цикл, получающийся из α' в результате однократного «обхода» вокруг точки γ_i. Предположим теперь, что $\delta_i \neq 0$, т. е. что образующим элементом группы $H_n(f^{-1}\overline{D}_i^l)$ является класс гомологий, порожденный циклом Δ_i^l, $s(\Delta_i^l) = \delta_i \times D_i^l$. Тогда

$$\partial_i \operatorname{loc}_i \alpha = \varphi(\alpha)\, \Delta_i^l,$$

или

$$s\, \partial_i \operatorname{loc}_i \alpha = \varphi(\alpha)\, s(\Delta_i^l);$$

воспользовавшись коммутативностью диаграммы ($s\,\partial_i = \partial_i'$), мы получаем:

$$\partial_i' \operatorname{loc}_i \alpha = \varphi(\alpha)\, [\delta_i \times D_i^l],$$

откуда находим:

$$\varphi(\alpha) = (\alpha, \delta_i).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_i = 0$. В этом случае группа $H_n(f^{-1}\overline{D}_i^l)$ порождается классом гомологий, которому принадлежит цикл S_i («мешок»). Тогда

$$\partial_i \operatorname{loc}_i \alpha = \varphi(\alpha)\, S_i.$$

Наша цель — доказать, что $\varphi(\alpha) \equiv 0$. Предположим противное: пусть для некоторого $\alpha \in H_{n-1}(V_{\xi_i})$ $\varphi(\alpha) \neq 0$. Тогда $\chi S_i = 0$ в силу точности. Но класс гомологий цикла S_i получается как образ при гомоморфизме τ (см. доказательство леммы 4); мы отождествляем S_i и τS_i. Из коммутативности диаграммы следует теперь, что $\tau' S_i = 0$ (e — тождественный изоморфизм). Иными словами, мы получаем, что «мешок» S_i (цикл, лежащий в особом слое V_γ) гомологичен 0 в V_i, что противоречит лемме 3.

Доказательство леммы 6 завершено.

Вернемся к рассмотрению основной последовательности (7). Из лемм 1, 2 и 3 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 1.

$$H_p(V) = H_{p-2}(V_0), \quad p \neq n,\ n+1.$$

Следствие 1 (теорема Фари).

$$H_p(V) = H_{p-2}(V_0), \quad p > n + 1.$$

Следствие 2 (теорема Лефшетца).

$$H_p(V) = 0, \quad p < n.$$

Доказательство легко проводится по индукции.

Рассмотрим нетривиальную среднюю часть последовательности (7)

$$H_{n+1}(f^{-1}\overline{D}) \to H_{n+1}(V) \xrightarrow{p} H_{n+1}(V - f^{-1}\overline{D}) \xrightarrow{\mathscr{D}} H_n(f^{-1}\overline{D}) \to$$
$$\to H_n(V) \to H_n(V - f^{-1}\overline{D}). \tag{8}$$

Первый член равен 0 по лемме 4; последний равен 0 по лемме 5 и теореме Лефшетца. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2.

$$H_{n+1}(V) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0).$$

Доказательство непосредственно следует из предыдущего замечания и лемм 5 и 6. Действительно,

$$H_{n+1}(V) \approx \operatorname{Inv} p \approx \ker \mathscr{D},$$
$$\ker \mathscr{D} \approx \operatorname{loc} \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0)$$

по лемме 6.

ТЕОРЕМА 3. *Группа $H_n(V)$ порождается ν «сачками» $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu$ и $(\mu - \nu)$ «мешками» $S_{\nu+1}, \ldots, S_\mu$, причем «мешки» являются независимыми циклами на V, а между «сачками» существует J зависимостей, где $J = \operatorname{rang} |(\alpha, \delta_i)|$, $\alpha \in H_{n-1}(V_0)$, $\delta_i \in L \subset H_{n-1}(V_0)$. В частности,*

$$\Delta H_n(V) = \mu - J.$$

Теорема 3 является прямым следствием лемм 4, 5. 6 и теоремы Лефшетца.

Ранг матрицы $|(\alpha, \delta_i)|$ будет вычислен в § 3.

§ 3. Теорема о прямом разложении

В этом параграфе мы от аффинных многообразий перейдем к рассмотрению связи гомологических групп аффинного и соответствующего проективного многообразий.

Важное значение имеют следующие операторы, введенные Лефшетцем и Уоллесом. Пусть W_0 — элемент нормального проективного пучка, а V_0 — соответствующий ему элемент нормального аффинного пучка. Оказывается возможным определить отображения

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{z}: & H_q(W) \to H_{q-2}(W_0), \\ \bar{\mathfrak{z}}: & H_q(V) \to H_{q-2}(V_0) \end{array} \quad (q = 2, \ldots, 2n). \right\} \tag{1}$$

На основе гомоморфизмов $\mathfrak{z}$ и $\bar{\mathfrak{z}}$ определяются гомоморфизмы η и $\bar{\eta}$.

Пусть i и $\bar{i}$ обозначают следующие гомоморфизмы:

$$i: \quad H_*(W_0) \xrightarrow{i} H_*(W),$$
$$\bar{i}: \quad H_*(V_0) \to H_*(V).$$

Тогда $\eta = i\mathfrak{z}$, $\overline{\eta} = \overline{i}\,\overline{\mathfrak{z}}$, т. е.

$$\left.\begin{array}{ll} \eta: & H_q(W) \to H_{q-2}(W), \\ \overline{\eta}: & H_q(V) \to H_{q-2}(V) \end{array} \quad (q = 2, \ldots, 2n).\right\} \qquad (2)$$

Гомоморфизмы η и $\overline{\eta}$ являются обычными гомоморфизмами пересечения с фундаментальным циклом гиперплоского сечения; отображение $\mathfrak{z}$, грубо говоря, заключается в том, что мы берем цикл α размерности q, представителя класса гомологии $h \in H_q(W)$, пересекаем его с фундаментальным циклом гиперплоского сечения W_0, получая в результате некоторый цикл β размерности $q-2$, и сопоставляем классу h класс гомологий цикла β, рассмотренного как цикл на W_0. Аналогично определяется отображение $\overline{\mathfrak{z}}$. Точное определение этих гомоморфизмов содержится, например, в работе ([3]).

Отметим, что все рассуждения остаются в силе, если за исходное многообразие принять W_0; в этом случае общим гиперплоским сечением будет подмногообразие

$$P^{n-2} = W \cap P^{N-2}.$$

Соответствующие гомоморфизмы мы обозначим через $\mathfrak{z}'$ и η'.

Существует тесная связь между оператором η и оператором Ходжа L [см. ([8])], действующим в пространстве гармонических форм на W; ввиду важности этой связи для дальнейшего напомним вкратце основные определения и свойства.

Пусть H^p — пространство гармонических форм размерности p на многообразии W; известно, что существует канонический изоморфизм

$$H^p \approx H^p(W, C) \qquad (3)$$

между пространством H^p и p-мерной группой когомологий $H^p(W, C)$ многообразия W с коэффициентами в поле комплексных чисел. В пространстве H^p действует оператор L, заключающийся в умножении гармонической формы на «фундаментальную» форму ω (ω — форма типа (1,1), основная метрическая форма на многообразии W; метрика на W всегда предполагается заданной по Ходжу ([8])). Таким образом, мы получаем отображение

$$L: \quad H^q(W, C) \to H^{q+2}(W, C), \quad q = 0, \ldots, 2n-2.$$

Пусть φ^r — гармоническая форма размерности r (а также соответствующий ей класс когомологий). Обозначим через $D\varphi^r$ $(2n-r)$-мерный цикл, принадлежащий дуальному к φ^r классу гомологий. Оператор двойственности D задается формулой

$$D\varphi^r = \varphi \frown W,$$

где $\frown$ — «cupprodukt» Чеха — Уитнея. Нетрудно установить, что $D\omega$ есть фундаментальный класс гомологий неособого гиперплоского сечения

многообразия W. За это сечение всегда можно принять W_0 (что достигается за счет выбора метрики на W).

Более того, в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H^{2n-p}(W, C) & \xrightarrow{L} & H^{2n-p+2}(W, C) \\ D\downarrow & & \downarrow D \\ H_p(W) & \xrightarrow{\eta} & H_{p-2}(W) \end{array}$$

отображение DLD^{-1} есть отображение η [см. (9), (2)]. Нам в дальнейшем потребуется следующая лемма из теории гармонических форм [см. (11)].

ЛЕММА 1. *Отображение L является мономорфизмом для размерностей $q \leqslant n-1$.*

Из леммы 1 и из теоремы двойственности Пуанкаре следует

ЛЕММА 2. *Отображение η: $H_{n+1}(W) \to H_{n-1}(W)$ является изоморфизмом.*

Замечание 1. Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(V) & \xrightarrow{i} & H_{n+1}(V - f^{-1}\overline{D}) \\ & \bar{\mathfrak{z}}\searrow \quad \swarrow \mathrm{loc} & \\ & H_{n-1}(V_0) & \end{array}$$

где loc — изоморфизм, определенный в предыдущем параграфе. Эта диаграмма коммутативна [см. (2)]. Отсюда мы получаем следующее уточнение теоремы 2 § 2: *отображение $\bar{\mathfrak{z}}$ осуществляет изоморфизм группы $H_{n+1}(V)$ на группу* $\mathrm{Inv}\, H_{n-1}(V_0)$.

Легко показать также, что изоморфизмы Фари (теорема Фари, § 2) также осуществляются отображением $\bar{\mathfrak{z}}$.

Рассмотрим точную последовательность, связывающую группы гомологий проективного и аффинного алгебраического многообразий:

$$\ldots \to H_p(W) \xrightarrow{s_p} H_p(V) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(W_0) \to \ldots . \qquad (\mathrm{T}_1)$$

Аналогичную последовательность можно написать, приняв за исходное алгебраическое многообразие неособое (проективное) гиперплоское сечение W_0; общим гиперплоским сечением многообразия W_0 будет многообразие P, $\dim P = n-2$:

$$\ldots \to H_q(W_0) \xrightarrow{s'_q} H_q(V_0) \to H_{q-1}(P) \to \ldots . \qquad (\mathrm{T}_2)$$

С помощью гомоморфизмов, введенных в начале этого параграфа, точные последовательности (T_1) и (T_2) объединяются в диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_p(W_0) & \xrightarrow{i_p} & H_p(W) & \xrightarrow{s_p} & H_p(V) & \xrightarrow{\partial_p} & H_{p-1}(W_0) & \to \ldots \\ & \mathfrak{z}'\downarrow & & \downarrow\mathfrak{z} & & \downarrow\bar{\mathfrak{z}} & & \downarrow\mathfrak{z}' & \\ \ldots \to & H_{p-2}(P) & \xrightarrow{i'_{p-2}} & H_{p-2}(W_0) & \xrightarrow{s'_{p-2}} & H_{p-2}(V_0) & \xrightarrow{\partial'_{p-2}} & H_{p-3}(P) & \to \ldots \end{array} \qquad (\mathrm{D}_1)$$

Эта диаграмма, как легко установить, пользуясь определением гомоморфизмов $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{z}'$ и $\bar{\mathfrak{z}}$, коммутативна [см., например (2)].

Из теоремы Лефшетца следует, что верхняя строка диаграммы (D_1) обрывается на члене $H_{n-1}(V)$, а нижняя — на члене $H_{n-2}(V_0)$.

ЛЕММА 3. *Гомоморфизм ∂_{n+1} в верхней строке диаграммы* (D_1) *является нулевым, т. е.* $\ker \partial_{n+1} = H_{n+1}(V)$ (*иными словами, s_{n+1} есть эпиморфизм*).

Рассмотрим соответствующую часть диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(V) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(W_0) & \searrow \eta' & \\ \bar{\mathfrak{z}}\downarrow & \text{I} & \mathfrak{z}'\downarrow & \text{II} & \\ H_{n-1}(V_0) & \xrightarrow[\partial'_{n-1}]{} & H_{n-2}(P) & \xrightarrow{i'_{n-2}} & H_{n-2}(W). \end{array}$$

Мы достроили диаграмму гомоморфизмом η', который, по определению, является сквозным гомоморфизмом $i'_{n-2}\mathfrak{z}'$. Применяя лемму 2 к многообразию W_0 и его гиперплоскому сечению P, мы получаем, что η' есть изоморфизм. Пусть теперь $\alpha \in H_{n+1}(V)$. Тогда

$$\eta'\partial_{n+1} = i'_{n-2}\mathfrak{z}'\partial_{n+1} = i'_{n-2}\ \partial'_{n-1}\bar{\mathfrak{z}}$$

(мы воспользовались коммутативностью квадрата I и треугольника II); так как $i'_{n-2}\partial'_{n-1}$ является нулевым гомоморфизмом (в силу точности), то

$$\eta'\partial_{n+1} = 0,$$

т. е.

$$\partial_{n+1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Гомоморфизм ∂'_n в нижней строке диаграммы* (D_1) *является нулевым.*

ТЕОРЕМА 1. *Гомоморфизмы $\mathfrak{z}\colon H_p(W) \to H_{p-2}(W_0)$ являются изоморфизмами в размерностях $p \geqslant n+2$.*

Доказательство проводится индукцией по размерности многообразия. Действительно, пусть теорема верна для многообразия W_0, $\dim N_0 = n-2$, т. е. отображения

$$\mathfrak{z}'\colon \quad H_q(W_0) \to H_q(P)$$

являются изоморфизмами в размерностях $q \geqslant n+1$. Гомоморфизмы

$$\bar{\mathfrak{z}}\colon \quad H_q(V) \to H_{q-2}(V_0), \quad q > n+1,$$

являются изоморфизмами по теореме Фари (см. замечание 1 этого параграфа). Тогда из основной диаграммы (D_1), пользуясь леммой Картана ([16]), мы сразу получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь «среднюю» часть основной диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+2}(V) & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & H_{n+1}(W_0) & \xrightarrow{i_{n+1}} & H_{n+1}(W) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_{n+1}(V) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(W_0) \\ \bar{\mathfrak{z}}_{n+1}\downarrow & \text{I} & \mathfrak{z}'_n\downarrow & \text{II} & \mathfrak{z}_n\downarrow & \text{III} & \bar{\mathfrak{z}}_n\downarrow & \text{IV} & \downarrow \mathfrak{z}'_{n-1} \\ H_n(V_0) & \xrightarrow[\partial'_n]{} & H_{n-1}(P) & \xrightarrow[i'_{n-1}]{} & H_{n-1}(W_0) & \xrightarrow[s'_{n-1}]{} & H_{n-1}(V_0) & \xrightarrow[\partial'_{n-1}]{} & H_{n-2}(P) \end{array} \qquad (D_2)$$

Гомоморфизмы ∂_{n+1} и ∂'_n — нулевые (лемма 3). Из коммутативности квадрата I и того факта, что $\mathfrak{z}'_n$ является изоморфизмом (теорема 1), мы получаем, что гомоморфизм ∂_{n+2} также является нулевым, т. е. $\operatorname{Im}\partial_{n+2}=0$; в результате мы получаем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H_{n+1}(W_0) & \xrightarrow{i_{n+1}} & H_{n+1}(W) & \xrightarrow{s_{n+1}} & H_{n+1}(V) & & \to 0 & \\ & \mathfrak{z}'\downarrow & & \downarrow\mathfrak{z} & & \downarrow\bar{\mathfrak{z}} & & & \\ 0 \to & H_{n-1}(P) & \xrightarrow[i'_{n-1}]{} & H_{n-1}(W_0) & \xrightarrow[s'_{n-1}]{} & H_{n-1}(V_0) & \xrightarrow[\partial'_{n-1}]{} & H_{n-2}(P). & \end{array} \qquad (D_3)$$

ТЕОРЕМА 2 (проективная теорема о прямом разложении).

$$H_{n-1}(W_0) = L + \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0),$$

т. е. $(n-1)$-мерная группа гомологий неособого проективного гиперплоского сечения является прямой суммой модуля Лефшетца и инвариантной подгруппы.

Разобьем доказательство на ряд пунктов.

1°. $s'_{n-1}(\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)) \subset \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0)$.

Действительно, из

$$(\beta, \delta_i) = 0, \quad \beta \in H_{n-1}(W_0), \quad i = 1, \ldots, \mu,$$

следует:

$$(s'_{n-1}\beta, s'_{n-1}\delta_i) = (s'_{n-1}\beta, \delta_i) = 0.$$

2°. $\mathfrak{z}(H_{n+1}(W)) \supset \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)$.

Действительно, пусть $\beta \in \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)$. Тогда $s'_{n-1}\beta \in \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0)$, а значит, в силу замечания 1,

$$s'_{n-1}\beta = \bar{\mathfrak{z}}\varepsilon, \quad \varepsilon \in H_{n+1}(V).$$

Но так как s_{n+1} есть эпиморфизм (диаграмма (D_3)), то

$$\varepsilon = s_{n+1}\lambda, \quad \lambda \in H_{n+1}(W).$$

Таким образом,

$$\bar{\mathfrak{z}} s_{n+1}\lambda = s'_{n-1}\beta.$$

Из коммутативности квадрата II диаграммы (D_3) мы имеем:

$$\bar{\mathfrak{z}} s_{n+1}\lambda = s'_{n-1}\mathfrak{z}\lambda,$$

или, окончательно,

$$s'_{n-1}\beta = s'_{n-1}\mathfrak{z}\lambda.$$

Отсюда следует, что

$$s'_{n-1}(\beta - \mathfrak{z}\lambda) = 0,$$

т. е. $\beta - \mathfrak{z}\lambda$, в силу точности нижней строки диаграммы (D_3), принадлежит $\operatorname{Im} i'_{n-1}$.

Пусть

$$\beta - \mathfrak{z}\lambda = i'_{n-1}\varphi, \quad \varphi \in H_{n-1}(P).$$

Так как $\mathfrak{z}'$ — изоморфизм (теорема 1), то

$$\varphi = \mathfrak{z}'\psi, \quad \psi \in H_{n+1}(W_0),$$

и из коммутативности квадрата I диаграммы (D_3) имеем:

$$\mathfrak{z} i_{n+1}\psi = i'_{n-1}\mathfrak{z}'\psi = i'_{n-1}\varphi.$$

Обозначая

$$i_{n+1}\psi = \lambda', \quad \lambda' \in H_{n+1}(W),$$

окончательно получаем:

$$\beta - \mathfrak{z}\lambda = \mathfrak{z}\lambda',$$

т. е.

$$\beta = \mathfrak{z}(\lambda + \lambda'),$$

что и требовалось доказать.

3°. Пусть i — гомоморфизм вложения:

$$i: \quad H_{n-1}(W_0) \to H_{n-1}(W).$$

Тогда $\ker i = L$. Действительно, из точной последовательности

$$\ldots \xrightarrow{n} H_n(V) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(W_0) \xrightarrow{i} H_{n-1}(W) \to 0$$

мы находим, что $\ker i = \operatorname{Im} \partial$; из теоремы же 3 § 2 и из определения «сачков» $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu$ и «мешков» $S_{\nu+1}, \ldots, S_\mu$ (§§ 1, 2) легко следует, что $\operatorname{Im} \partial = L$ [см., например, ([2])].

4°. Рассмотрим коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(W) & \xrightarrow{\eta} & H_{n-1}(W) \\ & \mathfrak{z}\searrow \quad \nearrow i & \\ & H_{n-1}(W_0) & \end{array}$$

Отображение η есть изоморфизм (лемма 2). Отсюда следует, что $H_{n-1}(W_0)$ есть прямая сумма образа гомоморфизма $\mathfrak{z}$ и ядра гомоморфизма i. Так как, ввиду 2°,

$$\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0) \subset \operatorname{Im} \mathfrak{z},$$

то

$$\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0) \cap \ker i = 0,$$

т. е., ввиду 3°,

$$\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0) \cap L = 0. \tag{4}$$

Подпространства $\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)$ и L ортогональны в смысле невырожденного скалярного произведения (пересечения), определенного на пространстве $H_{n-1}(W_0)$; более того, подпространство $\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)$ является ортогональным дополнением L в $H_{n-1}(W_0)$ (теорема Пуанкаре). Поэтому

$$\Delta H_{n-1}(W_0) = \Delta L + \Delta \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)$$

см., например ([5]), стр. 108]. Отсюда и из (4) получаем:

$$H_{n-1}(W_0) = \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0) + L.$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

ЛЕММА 4. *Пусть* $i'_{n-1}: H_{n-1}(P) \to H_{n-1}(W_0)$. *Тогда*

$$i'_{n-1}(H_{n-1}(P)) \subset \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0).$$

Это означает, что если цикл α лежит на некотором неособом гиперплоском сечении P многообразия W_0, то

$$(\alpha, \delta_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, \mu.$$

Действительно, пусть, например, $P = W_0 \cap P_\infty$ и $\xi_i \in U_i$, где U_i — нормальная окрестность точки γ_i. $\sigma_{\xi_0\xi_i}$ есть канонический гомеоморфизм W_0 и W_{ξ_0}, и очевидно, что $\sigma_{\xi_0\xi_i}$ действует на

$$P = W_0 \cap P_\infty = W_{\xi_i} \cap P_\infty$$

как тождественное отображение. Таким образом, $\sigma_{\xi_0\xi_i}\alpha = \alpha$,

$$(\alpha, \delta_i) = (\sigma_{\xi_0\xi_i}\alpha, \ \sigma_{\xi_0\xi_i}\delta_i) = (\alpha, \delta_i) = 0,$$

так как δ_i — цикл, лежащий в некоторой компактной окрестности точки γ_i и, в частности, не пересекающейся с P_∞.

Следствие 1.

$$\operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0) = \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)/i'_{n-1}(H_{n-1}(P)).$$

Так как i'_{n-1} *является мономорфизмом, то мы, в частности, получаем:*

$$\Delta \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0) = \Delta \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0) - \Delta H_{n-1}(P).$$

Для доказательства утверждения следствия достаточно показать, ввиду леммы 4 и п. 1° доказательства теоремы 2, что

$$s'_{n-1}(\operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0)) \supset \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0).$$

Последнее утверждение легко получается из того факта, что отображение $\bar{s}$ является гомоморфизмом на $\operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0)$, из коммутативности квадрата II диаграммы (D_3) и из п. 3° доказательства теоремы 2.

Из точной последовательности

$$0 \to H_{n-1}(P) \xrightarrow{i'_{n-1}} H_{n-1}(W_0) \xrightarrow{s'_{n-1}} H_{n-1}(V_0) \xrightarrow{\partial'_{n-1}} H_{n-2}(P) \to$$
$$\xrightarrow{i'_{n-2}} H_{n-2}(W_0) \to 0,$$

где $\ker i'_{n-2} = L'$, L' — модуль Лефшетца для $(n-2)$-мерного подмногообразия P, рассматриваемого как гиперплоское сечение многообразия W_0 (п. 4° теоремы 2), и из теоремы 2, леммы 4 и ее следствия мы устанавливаем следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. *Существует точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0) + L \to H_{n-1}(V_0) \to L' \to 0.$$

Теорема 3 является естественной заменой неверной теоремы Уоллеса о прямом разложении группы $H_{n-1}(V_0)$ [см. ([3]), теорема 4 гл. VIII].

По теореме Уоллеса,

$$H_{n-1}(V_0) = \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0) + L,$$

тогда как уже в простейшем случае алгебраических поверхностей L' всегда $\neq 0$ (см. § 4).

§ 4. Ранги групп гомологий аффинного и проективного алгебраических многообразий

Результаты § 3 позволяют сразу найти ранги групп гомологий аффинного алгебраического многообразия. Действительно, в § 2 оставался невычисленным лишь ранг группы $H_n(V)$, который, по теореме 3 § 2, был равен $\mu - J$, где $J = \operatorname{rang} \|(\alpha, \delta_i)\|$. Ранг матрицы $\|\alpha, \delta_i\|$, по теореме Пуанкаре, равен

$$\Delta H_{n-1}(V_0) - \Delta \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0) = \Delta L + \Delta L' \tag{1}$$

(в силу теоремы 3 § 3).

Таким образом, объединяя теорему Фари, теорему Лефшетца, теорему 2 § 2, замечание 1 § 3 и учитывая (1), мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. 1). $H_p(V) \approx H_{p-2}(V_0)$, $p \geqslant n+2$; *изоморфизм задается отображением* $\bar{\mathfrak{z}}$, *определенным в начале* § 3;

2) $H_{n-1}(V) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1}(V_0)$; *изоморфизм также задается отображением* $\bar{\mathfrak{z}}$;

3) $\Delta H_n(V) = \mu - \Delta L - \Delta L'$;

4) *группа* $H_n(V)$ *порождается* μ *циклами* $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu, S_{\nu+1}, \ldots, S_\mu$, *из которых последние* $(\mu - \nu)$ *циклов* $S_{\nu+1}, \ldots, S_\mu$ — *«мешки», являются независимыми на* $H_n(V)$, *а ранг группы, порожденной циклами* $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu$, *равен* $\Delta L + \Delta L'$;

5) $H_q(V) = 0$, $q \leqslant n-1$.

Из теоремы А нетрудно получить формулы, выражающие ранг групп гомологий проективных алгебраических многообразий.

Из теоремы Лефшетца немедленно следует, что вложение

$$i_p\colon\ H_p(W_0) \to H_p(W)$$

является изоморфизмом в размерностях $p \leqslant n-2$; теорема 1 § 3 позволяет определить группы гомологий $H_p(W)$ в размерностях $p \geqslant n+2$. Из теоремы Лефшетца, теоремы 2 § 3 и из п. 4° доказательства теоремы 2 § 3 следует, что

$$\ker i_{n-1} = L, \tag{2}$$

и мы получаем изоморфизм

$$H_{n-1}(W) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0). \tag{3}$$

Рассмотрим, наконец, точную последовательность

$$\begin{aligned} H_{n+1}(V) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(W_0) \to H_n(W) \to H_n(V) \to \\ \to H_{n-1}(W_0) \to H_{n-1}(W) \to H_{n-1}(V). \end{aligned} \tag{T}$$

Здесь $H_{n-1}(V) = 0$ по теореме Лефшетца, а гомоморфизм ∂_{n+1} нулевой в силу леммы 3 § 3. Из точной последовательности (T) получаем:

$$\Delta H_n(W) = \Delta H_n(W_0) + \Delta H_n(V) - \Delta H_{n-1}(W_0) + \Delta H_{n-1}(W), \tag{4}$$

или, в силу (2) и (3),

$$\Delta H_n(W) = \Delta H_n(W_0) + \Delta H_n(V) - \Delta L. \tag{5}$$

Преобразуем правую часть равенства (5) согласно теореме 3 § 3:

$$\Delta H_n (W) = \Delta H_n (W_0) - \Delta L + \mu + \Delta \operatorname{Inv} H_{n-1} (V_0) - \Delta H_{n-1} (V_0). \quad (6)$$

Правую часть равенства (6) можно преобразовать так, чтобы она не содержала рангов групп гомологий аффинных многообразий. Для этой цели воспользуемся точной последовательностью

$$H_n (V_0) \xrightarrow{\partial'_n} H_{n-1} (P) \to H_{n-1} (W_0) \to$$
$$\to H_{n-1} (V_0) \to H_{n-2} (P) \to H_{n-2} (W_0) - H_{n-2} (V_0), \qquad (T_2)$$

в которой последний член, по теореме Лефшетца, равен 0, а гомоморфизм ∂'_n является нулевым в силу леммы 3 § 3. Из последовательности (T_2) мы можем выразить ранг группы $H_{n-1} (V_0)$ через ранги групп гомологий проективных многообразий W_0 и P; ранг группы $\operatorname{Inv} H_{n-1} (V_0)$, по следствию 1 лемм 4 и 5 § 3, равен

$$\Delta \operatorname{Inv} H_{n-1} (W_0) - \Delta H_{n-1} (P).$$

Учитывая изоморфизм (3), находим:

$$\Delta H_n (W) = \mu - 2 [\Delta H_{n-1} (W_0) - \Delta H_{n-1} (W) - \Delta H_{n-2} (W_0)] -$$
$$- \Delta H_{n-2} (P). \qquad (7)$$

Суммируя все вышесказанное, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА В. 1) $H_p (W) \approx H_{p-2} (W_0)$, $p \geqslant n - 2$; *изоморфизм задается отображением* $\mathfrak{z}$, *определенным в начале* § 3;

2) $H_{n+1} (W) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1} (W_0)$; *изоморфизм задается отображением* $\mathfrak{z}$;

3) *ранг группы* $H_n (W)$ *определяется по рекуррентной формуле* (7);

4) $H_{n-1} (W) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1} (W_0)$, $H_q (W) \approx H_q (W_0)$, $q \leqslant n - 2$, *причем последний изоморфизм задается вложением*

$$i_q: \quad H_q (W_0) \to H_q (W).$$

Замечание 1. Утверждение 1) теоремы В, если ограничиваться вопросом о рангах, является следствием утверждения 4) и теоремы двойственности Пуанкаре.

Замечание 2. Изоморфизм $H_{n+1} (W) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1} (W_0)$ является следствием теоремы 2 § 3 и теоремы двойственности.

Замечание 3. Из теоремы 3 § 2 о строении группы $H_n (V)$ можно извлечь некоторые сведения о геометрическом строении группы $H_n (W)$; так, например, группа $H_n (W)$ порождается n-мерными циклами на общем гиперплоском сечении W_0 многообразия W и циклами вида

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \Delta_i + \sum_{j=\nu+1}^{\mu} \rho_j S_j + M,$$

где M — цепь на W_0, $\partial M = -\sum_{i=1}^{\nu} \tau_i \delta_i$.

В качестве примера рассмотрим алгебраическую поверхность при $n = 2$.

Основная диаграмма (D_1) § 3 в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \to H_4(W^2) & \to & H_4(V^2) & \to & H_3(W^1) & \to & H_3(W^2) & \to & H_3(V^2) & \xrightarrow{\partial_3} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to H_2(W_0^1) & \to & H_2(V_0^1) & \to & H_1(P) & \to & H_1(W_0^1) & \to & H_1(V_0^1) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to H_2(W_0^1) & \to & H_2(W^2) & \to & H_2(V^2) & \to & H_1(W_0^1) & \to & H_1(W^1) & \to & H_1(V^2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\to H_0(P) & \to & H_0(W_0^1) & \to & H_0(V_0^1) & \to & 0 & & & &
\end{array}$$

W_0^1 является алгебраической кривой; пусть род ее равен g. P — группа точек, дивизор на W_0^1, порядок которого равен степени поверхности W^2 (степени кривой W_0^1). Обозначим это число через d. Мы имеем:

$$H_4(W^2) = H_2(W_0^1) = A, \tag{8}$$

$$H_3(W_0^1) = H_1(P) = 0, \tag{9}$$

$$H_0(W_0^1) = A, \quad H_0(V_0^1) = 0, \tag{10}$$

ибо W_0^1 компактно, а V_0^1 нет. Далее, $H_1(V^2) = 0$ по теореме Лефшетца; гомоморфизм ∂_3 нулевой, ибо фундаментальный цикл кривой W_0^1 (гиперплоского сечения поверхности W^2) не гомологичен нулю на поверхности. Из соотношения (9), теоремы 2 § 3, леммы 4 § 3 и их следствий получаем:

$$\operatorname{Inv} H_1(V_0^1) \approx \operatorname{Inv} H_1(W_0^1).$$

Гомоморфизм s_1': $H_1(W_0^1) \to H_1(V_0^1)$ является мономорфизмом; легко видеть, что коядро гомоморфизма s_1' составляют циклы (т. е. классы гомологий, порождаемые соответствующими циклами), соединяющие на (аффинной) кривой V_0^1 точки $A_1, \ldots, A_d$, $\sum_{i=1}^{d} A_i = P$. Обозначим эти циклы через $l_1, \ldots, l_{d-1}$. Порождаемая этими циклами подгруппа $N \subset H_1(V_0^1)$ является подгруппой «некомпактных» циклов на V_0^1; легко видеть, что $H_1(V_0^1)$ есть прямая сумма: $H_1(V_0^1) \approx N + H_1(W_0^1)$. Отсюда легко получить равенство

$$\Delta H_2(V^2) = \mu - \Delta L - (d - 1).$$

Для проективной поверхности имеют место формулы:

$$H_4(W^2) = A, \quad H_3(W^2) = H_1(W^2) \approx \operatorname{Inv} H_{n-1}(W_0^1),$$

$$\Delta H_2(W^2) = \mu - 4g + 2R_1 - d + 2,$$

где $R_1 = \Delta H_1(W^2)$ (формула Пикара — Александера), или, если использовать равенство $R_1 = \Delta \operatorname{Inv} H_1(W_0^1)$,

$$\Delta H_2(W^2) = \mu - 4g + \Delta \operatorname{Inv} H_1(W_0^1) - d + 2$$

[см. ([4]), ([5])].

Поступило
10. V. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Fáry I., Cohomologie des variétés algébriques, Ann. of Math., 65 (1957), 21—73.
[2] Wallace A. H., Homology on algebraic varieties, Pergamen Press, London, 1958.
[3] Wallace A. H., On the homology theory of algebraic varieties. I, Ann. of Math. 63 (1956), 243—271.
[4] Lefschetz S., L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier — Villars, Paris, 1924.
[5] Zarissky O., Algebraic surfaces, Springer, Berlin, 1935.
[6] Жижченко А. Б., О группах гомологий аффинных алгебраических многообразий, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 4 (1959), 661—664.
[7] Baldassari M., Algebraic varieties, Springer-Verlag, Berlin, 1956.
[8] Hodge W. V. D., The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge, Univ. Press, 1941.
[9] Hodge W. V. D., The topological invariants of algebraic varieties, Proc. Int. Congress of Math., Cambridge, Mass., t. I, 1950.
[10] Картан А. и Эйленберг С., Гомологическая алгебра, Москва, 1960.
[11] Schwartz L., Lectures on analytic manifolds, India, Tata Institute, 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 789—796

Ю. И. МАНИН

О РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЯХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В работе доказана конечность числа неизоморфных накрытий данной степени алгебраической кривой при заданных точках ветвления и показателях ветвления, не делящихся на характеристику основного поля.

В работе (5) Ленг и Серр доказали теорему о конечности числа неизоморфных неразветвленных накрытий заданной степени полной неособой кривой и поставили вопрос о справедливости этой теоремы для разветвленных накрытий, не имеющих так называемого «дикого» ветвления (когда показатели ветвления делятся на характеристику поля констант). Этот вопрос в положительном смысле был решен в работе Абьянкара (6). И. Р. Шафаревич обратил внимание автора на то, что метод понижения поля констант с помощью абстрактных дифференцирований, использованный автором в случае нулевой характеристики [см. (7)], применим и к указанной задаче. Действительно, множество разветвленных накрытий данной кривой с ветвлением данной степени в данных точках может быть снабжено структурой алгебраического многообразия (вообще говоря, приводимого): эта часть задачи решается традиционными методами, и мы не будем на ней останавливаться. Основная трудность состоит в доказательстве того, что точки любой компоненты такого многообразия дают изоморфные накрытия. Этот факт и будет доказан в дальнейшем; он равносилен теореме Абьянкара, которая в работе (6) доказана совершенно иным способом. Отметим еще, что все рассуждения настоящей работы с большими упрощениями проходят также в нулевой характеристике: по существу, все дело в этом случае решается локальными рассмотрениями, приведенными в конце доказательства основной леммы.

1. ТЕОРЕМА. *Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, K/k — сепарабельное замыкание некоторого расширения конечного типа поля k, R/K — поле алгебраических функций консервативного рода g над полем констант K, $v \in R$ — трансцендентный над K элемент. Обозначим через $\mathfrak{b}$ дивизор поля $K(v)$, являющийся произведением всех простых дивизоров этого поля, разветвленных в поле R, и назовем дивизор $\mathrm{con}_{K(v)/R}\,\mathfrak{b}$ поля R дивизором ветвления. Пусть выполняются следующие условия:*

а) *расширение $R/K(v)$ сепарабельно;*

б) *если $\mathfrak{p}/\mathfrak{b}$, то $v_{\mathfrak{p}}(v) = 0$ и $v_{\mathfrak{p}} \in k$;*

в) *дивизор ветвления вполне распадается над полем K; индексы ветвления не делятся на характеристику p; дивизор функции v также вполне распадается.*

Тогда существует такое подполе $R_0 \subset R$, содержащее поле $k(v)$ и являющееся полем алгебраических функций одной переменной над полем констант k, что $R_0 K = R$.

Прежде всего мы исключим из рассмотрения случаи $g = 0,1$; они будут разобраны в конце работы. Пусть $g \geqslant 2$ и $n \geqslant 3$ — любое целое число. Обозначим буквой $\mathfrak{a}$ дивизор дифференциала dv в поле R; $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$, как обычно, обозначает K-линейное пространство функций $u \in R$, для которых дивизор $(u)\,\mathfrak{a}^n$ цел.

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть ∂ — произвольное дифференцирование поля K/k, ∂_v — его продолжение на поле R, для которого $\partial_v v = 0$ (это продолжение существует и единственно в силу условия а) теоремы). Тогда пространство $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$ ∂_v-допустимо. Иначе говоря, если дивизор $(u)\,\mathfrak{a}^n$ цел, то дивизор $(\partial_v u)\,\mathfrak{a}^n$ также цел.*

Доказательство. Обозначим буквой $\mathfrak{M}$ множество всех простых дивизоров поля R, для которых либо $\nu_\mathfrak{p}(v) \neq 0$, либо $\nu_\mathfrak{p}(dv) \neq 0$. Покажем прежде всего, что если $\nu_\mathfrak{p}(\partial_v u) < 0$, то $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$, какова бы ни была функция $u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$.

Пусть $F(u, v)$ — минимальный многочлен, связывающий над K функции u и v. Если $\nu_\mathfrak{p}(u) < 0$, то, очевидно, $\nu_\mathfrak{p}(dv) > 0$. Поэтому достаточно рассмотреть простые дивизоры, соответствующие точкам аффинной кривой $F(u, v) = 0$. Если в такой точке $\nu_\mathfrak{p}(\partial_v u) < 0$, то, в силу соотношения

$$F^\partial(u, v) + F_u(u, v)\,\partial_v u = 0,$$

имеем $\nu_\mathfrak{p}(F_u) > 0$, ибо $\nu_\mathfrak{p}(F^\partial(u, v)) \geqslant 0$. Кроме того,

$$F_u\,du + F_v\,dv = 0.$$

Если $\mathfrak{p} \notin \mathfrak{M}$, то $\nu_\mathfrak{p}(dv) = 0$, так что из неравенства $\nu_\mathfrak{p}(F_u) > 0$ следует, что $\nu_\mathfrak{p}(F_v) > 0$. Поэтому дивизор $\mathfrak{p}$ соответствует особой точке кривой $F(u, v) = 0$.

Предположим сначала, что на аффинной кривой с общей точкой $(u_1, \ldots, u_m)$, где (u) — базис пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$, соответствующая точка неособая. Это означает, что

$$\underset{i=1,\ldots,m}{\text{н. о. д.}}(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{p},$$

где

$$\mathfrak{a}_i = \text{н. о. д.}\,((v - v_\mathfrak{p})_0, (u_i - u_{i\mathfrak{p}})_0)$$

(мы предполагаем, что степень дивизора $\mathfrak{p}$ равна единице; этого можно добиться, временно расширяя поле констант). Выберем систему общих независимых констант $c_1, \ldots, c_m$ над полем K; тогда

$$\text{н. о. д.}\left((v - v_\mathfrak{p})_0, \left(\sum_{i=1}^{m} c_i\,(u_i - u_{i\mathfrak{p}})\right)_0\right) = \mathfrak{p}.$$

Возьмем такую невырожденную матрицу $\|c_i^{(j)}\|$, для любого столбца которой выполняется то же соотношение (можно потребовать даже, чтобы

$c_i^{(j)} \in K$, или временно расширить поле констант). Положим

$$u^{(j)} = \sum_{i=1}^{m} c_i^{(j)} \ u_i;$$

пусть $F_j(u^{(j)}, v)$ — минимальный многочлен, связывающий $u^{(j)}$ и v. Центр дивизора $\mathfrak{p}$ на любой из аффинных кривых $F_j(u^{(j)}, v) = 0$ является простым. Следовательно, из приведенных рассуждений вытекает, что

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\partial_v u^{(j)}) \geqslant 0,$$

а значит, и

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\partial_v u) \geqslant 0.$$

Таким образом, помимо дивизоров из множества $\mathfrak{M}$, полюсами $\partial_v u$ могут быть лишь дивизоры, соответствующие особым точкам кривой $(u_1, \ldots, u_m)$.

Поскольку $g \geqslant 2$, известно [см. Розенлихт ([1])], что проективная кривая с однородной общей точкой $(u_1, \ldots, u_m)$ неособая. Поэтому на аффинной кривой особенность может быть лишь в начале координат. Покажем, что если $\nu_{\mathfrak{p}}(u_i) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, то $\nu_{\mathfrak{p}}(dv) < 0$, т. е. $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$. Для этого достаточно доказать, что наибольший общий делитель дивизоров $(u_i)\, \mathfrak{a}^n$ является единичным дивизором. В силу леммы Шевалле [см. ([2]), стр. 138] это справедливо уже для дивизоров дифференциалов первого рода, что и дает требуемый результат.

Теперь остается исследовать точки множества $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ и $u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$. В силу условия в) теоремы, локальная униформизирующая t точки $\mathfrak{p}$ является сепарабельно-порождающей переменной поля R/K, так что дифференцирование ∂_t существует. Очевидно, для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\nu_{\mathfrak{p}}\left(\partial_v u \left(\frac{dv}{dt}\right)^n\right) \geqslant 0,$$

ибо

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \nu_{\mathfrak{p}}\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

В силу леммы Шевалле [см. ([2]), стр. 223, или ([3]), лемма 1], имеем:

$$\partial_v u \left(\frac{dv}{dt}\right)^n = (\partial_v - \partial_t)\, u \left(\frac{dv}{dt}\right)^n + \partial_t u \left(\frac{dv}{dt}\right)^n = -\partial_t v \frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^{n-1} + \partial_t u \left(\frac{dv}{dt}\right)^n$$

Так как K-линейный оператор ∂_t непрерывен в топологии локального кольца $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, то, применяя ∂_t к разложению u по степеням t, получаем, что

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\partial_t u) \geqslant \nu_{\mathfrak{p}}(u).$$

Остается проверить член

$$\partial_t v \left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)^{n-1}.$$

Пусть точка $\mathfrak{p}$ разветвлена; тогда

$$v = \gamma + \delta t^e + \ldots, \quad e\delta \neq 0,$$

в силу условия в) теоремы. Это сразу же дает:

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\partial_t v) \geqslant e, \quad \nu_{\mathfrak{p}}\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)^{n-1}\right) = (n-1)(e-1).$$

Из неравенства

$$\nu_{\mathfrak{p}}\left(u\left(\frac{dv}{dt}\right)^n\right) \geqslant 0$$

следует, что

$$\nu_{\mathfrak{p}}(u) \geqslant n(1-e),$$

откуда получаем:

$$\nu_{\mathfrak{p}}\left(\frac{du}{dt}\right) \geqslant n(1-e)-1.$$

Все вместе дает:

$$\nu_{\mathfrak{p}}\left(\partial_t v \frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^{n-1}\right) \geqslant e + n(1-e) - 1 + (n-1)(e-1) = 0.$$

Отметим, что мы существенно пользовались условием $v_{\mathfrak{p}} \in k$, т. е. равенством $\partial\gamma = 0$, и требованием $e \not\equiv 0 \pmod{p}$. Случай, когда точка $\mathfrak{p}$ является нулем или полюсом функции v, разбирается совершенно аналогично. Доказательство основной леммы закончено.

3. Обозначим через K_1 подполе K, состоящее из элементов, аннулируемых дифференцированием ∂, и воспользуемся одним из результатов Картье (4), согласно которому K_1-подпространство K-пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$, состоящее из элементов, аннулируемых ∂_v, порождает над K все пространство $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$. Выберем такой базис $u_1, \ldots, u_m$ пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$, что $\partial_v u_i = 0$. Если $F(u_i, v)$ — минимальный многочлен, нормированный тем условием, чтобы какой-нибудь коэффициент его был равен единице, то равенство $\partial_v u_i = 0$ дает

$$F^{\partial}(u_i, v) = 0,$$

т. е. коэффициенты многочлена F лежат в поле K_1. Положим

$$R_1 = K_1(v, u_1, \ldots, u_m)$$

и покажем, что поле R_1/K_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Соотношение $R_1 K = R$ следует из того, что, как показано в работе Розенлихта (1),

$$R = K(u_1, \ldots, u_m).$$

Прежде всего, поле констант поля R_1 в точности равно K_1. В самом деле, рассматривая элемент поля R_1, алгебраичный над K_1, как элемент поля R, убеждаемся, что он принадлежит K; но любой элемент поля R_1 аннулируется ∂_v; следовательно, он принадлежит K_1. Далее, поле K_1 сепарабельно-замкнуто, ибо, как легко видеть, $K \supset K_1 \supset K^p$. Наконец, поле R_1 сепарабельно над $K_1(v)$, ибо любой элемент u_i связан с v сепарабельным уравнением с коэффициентами из поля K_1. Поля R_1 и $K(v)$ линейно разделены над общим подполем $K_1(v)$, ибо первое из них является сепарабельным расширением, а второе — чисто несепарабельным. Отсюда следует, что

$$[R : K(v)] = [R_1 : K_1(v)] = r.$$

Покажем, что род поля R_1/K_1 равен g. С этой целью достаточно доказать, что точки поля $K_1(v)$, поле вычетов которых несепарабельно над K_1,

не разветвляются в поле R_1. Заключение о роде будет следовать отсюда в силу замечания переводчика на стр. 180 книги Шевалле (²). Пусть $\mathfrak{p}$ — соответствующая точка поля R_1; выше было показано, что центр такой точки лежит на аффинной кривой $(u_1, \ldots, u_m)$ и не совпадает с началом координат, так что имеется ровно r точек этой кривой, проектирующихся на точку $v = v_\mathfrak{p}$, ибо точка $\mathfrak{p}$ не ветвится в поле R. Поскольку $[R_1 : K_1(v)] = r$, это дает требуемый результат.

Теперь нетрудно проверить, что точки поля $K_1(v)$, разветвленные в поле R_1, соответствуют точкам $v = v_\mathfrak{p}$ поля $K(v)$, разветвленным в поле R. Если бы поле вычетов какой-нибудь точки ветвления (простого делителя дивизора ветвления) поля R_1 не совпадало с K_1, то, в силу первого условия в), при расширении поля констант до K эта точка распалась бы, став p-й степенью, и соответствующий показатель ветвления в поле R делился бы на p. Поэтому точки ветвления поля $R_1/K_1(v)$ рациональны над полем K_1 и система показателей ветвления — та же, что и для поля, $R/K(v)$. Рациональность над K_1 нулей и полюсов функции v выводится аналогично.

4. Из всего сказанного следует, что к полю R_1/K_1 и любому дифференцированию ∂ поля K_1 применима основная лемма и ее следствия, так что можно найти новое подполе R_2/K_2 с условием $K_2 \subset K_1$ и $R_2K_1 = R_1$ и т. д. При этом поле R_i порождается над $K_i(v)$ K_i-рациональным базисом пространства $\mathfrak{L}(\bar{\mathfrak{a}}^n)$, однако это последнее выражение пока имеет лишь фигуральный смысл. Наша ближайшая задача — показать, что $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$ действительно можно рассматривать как подпространство некоторого K-линейного пространства L большей размерности такое, что пересечение $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n) \cap R_i$ представляет собой K_i-подпространство пространства L, состоящее из K_i-рациональных векторов. Коль скоро это будет сделано, из доказанного факта

$$(\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n) \cap R_i) \otimes K \approx \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$$

и известной теоремы линейной алгебры о существовании наименьшего поля определения линейного подпространства будет следовать, что пространство $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$ обладает $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$-рациональным базисом. Нетрудно показать, что последовательность полей K_i можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i = k.$$

Теперь любой элемент k-рационального базиса $(u_1, \ldots, u_m)$ оказывается связанным с v уравнением, все коэффициенты которого принадлежат k (при условии, что один из них равен 1). В самом деле, иначе для некоторого индекса все коэффициенты этого уравнения принадлежали бы K_i, но хоть один из них не принадлежал бы K_{i+1}. Но тогда мы имели бы:

$$F_i^{\partial_i}(u, v) \neq 0,$$

где ∂_i — дифференцирование поля K_i, аннулирующее K_{i+1}, и, следовательно,

$$\partial_{iv} u \neq 0,$$

что противоречит условию k-рациональности и, значит, K_{i+1}-рациональности элемента u как вектора пространства L. Таким образом, поле $R_0 = k(v, u_1, \ldots, u_m)$ удовлетворяет заключению теоремы.

Остается лишь провести построение пространства L, что завершит доказательство теоремы для случая $g \geqslant 2$. Для этой цели нам понадобится формализация разложения Пюизе. Именно, любая K-рациональная точка поля R/K однозначно определяет некоторый изоморфизм ρ поля R в поле формальных степенных рядов $K((\tau))$ одной переменной τ, удовлетворяющий условию

$$\rho(v) = \tau^e,$$

если $\nu_\mathfrak{p}(v) = e \neq 0$, или

$$\rho(v) = v_\mathfrak{p} + \tau^e,$$

где $e = \nu_\mathfrak{p}(v - v_\mathfrak{p})$, если $\nu_\mathfrak{p}(v) = 0$ («разложение по дробным степеням переменной v»). Обозначая через ∂_τ непрерывное дифференцирование поля $K((\tau))$, определенное равенством

$$\partial_\tau\left(\sum a_i\tau^i\right) = \sum \partial a_i\tau^i,$$

мы можем показать, что изоморфизм ρ ∂-допустим, если либо $\nu_\mathfrak{p}(v) \neq 0$, либо $\partial(v_\mathfrak{p}) = 0$. В самом деле, пусть, скажем, $\tau_\mathfrak{p}(v) = 0$ и $\partial(v_\mathfrak{p}) = 0$ (случай $\nu_\mathfrak{p}(v) \neq 0$ разбирается аналогично). Поскольку

$$F_u(u, v) \neq 0,$$

где $F(u, v) = 0$ — минимальное уравнение, связывающее u и v, имеем:

$$\rho(\partial_v u) = -\rho\left(\frac{F^\partial(u, v)}{F_u(u, v)}\right) = -\frac{F^\partial(\rho u, \tau^e + v_\mathfrak{p})}{F_u(\rho u, \tau^e + v_\mathfrak{p})}.$$

Но так как ρ есть изоморфизм, то

$$F(\rho u, \tau^e + v_\mathfrak{p}) = 0;$$

кроме того,

$$\partial_\tau(v_\mathfrak{p} + \tau^e) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$F^\partial(\rho u, \tau^e + v_\mathfrak{p}) + F_u(\rho u, \tau^e + v_\mathfrak{p})\,\partial_\tau(\rho u) = 0;$$

это дает требуемый результат.

Упорядочим теперь раз навсегда точки множества $\mathfrak{M}$; положим

$$k = \min \nu_\mathfrak{p}(u),$$

где $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$, $u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$, и сопоставим любому элементу $u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$ вектор $\bar{u}$ с координатами в поле K, состоящий из всех коэффициентов при отрицательных степенях τ во всех разложениях Пюизе элемента ρu, соответствующих точкам множества $\mathfrak{M}$ (сначала пишутся в порядке возрастания степени τ коэффициенты разложения ρu в первой точке, начиная с k-го; затем то же — для второй точки и т. д.). Отображение $u \to \bar{u}$ является K-гомоморфизмом пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$ в некоторое пространство $L = K^N$, притом ∂-допустимым. Более того, отображение $u \to \bar{u}$ мономорфно, ибо, как следует из определения, полюсы функций u все находятся в точках множества $\mathfrak{M}$, так что если $\bar{u} = 0$, то $u \in K$, но $K \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n) = \{0\}$. Пусть $\bar{\mathfrak{L}} \subset L$ — образ пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n)$; тогда очевидно,

что $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^n) \cap R_i$ имеет своим образом в точности K_i-подпространство пространства $\overline{\mathfrak{L}}$, состоящее из векторов, координаты которых принадлежат K_i (проще всего доказать это индукцией по i). Таким образом, пространство L построено.

5. Остается доказать теорему для случаев $g = 0,1$. Нетрудно видеть, что существует такое алгебраическое расширение R' поля $k(v)$, что композит $RR'/K(v)$ имеет род $\geqslant 2$ и удовлетворяет всем остальным условиям теоремы. Тогда из теоремы следует, что существует подполе $R_0 \subset RR'$, содержащее $k(v)$ и являющееся его алгебраическим расширением, такое, что

$$R_0K = RR'.$$

Но из соображений теории Галуа легко получается, что любое поле R, промежуточное между полями $K(v)$ и RR', является композитом с полем K некоторого поля S, промежуточного между полями $k(v)$ и R_0; именно,

$$S = R \cap R_0.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Отметим еще, что случай $g = 0$ можно было бы разобрать совершенно аналогично случаю $g \geqslant 2$. Именно, следует положить $n = -1$, т. е. рассмотреть пространство $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^{-1})$. Тогда формулировка основной леммы, разбор случая $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ и вся оставшаяся часть доказательства теоремы пройдут без изменений. Отдельного доказательства потребуют лишь два факта: во-первых, что пространство $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^{-1})$ порождает поле R, и, во-вторых, что если $\mathfrak{p}$ — особая точка соответствующей проективной кривой, то $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$. Пусть $R = K(t)$ и $v = \varphi(t)$, где φ — некоторая рациональная функция с коэффициентами из поля K. С помощью дробно-линейной замены образующего элемента t всегда можно добиться того, чтобы из неравенства $\nu_\mathfrak{p}(t) < 0$ следовало неравенство $\nu_\mathfrak{p}(v) < 0$; пусть это сделано. Легко видеть, что функции $\varphi'(t)$, $t\varphi'(t)$, $t^2\varphi'(t)$ составляют базис пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{a}^{-1})$. Отсюда сразу следует, что любой базис этого пространства порождает над K все поле R. Кроме того, особая точка кривой

$$(\varphi'(t), t\varphi'(t), t^2\varphi'(t)),$$

в которой, помимо множества $\mathfrak{M}$, только и может быть полюс функции $\partial_v u$, является началом координат, т. е. в ней $\varphi'(t) = 0$. Следовательно, в этой точке

$$\nu_\mathfrak{p}(dt) < \nu_\mathfrak{p}(dv);$$

если $\nu_\mathfrak{p}(dv) = 0$, то

$$\nu_\mathfrak{p}(dt) < 0,$$

т. е. $\nu_\mathfrak{p}(t) < 0$ и, значит, $\nu_\mathfrak{p}(v) < 0$, так что $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$.

6. Доказанная теорема по существу утверждает, что любое конечное сепарабельное расширение R поля $k(v)$, не имеющее «дикого» ветвления и такое, что точки ветвления в поле $k(v)$ рациональны, изоморфно некоторому расширению, определенному над полем k. Это утверждение спра-

ведливо и в более общем случае, если вместо $k(v)$ брать любое поле алгебраических функций S одной переменной над полем k. Для доказательства заметим, что можно найти такое подполе $k(v) \subset S$, что расширение $R/k(v)$ будет удовлетворять условиям теоремы; достаточно взять композит поля R_0, существование которого утверждается в теореме, с полем S, чтобы получить расширение поля S, K-изоморфное полю R. Геометрическая интерпретация этого факта заключается в том, что любая алгебраическая система накрытий некоторой k-кривой, разветвленных в k-рациональных точках и не имеющих «дикого» ветвления, состоит из изоморфных накрытий. Как указано в начале работы, отсюда следует конечность числа таких неизоморфных накрытий заданной степени.

Поступило
5. VII. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rosenlicht M., Automorphisms of function fields, Trans. Am. Math. Soc., 79, № 1 (1955), 1—13.

[2] Шевалле К., Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, Москва, 1959.

[3] Манин Ю. И., Алгебраические кривые над полями с дифференцированием, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 737—756.

[4] Cartier P., Questions de rationalité des diviseurs en Géométrie algébrique, Bull. de la Soc. Math. de France, 86 (1958), 177—251.

[5] Lang S., Serre J. P., Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques, Am. Journ. of Math., 79, № 2 (1957), 319—330.

[6] Abhyankar Sh., Coverings of algebraic curves, Am. Journ. of Math., 79, № 4 (1957), 825—856.

[7] Манин Ю. И., О модулях поля алгебраических функций, Доклады Ак. наук СССР, 125 (1959), 488—491.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 797—808

Е. С. ЛЯПИН

СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УПОРЯДОЧЕННОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В некоторой совокупности непрерывных вещественных функций одного переменного, рассматриваемой как упорядоченная полугруппа, выявляются совокупности соотношений предшествования, полностью определяющие упорядоченность в этой полугруппе.

§ 1. Упорядоченная полугруппа непрерывных функций $\mathfrak{N}$

1.1. В настоящей работе изучается совокупность $\mathfrak{N}$ некоторых непрерывных вещественных функций одного переменного. В этой совокупности рассматриваются действие суперпозиции (т. е. взятие функции от функции) и отношение упорядоченности (частичной упорядоченности, по более распространенной терминологии), определяемое тем, что последующая функция является продолжением предшествующей. Относительно указанного действия и упорядоченности совокупность $\mathfrak{N}$ оказывается упорядоченной полугруппой и к ней применяются понятия и свойства, введенные в работе ([1]). Указанная работа предполагается известной, так что, используя имеющиеся там определения и связанные с ними простейшие свойства, мы не будем делать особых ссылок или напоминаний.

Целью наших рассуждений будет выявление всех совокупностей, определяющих упорядоченность в упомянутой упорядоченной полугруппе $\mathfrak{N}$.

1.2. В дальнейшем Ω будет обозначать совокупность всех вещественных чисел. Тем самым частичные преобразования из $\mathfrak{P}_\Omega$ будут не чем иным, как вещественными функциями одного переменного. Действие умножения в $\mathfrak{P}_\Omega$ будет действием нахождения сложной функции, т. е. действием суперпозиции функций. Условие $X \leqslant Y$ $(X, Y \in \mathfrak{P}_\Omega)$ будет означать, что $\Pi_1 X$ — область задания функции X — содержится в $\Pi_1 Y$ — области задания функции Y, причем $X\xi = Y\xi$ для всякого числа $\xi \in \Pi_1 X$.

Отметим, что для $Z \in \mathfrak{P}_\Omega$ и $\Gamma \subset \Pi_1 Z$ всегда найдется, и притом единственная, функция $X \in \mathfrak{P}_\Omega$ такая, что $X \leqslant Z$ и $\Pi_1 X = \Gamma$.

1.3. Элементы множества Ω мы будем называть как числами, так и точками. Замкнутые конечные промежутки будем называть сегментами и обозначать в виде $[a, b]$, где a и b $(a \leqslant b)$ — концы промежутка. В случае, когда $a = b$, т. е. когда сегмент состоит из одной точки, будем называть его сегментом нулевой длины. Заметим при этом, что мы не будем делать различия в обозначениях между сегментом нулевой длины и той единственной точкой, из которой он состоит.

Если некоторое множество $\Gamma \subset \Omega$ является объединением сегментов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, причем всякое число из e_i не превосходит ни одного числа

из e_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, то будем писать

$$\Gamma = e_1 \ddot{\bigcup} e_2 \ddot{\bigcup} \ldots \ddot{\bigcup} e_n.$$

Если при этом все сегменты e_i попарно не пересекаются, то будем писать

$$\Gamma = e_1 \ddot{\bigcup} e_2 \ddot{\bigcup} \ldots \ddot{\bigcup} e_n.$$

Если правый конец каждого e_i совпадает с левым концом e_{i+1}, то будем писать

$$\Gamma = e_1 \dot{\bigcup} e_2 \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} e_n.$$

1.4. Определение. Через $\mathfrak{R}$ обозначим совокупность всех таких непрерывных функций $F \in \mathfrak{P}_\Omega$, что множество $\Pi_1 F$ может быть представлено в виде объединения конечного числа сегментов, на каждом из которых функция F или постоянна или строго монотонна.

В $\mathfrak{R}$ включается и функция F, у которой $\Pi_1 E = \varnothing$.

Функции из $\mathfrak{R}$ можно было бы назвать кусочно монотонными.

1.5. Пусть $F \in \mathfrak{R}$. Нетрудно убедиться, что множество $\Pi_1 F$ может быть представлено в виде:

$$\Pi_1 F = e_1 \ddot{\bigcup} e_2 \ddot{\bigcup} \ldots \ddot{\bigcup} e_n,$$

$$e_i = e_{i1} \dot{\bigcup} e_{i2} \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} e_{is_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и e_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, s_i)$ — сегменты (некоторые из них могут иметь нулевую длину), причем на каждом e_{ij} функция F или постоянна, или строго монотонна.

Как следует из простейших свойств непрерывных функций, Fe_{ij} также является сегментом. Если его длина отлична от нуля, то F осуществляет взаимно однозначное отображение сегмента e_{ij} на сегмент Fe_{ij}.

1.6. Для функции $F \in \mathfrak{P}_\Omega$ обозначим через ΛF совокупность таких точек ξ, каждая из которых удовлетворяет одному из следующих трех условий:

1) ξ есть точка прикосновения для $\Pi_1 F$ и одновременно точка прикосновения для множества точек, не входящих в $\Pi_1 F$;

2) ξ есть точка прикосновения для множества таких точек $\lambda \in \Pi_1 F$, что $F\lambda < F\xi$, но ξ не является точкой прикосновения для таких точек $\mu \in \Pi_1 F$, что $F\mu > F\xi$;

3) ξ есть точка прикосновения для множества таких точек $\lambda \in \Pi_1 F$, что $F\lambda > F\xi$, но ξ не является точкой прикосновения для таких точек $\mu \in \Pi_1 F$, что $F\mu > F\xi$.

Отметим, что если множество $\Pi_1 F$ замкнуто, то $\Lambda F \subset \Pi_1 F$.

Из 1.5 непосредственно видно, что для $F \in \mathfrak{R}$ множество $\Pi_1 F$ ограничено и замкнуто, а множество ΛF конечно или пусто (пустота ΛF, очевидно, имеет место лишь при пустом $\Pi_1 F$).

Справедливо и обратное утверждение: если функция $F \in \mathfrak{P}_\Omega$ непрерывна, причем $\Pi_1 F$ ограничено и замкнуто, а ΛF конечно или пусто, то $F \in \mathfrak{R}$.

Действительно, если ΛF пусто, то, очевидно, и $\Pi_1 F$ пусто.

Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r$ — все точки, составляющие ΛF. В силу ограниченности $\Pi_1 F$, имеем:

$$\Pi_1 F \subset [\mu_1, \mu_r].$$

Поскольку функция F непрерывна, а $\Pi_1 F$ замкнуто, все μ_i принадлежат к $\Pi_1 F$. Легко видеть, что каждый сегмент $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ или не имеет внутренних точек, принадлежащих к $\Pi_1 F$, или же целиком содержится в $\Pi_1 F$. В последнем случае, в силу непрерывности функции F, она на $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ или постоянна или строго монотонна. Таким образом, $F \in \mathfrak{R}$.

1.7. ТЕОРЕМА. *Множество* $\mathfrak{R}$ *относительно действия и упорядоченности, определенных в* п. 1.2, *является упорядоченной полугруппой.*

Доказательство. Пусть $F, H \in \mathfrak{R}$. Для F и H, как элементов $\mathfrak{P}_\Omega$, определено их произведение

$$G = FH \in \mathfrak{P}_\Omega.$$

Покажем, что $G \in \mathfrak{R}$. Случай, когда множество $\Pi_1 G$ конечно или пусто, тривиален, и его можно не рассматривать.

Пусть некоторая последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$, принадлежащих $\Pi_1 G$, сходится к точке ν. Согласно правилу умножения в $\mathfrak{P}_\Omega$, отсюда следует, что точки ξ_i все принадлежат $\Pi_1 H$. Так как $H \in \mathfrak{R}$, то точка ν должна принадлежать $\Pi_1 H$, а последовательность $H\xi_1, H\xi_2, \ldots$ должна сходиться к $H\nu$. Поскольку $\xi_i \in \Pi_1 (FH)$, точки $H\xi_i$ должны все принадлежать $\Pi_1 F$. Так как $F \in \mathfrak{R}$, то $H\nu \in \Pi_1 F$, и последовательность $F(H\xi_1)$, $F(H\xi_2)$, ... сходится к $F(H\nu)$. Но это и означает, что множество $\Pi_1 G$ замкнуто и функция G непрерывна. Ограниченность $\Pi_1 G$ вытекает из того, что $\Pi_1 G \subset \Pi_1 H$. Сделав предположение о бесконечности множества ΛG, покажем, что это приведет нас к противоречию.

Из ограниченности $\Pi_1 G$ следует, что ΛG обладает предельной точкой η. Так как $H \in \mathfrak{R}$, то найдется такое число $\lambda \neq \eta$, что внутри сегмента с концами в λ и в η имеется бесконечно много точек из ΛG, но нет точек, принадлежащих ΛH. Для определенности предположим, что $\lambda < \eta$. Так как внутри $[\lambda, \eta]$ есть точки из $\Pi_1 H$ (в силу того, что $\Lambda G \subset \Pi_1 H$), но нет точек, принадлежащих ΛH, то $[\lambda, \eta] \subset \Pi_1 H$. Функция H на $[\lambda, \eta]$ должна быть или строго монотонна, или постоянна.

Рассмотрим случай, когда H строго возрастает на $[\lambda, \eta]$ (случай убывания вполне аналогичен). Внутри сегмента $H[\lambda, \eta] = [H\lambda, H\eta]$, имеющего ненулевую длину, найдется такое число $H\mu$ $(\lambda < \mu < \eta)$, что внутри $[H\mu, H\eta]$ ни одно число не принадлежит к ΛF. Так как внутри $[H\mu, H\eta]$ имеются точки, принадлежащие $\Pi_1 F$ (например, $H\xi$ для всякого $\xi \in \Lambda G$, $\mu < \xi < \eta$), но нет точек, принадлежащих ΛF, то $[H\mu, H\eta] \subset \Pi_1 F$. При этом функция F на $[H\mu, H\eta]$ строго монотонна или постоянна. Отсюда следует, что $[\mu, \eta] \subset \Pi_1 G$ и функция G на $[\mu, \eta]$ строго монотонна или постоянна. Но это, очевидно, несовместно с тем, что внутри $[\mu, \eta]$ должны иметься точки, принадлежащие ΛG.

Теперь рассмотрим случай, когда функция H постоянна на $[\lambda, \eta]$. Так как $\eta \in \Pi_1 G$, то и $[\lambda, \eta] \subset \Pi_1 G$. Возьмем некоторую точку ξ из ΛG, содержащуюся внутри сегмента $[\lambda, \eta]$, и такое число $\delta > 0$, что

$[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [\lambda, \eta]$. То, что сегмент $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ принадлежит множеству $\Pi_1 G$ и функция G, очевидно, постоянна на этом сегменте, противоречит тому, что $\xi \in \Lambda G$. В силу 1.6, мы можем заключить, что $G \in \mathfrak{R}$.

Так как $\mathfrak{R}$ есть подмножество упорядоченной полугруппы $\mathfrak{P}_\Omega$, то $\mathfrak{R}$, очевидно, удовлетворяет и остальным условиям определения упорядоченной полугруппы.

§ 2. Функции, осуществляющие взаимно однозначные отображения

2.1. Для решения задачи, поставленной в п. 1.1, нам потребуются свойства некоторых функций из $\mathfrak{R}$, которые постоянно будут использоваться в дальнейших построениях.

Определение. Будем обозначать через $\mathfrak{S}$ совокупность всех таких функций $G \in \mathfrak{R}$, которые осуществляют взаимно однозначное отображение $\Pi_1 G$ на $\Pi_2 G$.

Если $G \in \mathfrak{S}$, то через $\overline{G}$ всегда будет обозначаться такая функция, что

$$\Pi_1 \overline{G} = \Pi_2 G,$$

$$\Pi_2 \overline{G} = \Pi_1 G,$$

$$\overline{G}\alpha = \beta, \text{ если } G\beta = \alpha$$

$$(\alpha \in \Pi_2 \overline{G}, \ \beta \in \Pi_1 G).$$

2.2. Рассмотрим некоторые свойства множества $\mathfrak{S}$.

$\mathfrak{S}$ есть подполугруппа упорядоченной полугруппы $\mathfrak{R}$. При этом из $X \leqslant G$, $G \in \mathfrak{S}$, всегда следует $X \in \mathfrak{S}$ (условие выпуклости). Если $G \in \mathfrak{S}$, то и $\overline{G} \in \mathfrak{S}$.

Действительно, вполне очевидно, что из $G_1, G_2 \in \mathfrak{S}$ следует $G_1 G_2 \in \mathfrak{S}$. Непосредственно ясна справедливость и остальных утверждений.

2.3. Если $G \in \mathfrak{S}$ и $[a, b] \subset \Pi_1 G$, то, как следует из простейших свойств непрерывных функций, функция G должна быть строго монотонной на $[a, b]$.

2.4. Пусть для $F \in \mathfrak{R}$

$$\Pi_1 F = e_1 \dot{\bigcup} e_2 \dot{\bigcup} \ldots \dot{\bigcup} e_n.$$

Если $F \in \mathfrak{S}$, то, в силу 2.3, выполняются следующие свойства функции F:

(α) Функция F на каждом из сегментов e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ строго монотонна.

(β) Сегменты $Ge_1, Ge_2, \ldots, Ge_n$ попарно не имеют общих точек.

Очевидно и обратное: если F обладает свойствами (α) и (β), то $F \in \mathfrak{S}$.

2.5. Пусть даны два сегмента $[a, b]$ и $[c, d]$, которые одновременно имеют или ненулевые, или нулевые длины. Легко построить такую функцию $F \in \mathfrak{S}$, для которой

$$\Pi_1 F = [a, b],$$

$$\Pi_2 F = [c, d].$$

При этом обязательно будут иметь место или равенства

$$Fa = c, \quad Fb = d,$$

или

$$Fa = d, \quad Fb = c.$$

Выбором F можно осуществить каждый из этих двух вариантов.

2.6. Пусть дано множество

$$\Gamma = e_1 \dddot{\bigcup} e_2 \dddot{\bigcup} \ldots \dddot{\bigcup} e_n$$

и некоторые сегменты $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, и пусть при этом выполнены условия:

(1) e'_i может иметь нулевую длину только в том случае, когда e_i имеет нулевую длину;

(2) если правый конец e_i совпадает с левым концом e_{i+1}, то и сегменты e'_i и e'_{i+1} должны иметь один общий конец ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Тогда, используя 2.5, легко построить такую функцию $F \in \mathfrak{S}$, что

$$\Pi_1 F = \Gamma,$$

$$Fe_i \subset e'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $Fe_i \neq e'_i$ только в том случае, когда длина e_i равна нулю, а длина e'_i отлична от нуля.

2.7. Пусть дано множество

$$\Gamma = e_1 \ddot{\bigcup} e_2 \ddot{\bigcup} \ldots \ddot{\bigcup} e_n \subset \Omega.$$

Обозначим через I_Γ функцию, осуществляющую частично тождественное преобразование:

$$\Pi_1 I_\Gamma = \Pi_2 I_\Gamma = \Gamma,$$

$$I_\Gamma \xi = \xi \quad (\xi \in \Gamma).$$

Очевидно, $I_\Gamma \in \mathfrak{S}$ и $\bar{I}_\Gamma = I_\Gamma$.

2.8. Пусть F, $I_\Gamma \in \mathfrak{R}$ и $FI_\Gamma = H$. Тогда

$$H \leqslant F, \quad \Pi_1 H = \Gamma \bigcap \Pi_1 F.$$

Действительно, числа, не принадлежащие $\Gamma \bigcap \Pi_1 F$, очевидно, не содержатся в $\Pi_1 (FI_\Gamma)$, тогда как для числа ξ из этого множества имеем

$$FI_\Gamma \xi = F\xi.$$

2.9. Пусть F, $I_\Gamma \in \mathfrak{S}$. Тогда

$$\bar{F} I_\Gamma F = I_\Sigma,$$

где Σ состоит из таких $\xi \in \Pi_1 F$, что $F\xi \in \Gamma$.

Действительно, если $\xi \in \Sigma$, то, очевидно,

$$\bar{F} I_\Gamma F \xi = \bar{F} F \xi = \xi.$$

Если же $\xi \bar{\in} \Pi_1 F$ или $\xi \in \Pi_1 F$, но $F\xi \bar{\in} \Gamma = \Pi_1 I_\Gamma$, то $\xi \bar{\in} \Pi_1 \bar{F} I_\Gamma F$.

2.10. Пусть $F_1, F_2 \in \mathfrak{R}$ и $M = \Pi_1 F_1 \bigcap \Pi_2 F_2$; тогда из 2.8 непосредственно вытекает, что

$$F_1 F_2 = F_1 I_M F_2.$$

2.11. Для всякого $F \in \mathfrak{S}$ очевидно имеют место равенства:

$$F\overline{F}F = F, \quad \overline{F}F\overline{F} = \overline{F}.$$

2.12. Если $\widetilde{F} \leqslant F$ и $F \in \mathfrak{S}$, то, как легко убедиться,

$$F\overline{F}\widetilde{F} = \widetilde{F}, \quad \widetilde{F}\overline{F}F = \widetilde{F}.$$

2.13. Пусть для $\widetilde{F}, F, \widetilde{H}, H \in \mathfrak{R}$, где $F \in \mathfrak{S}$, имеют место соотношения:

$$\widetilde{F} \leqslant F, \quad \widetilde{H} \leqslant H,$$

причем первое из них является непосредственным следствием второго. Тогда найдутся такие $U, V \in \mathfrak{S}$, что

$$\widetilde{F} = U\widetilde{H}V,$$
$$F = UHV,$$
$$\Pi_1 V = \Pi_1 F, \quad \Pi_2 U = \Pi_2 F.$$

Действительно, по определению непосредственного следствия, найдутся $U', V' \in \mathfrak{R}$ такие, что

$$\widetilde{F} = U'\widetilde{H}V', \quad F = U'HV'.$$

Умножив эти равенства слева на $F\overline{F}$ и справа на $\overline{F}F$, мы, в силу 2.11 и 2.12, получим:

$$\widetilde{F} = (F\overline{F}U')\,\widetilde{H}\,(V'\overline{F}F),$$

$$F = (F\overline{F}U')\,H\,(V'\overline{F}F).$$

Так как F есть правый делитель $(V'\overline{F}F)$, а этот последний является правым делителем F, то

$$\Pi_1 (V'\overline{F}F) = \Pi_1 F.$$

Пусть для некоторых $\xi_1, \xi_2 \in \Pi_1 F$

$$(V'\overline{F}F)\,\xi_1 = (V'\overline{F}F)\,\xi_2.$$

Тогда из полученных выше равенств вытекает:

$$F\xi_1 = F\xi_2,$$

что, в силу $F \in \mathfrak{S}$, возможно лишь при $\xi_1 = \xi_2$. Следовательно, $(V'\overline{F}F) \in \mathfrak{S}$.

Положим

$$V = V'\overline{F}F,$$

$$M = \Pi_2 (HV) \cap \Pi_1 U',$$

$$U = (F\overline{F}U')\, I_M,$$

и пусть для некоторых $\eta_1, \eta_2 \in \Pi_1 U$ имеет место равенство $U\eta_1 = U\eta_2$. Так как $\eta_i \in \Pi_1 U \subset \Pi_1 I_M = M$, то при некоторых $\lambda_i \in \Pi_1 HV$ имеем:

$$\eta_i = HV\lambda_i.$$

Но $\lambda_i \in \Pi_1 F$ и

$$F\lambda_1 = U(HV\lambda_1) = U\eta_1 = U\eta_2 = U(HV\lambda_2) = F\lambda_2.$$

Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$ и потому $U \in \mathfrak{S}$.

Учитывая 2.10, из предшествующих равенств выводим:

$$\widetilde{F} = U\widetilde{H}V, \quad F = UHV,$$

где U и V обладают всеми требуемыми свойствами.

§ 3. Совокупности, определяющие упорядоченность в $\mathfrak{R}$

3.1. Определение. Будем говорить, что соотношение предшествования $\widetilde{F} \leqslant F$ в $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию 3.1, если найдутся такие вещественные числа $a < b < c < d$, что:

(1) $[a, d] \subset \Pi_1 F$,

(2) F строго монотонна в $[a, d]$,

(3) $[a, b] \subset \Pi_1 \widetilde{F}$, $[c, d] \subset \Pi_1 \widetilde{F}$,

(4) множество $[b, c] \cap \Pi_1 \widetilde{F}$ состоит из конечного числа точек.

3.2. Особо выделим следующее соотношение упорядоченности, очевидно удовлетворяющее условию 3.1:

$$I_{[0,1]\cup[2,3]} \leqslant I_{[0,3]}.$$

3.3. ЛЕММА. *Произвольное соотношение предшествования $\widetilde{H} \leqslant H$ в $\mathfrak{R}$ является следствием соотношения* 3.2.

Доказательство. 1) Сперва рассмотрим два случая тривиального соотношения.

Если $\widetilde{H} = H$, то это соотношение, по определению, является непосредственным следствием из всякого соотношения.

Если $\Pi_1 \widetilde{H} = \varnothing$ и $\Pi_1 H \neq \varnothing$, то строим функцию $G_1 \in \mathfrak{R}$ такую, что

$$\Pi_1 G_1 = \Pi_1 H,$$

$$\Pi_2 G_1 \subset \left[\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right].$$

Согласно 2.9, имеем:

$$\overline{G}_1 I_{[0,3]} G_1 = I_{\Pi_1 H}, \quad \overline{G}_1 I_{[0,1]\cup[2,3]} G_1 = I_{\Pi_1 \widetilde{H}} = \widetilde{H}.$$

Поэтому

$$(H\overline{G}_1)\, I_{[0,3]} G_1 = H,$$

$$(H\overline{G}_1)\, I_{[0,1]\cup[2,3]}\, G_1 = \widetilde{H}.$$

Следовательно, соотношение $\widetilde{H} \leqslant H$ является непосредственным следствием соотношения 3.2.

2) В дальнейших рассуждениях доказательства соотношение $\widetilde{H} \leqslant H$ будет всегда обозначать нетривиальное соотношение, отличное от соотношений двух видов, рассмотренных в предыдущем пункте. Рассмотрим

$$\Pi_1 \widetilde{H} = e_1 \dot{\cup} e_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} e_n,$$

$$e_i = [a_i, b_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Фиксируем некоторое исло $a = b_0$ такое, что a_0 меньше всех чисел из $\Pi_1 H_1$ и число b_{n+2}, которое бвльше всех чисел из $\Pi_1 H$. Определим

$H_k \in \mathfrak{R}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, где $H_k \leqslant H$ и

$$\Pi_1 H_k = \{\Pi_1 H \cap [a_0, b_k]\} \ddot{\cup} e_{k+1} \ddot{\cup} e_{k+2} \ddot{\cup} \ldots \ddot{\cup} e_n.$$

Так как $a_0 \overline{\in} \Pi_1 H$, то $\Pi_1 H_0 = \Pi_1 \widetilde{H}$ и потому из $H_0 \leqslant \widetilde{H}$ и $\widetilde{H} \leqslant H$ следует, что $H_0 = \widetilde{H}$.

Так как $e_i \subset [a_0, b_k]$ при $i \leqslant k$ и $e_i \subset \Pi_1 \widetilde{H} \subset \Pi_1 H$, то

$$\Pi_1 H_i \subset \Pi_1 H_k.$$

Поэтому имеют место следующие соотношения:

$$H_0 \leqslant H_1, \ H_1 \leqslant H_2, \ldots, \ H_{n-1} \leqslant H_n, H_n \leqslant H,$$

и для завершения доказательства достаточно показать, что каждое из них является следствием соотношения 3.2.

3) На основании 2.6 можно построить функцию $G_2 \in \mathfrak{G}$ такую, что

$$\Pi_1 G_2 = \Pi_1 H_{k+1},$$
$$G_2 (\Pi_1 H \cap [a_0, b_k]) \subset [0, 1],$$
$$G_2 (\Pi_1 H \cap [b_k, a_{k+1}]) \subset [1, 2],$$
$$G_2 [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset \left[2, \frac{5}{2}\right],$$
$$C_2([e_{k+2}, \ddot{\cup} \ldots \ddot{\cup} e_n]) \subset \left[\frac{5}{2}, 2\right].$$

силу 2.9,

$$\overline{G}_2 I_{[0,3]} G_2 = I_{\Pi_1 H_{k+1}},$$
$$\overline{G}_2 I_{[0,1] \cup [2,3]} G_2 = I_{\Pi_1 H_k}.$$

Так как $H_k \leqslant H_{k+1}$, то отсюда вытекает:

$$(H_{k+1} \overline{G}_2)\, I_{[0,3]} G_2 = H_{k+1},$$
$$(H_{k+1} \overline{G}_2)\, I_{[0,1] \cup [2,3]} G_2 = H_k.$$

Следовательно, соотношение

$$H_k \leqslant H_{k+1}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$$

является непосредственным следствием соотношения 3.2.

4) Наконец, особо рассмотрим соотношение $H_n \leqslant H$. В силу 2.6, можно построить функцию $G_3 \in \mathfrak{G}$ такую, что

$$\Pi_1 G_3 = [a_0, b_{n+1}],$$
$$G_3 [a_0, b_n] = [0, 1],$$
$$G_3 [b_n, b_{n+1}] = \left[1, \frac{3}{2}\right].$$

Согласно 2.9,

$$\overline{G}_3 I_{[0,3]} G_3 = I_{[a_0, b_{n+1}]},$$
$$\overline{G}_3 I_{[0,1] \cup [2,3]} \overline{G}_3 = I_{[a_0, b_n]}.$$

Так как

$$\Pi_1 H_n = \Pi_1 H \cap [a_0, b_n],$$

то отсюда получаем:

$$(H\overline{G}_3)I_{[0,3]}\, G_3 = H,$$
$$(\overline{H}G_3)\, I_{[0,1]\cup[2,3]}G_3 = H_n.$$

Таким образом, соотношение $H_n \leqslant H$ является непосредственным следствием соотношения 3.2.

3.4. ТЕОРЕМА. *Совокупность, состоящая из одного произвольного соотношения предшествования, удовлетворяющего условию* 3.1, *является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в* $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Пусть для соотношения $\widetilde{F} \leqslant F$ существует сегмент $[a, d]$ рассмотренного в 3.1 типа.

Множество $[b, c]\cap \Pi_1\widetilde{F}$ состоит из чисел $b = \mu_1 < \mu_2 <\ldots<\mu_s = c$. Обозначим через ε наименьшее из чисел $(\mu_{i+1} - \mu_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$. Введем в рассмотрение функции H, $\widetilde{H} \in \mathfrak{R}$, такие, что $H \leqslant F$, $\widetilde{H} \leqslant F$ и

$$\Pi_1 H = [a, d],$$

$$\widetilde{\Pi}_1 H = [a, b]\cup [c, d].$$

Так как H и $\widetilde{H}$ предшествуют F, а F строго монотонна на $[a, b]$, то H, $\widetilde{H} \in \mathfrak{S}$.

Построим функцию $G_1 \in \mathfrak{S}$ такую, что

$$\Pi_1 G_1 = \Pi_2 G_1 = [a, d],$$

$$G_1\xi = \xi \text{ для } \xi \in [a, b]\cup [c, d],$$

$$G_1\mu_i = \mu_i + \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 2, 3, \ldots, s-1).$$

В силу того, что $\widetilde{H}$ предшествует H и $\widetilde{F}$ и

$$\Pi_1 G_1 = \Pi_2 G_1 = [a, d], \qquad \Pi_1 H = \Pi_1 F\cap [a, d],$$

$$[a, d]\cap \widetilde{\Pi}_1 F = \widetilde{\Pi}_1 H\cup\{\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{s-1}\},$$

$$\mu_i + \frac{\varepsilon}{2}\,\overline{\in}\, \Pi_1\widetilde{F} \quad (i = 2, 3, \ldots, s-1),$$

имеем:

$$FG_1 = HG_1, \quad \widetilde{F}G_1 = \widetilde{H},$$
$$\overline{H}\widetilde{H} = \overline{\widetilde{H}}\widetilde{H} = I_{\Pi_1\widetilde{H}}.$$

Отсюда вытекает:

$$H\overline{G}_1\overline{H}FG_1 = H\overline{G}_1\overline{H}HG_1 = HI_{[a,d]} = H,$$

$$H\overline{G}_1\overline{H}\widetilde{F}G_1 = H\overline{G}_1\overline{H}\widetilde{H} = H\overline{G}_1 I_{\Pi_1\widetilde{H}} = \widetilde{H}.$$

Следовательно, соотношение $\widetilde{H} \leqslant H$ является следствием соотношения $\widetilde{F} \leqslant F$.

Построим функцию $G_2 \in \mathfrak{S}$ такую, что

$$\Pi_1 G_2 = [0, 3],$$

$$G_2\, [0, 1] = [a, b],$$

$$G_2\,[1, 2] = [b, c],$$

$$G_2\,[2, 3] = [c, d].$$

Так как

$$G_2\overline{H}HG_2 = I_{[0,3]},$$

$$\overline{G}_2\overline{H}\widetilde{H}G_2 = \overline{G}_2 I_{\Pi_1 \widetilde{H}} G_2 = \overline{G}_2 I_{[a,b]\cup[c,d]} G_2 = I_{[0,1]\cup[2,3]},$$

то соотношение 3.2 оказывается следствием соотношения $\widetilde{H} \leqslant H$, а потому и следствием соотношения $\widetilde{F} \leqslant F$. Но, согласно лемме 3.3, всякое соотношение предшествования в $\mathfrak{R}$ является следствием соотношения 3.2. Отсюда следует, что всякое соотношение предшествования в $\mathfrak{R}$ является следствием соотношения $\widetilde{F} \leqslant F$. Поэтому это последнее образует совокупность, определяющую упорядоченность в $\mathfrak{R}$. Эта совокупность минимальна, поскольку упорядоченность в $\mathfrak{R}$ нетривиальна.

3.5. ТЕОРЕМА. *Пусть Ф — совокупность, определяющая упорядоченность в $\mathfrak{R}$. Тогда среди соотношений, принадлежащих Ф, найдется соотношение предшествования, удовлетворяющее условию* 3.1.

Доказательство. Так как соотношение 3.2 является следствием из Ф, то в $\mathfrak{R}$ найдутся такие попарно различные функции:

$$H_0 = I_{[0,1]\cup[2,3]} \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_{m-1} \leqslant H_m = I_{[0,3]},$$

что каждое соотношение

$$H_i \leqslant H_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

является непосредственным следствием из Ф.

Рассмотрим последнее из этих соотношений. Обозначим $\Pi_1 H_{m-1} = \Gamma$. Имеем:

$$\Gamma \subset [0, 3],$$

$$\Gamma \neq [0, 3].$$

Упомянутое соотношение имеет вид:

$$I_\Gamma \leqslant I_{[0,3]}.$$

Так как оно должно быть непосредственным следствием из Ф, то при некоторых $U, V, F, \widetilde{F} \in \mathfrak{R}$ должны выполняться равенства:

$$U\widetilde{F}V = I_\Gamma,$$

$$UFV = I_{[0,3]},$$

причем соотношение $\widetilde{F} \leqslant F$ входит в совокупность Ф.

В силу того, что $I_{[0,3]} \in \mathfrak{S}$, согласно 2.13 можно считать, что $V \in \mathfrak{S}$ и $\Pi_1 V = [0, 3]$.

Так как $I_\Gamma = H_{m-1} \geqslant H_0$, то

$$\Gamma \supset [0, 1] \cup [2, 3].$$

Следовательно,

$$\Gamma = e_1 \ddot{\cup} e_2 \ddot{\cup} \ldots \ddot{\cup} e_n,$$

$$e_1 \supset [0, 1], \quad e_n \supset [2, 3].$$

Обозначим через e_k последний из сегментов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$, имеющих ненулевую длину. Таким образом, $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}$ суть отдельные точки (возможно $k = n - 1$ и таких точек нет).

Обозначим, далее,

$$e_k = [\alpha, \beta], \quad e_n = [\gamma, 3].$$

Так как $V \in \mathfrak{S}$, то функция V строго монотонна. Будем считать, что V — возрастающая функция (для убывающей функции рассуждения аналогичны).

Имеем:

$$V\alpha < V\beta < Ve_{k+1} < Ve_{k+2} < \ldots < Ve_{n-1} < V\gamma < V3.$$

Так как

$$[\alpha, 3] \subset \Pi_1 I_{[0,3]} = \Pi_1 UFV,$$

то $[V\alpha, V3] \subset \Pi_1 F$, а так как функция $I_{[0,3]}$ строго монотонна, то и функция F на $[V\alpha, V3]$ должна быть строго монотонной.

В силу того, что

$$e_k, e_n \subset \Pi_1 I_\Gamma = \Pi_1 U\widetilde{F}V,$$

получаем:

$$[V\alpha, V\beta], \ [V\gamma, V3] \subset \Pi_1 \widetilde{F}.$$

Мы обнаружили, что вещественные числа $V\alpha < V\beta < V\gamma < V3$, для соотношения $\widetilde{F} \leqslant F$, обладают свойствами (1), (2), (3) определения 3.1. Покажем, что выполнено и условие (4), а так как соотношение $\widetilde{F} \leqslant F$ принадлежит Φ, то это завершит доказательство теоремы.

Пусть ξ — некоторая точка из сегмента $[V\beta, V\gamma]$, отличная от точек $V\beta, Ve_{k+1}, Ve_{k+2}, \ldots, Ve_{n-1}, V\gamma$. Предположив, что $\xi \in \Pi_1 \widetilde{F}$, покажем, что это приведет к противоречию.

Так как $V[\beta, \gamma] = [V\beta, V\gamma]$, то для некоторого λ, где $\beta < \lambda < \gamma$, имеет место равенство $V\lambda = \xi$. При этом λ отлично от $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}$. Далее, так как

$$\lambda \in [0,3] = \Pi_1 I_{[0,3]} = \Pi_1 UFV,$$

то

$$\widetilde{F}(\xi) = \widetilde{F}(V\lambda) = F(V\lambda) \subset \Pi_1 U.$$

Следовательно,

$$\lambda \in \Pi_1 U\widetilde{F}V = \Pi_1 I_\Gamma,$$

т. е. $\lambda \in \Gamma$, что противоречит соотношению:

$$\Gamma \cap [\beta, \gamma] = \{\beta, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}, \gamma\}, \quad \beta < \lambda < \gamma.$$

3.6. Теоремы 3.4 и 3.5, очевидно, полностью решают поставленную перед нами задачу. Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие. *Совокупность Φ соотношений предшествования в полугруппе непрерывных функций $\mathfrak{R}$ является совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{R}$, тогда и только тогда, когда Φ содержит некоторую минимальную совокупность, определяющую упорядоченность в $\mathfrak{R}$.*

Совокупность Ф является минимальной совокупностью, определяющей упорядоченность в $\mathfrak{R}$, тогда и только тогда, когда Ф состоит из одного соотношения, удовлетворяющего условию 3.1.

Поступило
8. II. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченных полугруппах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 25 (1961), 671—684.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 809–814

Л. М. ГЛУСКИН

ПОЛУГРУППЫ И КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. II *

В работе минимальные идеалы полугрупп полулинейных преобразований рассматриваются как вполне простые полугруппы. Дается характеристика линейного пространства с помощью полугрупп его полулинейных преобразований и находятся все изоморфизмы этих полугрупп.

§ 7. Полугруппы полулинейных преобразований

7.1. Пусть $A = (F, A)$ — линейное пространство над телом F, ψ—автоморфизм тела F. Преобразование (отображение в себя) $a = a_\psi$ пространства A называется *полулинейным*, если

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in A}\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,a = \mathbf{x}a + \mathbf{y}a\ {}^{**},\qquad \forall_{\mathbf{x}\in A,\lambda\in F}\,(\lambda\mathbf{x})\,a = (\lambda\psi)\,\mathbf{x}a.$$

Множество $S'(F, A)$ всех полулинейных преобразований пространства A (при всевозможных автоморфизмах ψ) является, как легко проверить, полугруппой относительно суперпозиции преобразований.

Каждому полулинейному преобразованию $c = c_\psi \in S'(F, A)$ соответствует единственное сопряженное ему полулинейное преобразование c^* пространства A^* (см. 1.7), определенное, как в п. 1.10, и удовлетворяющее условию:

$$\forall_{\mathbf{x}\in A, f\in A^*}\,[\mathbf{x}c, f] = [\mathbf{x}, fc^*]. \tag{1}$$

Пусть A_1^* — t-подпространство пространства A^* (см. 2.3). Через $S'(F, A, A_1^*)$ обозначим подполугруппу $S'(F, A)$, состоящую из всех $c \in S'(F, A)$, для которых $A_1^* c^* \subseteq A_1^*$ (см. 2.10). Если $A_1^* = A^*$, то

$$S'(F, A, A_1^*) = S'(F, A).$$

7.2. Пусть $\mathfrak{M}F$ — мультипликативная полугруппа тела F, Ψ — группа всех автоморфизмов тела F. Обозначим через $\langle F\rangle$ множество всех пар $\langle\psi, \lambda\rangle$, где $\psi \in \Psi$, $\lambda \in F$. Все пары $\langle\psi, 0\rangle$, где 0 — нуль F, будем считать равными между собой.

Определим в $\langle F\rangle$ следующее действие:

$$\forall_{\psi_i\in\Psi,\lambda_i\in F}\ \langle\psi_1, \lambda_1\rangle\langle\psi_2, \lambda_2\rangle = \langle\psi_1\psi_2, \lambda_1\psi_2\cdot\lambda_2\rangle. \tag{2}$$

---

* Настоящая статья является продолжением работы (1). Ссылки на эту работу даны непосредственно на соответствующие ее параграфы. Например, 2.8 означает: «§ 2 статьи (1), п. 2.8». Терминология и обозначения сохранены такими же, как в работе (1), за исключением определения полулинейных преобразований (см. п. п. 7.1, 7.4).

** Через $\forall$ обозначен ограниченный квантор всеобщности. $\forall_{\Pi(a)}$ обозначает: «при всяком a, удовлетворяющем функции-высказыванию $\Pi(a)$».

Относительно этого действия, как легко проверить, $\langle F\rangle$ является группой с внешне присоединенным нулем (см. 1.2). Нулем $\langle F\rangle$ является пара $\langle 1, 0\rangle$, единицей — пара $\langle 1, 1\rangle$ (единицу тела F и тождественный автоморфизм тела F мы обозначаем одинаково через 1). Подполугруппа $\langle F\rangle$, состоящая из всех пар вида $\langle 1, \lambda\rangle$, изоморфна полугруппе $\mathfrak{M}F$, а подполугруппа, состоящая из всех пар $\langle\psi, 1\rangle$, изоморфна группе Ψ.

7.3. Обозначим через $S'_\nu(F, A)$ подмножество полугруппы $S'(F, A)$ (см. 7.1), состоящее из всех преобразований $a \in S'(F, A)$, для которых $r(Aa) < \nu$. Как и в п. 2.9, можно показать, что все множества $S'_\nu(F, A)$, и только они, являются двусторонними идеалами полугруппы $S'(F, A)$.

ТЕОРЕМА. *Полугруппа* $S'_2(F, A)$ *изоморфна вполне простой полугруппе* $S\{\langle F\rangle, I_A, \Lambda_A, [\mathbf{e}_\varkappa, f_i]$ (см. 1.3, 2.2, 7.2).

Доказательство. Применим тот же метод доказательства, что и в п. 2.2. Пусть $\mathbf{e}_\varkappa$, f_i, $a_{\varkappa\lambda}$ имеют тот же смысл, что в п. 2.2, $a = a_\psi$ — полулинейное преобразование A в $A_\varkappa$. Тогда для любого $\mathbf{x} \in A$ имеем: $\mathbf{x}a = f(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_\varkappa$. Обозначим через a' следующее преобразование пространства A:

$$\forall_{x\in A}\mathbf{x}a' = \{f(\mathbf{x})\}\,\psi^{-1}\cdot\mathbf{e}_\varkappa.$$

В силу 7.1, a' является линейным преобразованием пространства A в $A_\varkappa$. Из 2.2 вытекает, что $\{f(\mathbf{x})\}\,\psi^{-1}$ является линейной формой над A:

$$\{f(\mathbf{x})\}\,\psi^{-1} = [\mathbf{x}, f_i]\cdot\alpha'.$$

Следовательно,

$$f(\mathbf{x}) = \{[\mathbf{x}, f_i]\cdot\alpha'\}\,\psi = [\mathbf{x}, f_i]\,\psi\cdot\alpha'\psi = [\mathbf{x}, f_i]\,\psi\cdot\alpha \quad (\alpha \in F)$$

и, значит,

$$\forall_{\mathbf{x}\in A}\mathbf{x}a = [\mathbf{x}, f_i]\,\psi\cdot\alpha\cdot\mathbf{e}_\varkappa. \tag{3}$$

Обратно, при любых $\alpha \in F$, $\psi \in \Psi$, $i \in I_A$, $\varkappa \in \Lambda_A$ равенство (3) определяет a как полулинейное преобразование пространства A в $A_\varkappa$. Если $\alpha = 0$, то $a = 0$.

Преобразованию a, определенному формулой (3), поставим в соответствие «тройку»

$$a\theta = (\langle\psi, \alpha\rangle, i\varkappa). \tag{4}$$

Все тройки $(\langle\psi, 0\rangle, i\varkappa)$ обозначим через 0. Пусть

$$K = S(\langle F\rangle, I_A, \Lambda_A, [\mathbf{e}_\varkappa, f_i])$$

(см. 1.3, 2.2) и

$$b\theta = (\langle\psi_1, \beta\rangle, j\lambda) \in K.$$

Из (3) и 7.1 при любом $\mathbf{x} \in A$ получаем:

$$\mathbf{x}ab = (\mathbf{x}a)\,b = ([\mathbf{x}, f_i]\,\psi\cdot\alpha\cdot\mathbf{e}_\varkappa)\,b =$$
$$= [[\mathbf{x}f_i]\,\psi\cdot\alpha\cdot\mathbf{e}_\varkappa, f_j]\,\psi_1\cdot\beta\cdot\mathbf{e}_\lambda = [\mathbf{x}f_i]\,\psi\psi_1\cdot\{\alpha\,[\mathbf{e}_\varkappa f_j]\}\,\psi_1\cdot\beta\cdot\mathbf{e}_\lambda.$$

Отсюда и из (3), (4) следует:

$$(ab)\,\theta = (\langle\psi\psi_1, \{\alpha\,[e_\varkappa f_j]\}\,\psi_1\cdot\beta\rangle, i\lambda)$$

и, в силу (2), 1.3,

$$(ab)\,\theta = (\langle\psi, \alpha\rangle\,\langle 1, [e_\varkappa, f_j]\rangle\,\langle\psi_1, \beta\rangle, i\lambda) = (\langle\psi, \alpha\rangle, i\varkappa)\,(\langle\psi_1, \beta\rangle, j\lambda) = a\theta\cdot b\theta.$$

Таким образом, отображение θ является изоморфизмом $S'_2(F, A)$ на K.

7.3.1. Пусть A_1^* — t-подпространство A^*, I — такое подмножество I_A, что $IF = A_1^*$ (см. 2.7). Обозначим

$$S_2'(F, A, A_1^*) = \theta^{-1} S(\langle F \rangle, I, \Lambda_A, [\mathbf{e}_\varkappa, f_i]).$$

Из 1.3 следует, что $S_2'(F, A, A_1^*)$ является правым идеалом полугруппы $S'(F, A)$. Если $A_1^* = A^*$, то $S_2'(F, A, A_1^*) = S_2'(F, A)$.

Как и в п. п. 2.4, 2.10, можно показать, что полугруппа $S_2'(F, A, A_1^*)$ транзитивна (см. 1.9), вполне проста и что $S'(F, A, A_1^*)$ является максимальной подполугруппой $S'(F, A)$, содержащей $S_2'(F, A, A_1^*)$ в качестве двустороннего идеала.

7.4. Пусть $A = (F, A)$, Ψ — группа автоморфизмов тела F, $\psi \to \psi f = \delta_\psi$ — отображение группы Ψ в мультипликативную группу тела F, удовлетворяющее условию:

$$\forall_{\psi, \psi_1 \in \Psi}\ \delta_{\psi\psi_1} = \delta_{\psi_1} \cdot \delta_\psi \psi_1. \tag{5}$$

Отображение φ_f полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$:

$$\forall_{x_\psi \in S'(F, A, A_1^*)}\ x_\psi \varphi_f = \delta_\psi \cdot x_\psi\,^*$$

является, как легко проверить, автоморфизмом полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$. Назовем φ_f *сингулярным* автоморфизмом полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$ (по аналогии с сингулярными автоморфизмами группы всех обратимых полулинейных преобразований; см. по этому поводу ([2])).

Пусть $A = (F, A)$, $B = (H, B)$ — два линейных пространства, h — изоморфизм тела F на тело H. Взаимно однозначное отображение $a = a_h$ пространства A на пространство B называется *изоморфизмом*, если

$$\forall_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A}\ (\mathbf{x} + \mathbf{y})\, a = \mathbf{x}a + \mathbf{y}a,\quad \forall_{\mathbf{x} \in A, \lambda \in F}\ (\lambda \mathbf{x})\, a = (\lambda h) \cdot \mathbf{x}a.$$

Обычно такое отображение a называют полулинейным преобразованием. Здесь же этому термину придается несколько иной смысл (см. 7.1). Если $a = a_h$ — изоморфизм пространства A на B, то, как и в п. 1.10, через a^* обозначим однозначно определенный изоморфизм пространства A^* на B^*, удовлетворяющий условию:

$$\forall_{\mathbf{x} \in A, f \in A^*}\ [\mathbf{x}a, fa^*] = [\mathbf{x}, f]\, h. \tag{6}$$

Пусть $A = (F, A)$, $B = (H, B)$ — два линейных пространства, и пусть A_1^* — t-подпространство пространства A^* (см. 2.3), B_1^* — t-подпространство пространства B^*, a — изоморфизм F-пространства A на H-пространство B такой, что $A_1^* a^* = B_1^*$. Отображение φ_a полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$

$$\forall_{x \in S'(F, A, A_1^*)}\ x\varphi_a = a^{-1} x a$$

является, очевидно, изоморфизмом полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$ на полугруппу $S'(H, B, B_1^*)$. Говорят, что изоморфизм φ_a индуцируется изоморфизмом a (см. 3.1). Очевидно, что суперпозиция $\varphi_f \varphi_a$ изоморфизмов φ_f и φ_a является изоморфизмом полугруппы $S'(F, A, A_1^*)$ на $S'(H, B, B_1^*)$

* $\forall_{\mathbf{z} \in A}\ \mathbf{z}(\delta_\psi x_\psi) = \delta_\psi (\mathbf{z} x_\psi)$ (см. сноску к п. 3.3).

Этот изоморфизм является продолжением изоморфизма полугруппы $S_2'(F, A, A_1^*)$ на $S_2'(H, B, B_1^*)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $A = (F, A)$, $B = (H, B)$, $r(A) \geqslant 2$, A_1^*, B_1^**—t-подпространства пространств* A^* *и* B^*. *Полугруппы* $K_1 = S_2'(F, A, A_1^*)$ *и* $K_2 = S_2'(H, B, B_1^*)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм* a *пространства* A *на* B *такой, что* $A_1^* a^* = B_1^*$. *Всякий изоморфизм полугруппы* K_1 *на* K_2 *имеет вид* $\varphi_f \varphi_a$, *где* φ_f *— сингулярный автоморфизм полугруппы* K_1, *а* φ_a *— изоморфизм, индуцированный изоморфизмом* a.

Приведем некоторые следствия этой теоремы.

7.4.1. ТЕОРЕМА. *Полугруппы* $S'(F, A)$ *и* $S'(H, B)$ *при* $r(A) \geqslant 2$ *изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны пространства* A *и* B. *Всякий изоморфизм полугруппы* $S'(F, A)$ *на* $S'(H, B)$ *является произведением сингулярного автоморфизма на изоморфизм, индуцированный изоморфизмом* a (*пространства* A *на* B).

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы п. 7.4 таким же путем как в § 3. Аналогичные теоремы можно сформулировать и для полугрупп $S_\vee'(F, A)$, $S_\vee'(F, A) \cap S'(F, A, A_1^*)$ (см. 7.3, 7.1, 3.6, 3.5). Заметим, что характеристика пространства A при помощи полугрупп линейных и полулинейных преобразований, данная в пп. 3.3.2, 3.6, 7.4, 7.4.1, более полная, чем их характеристика при помощи соответствующих групп [см. (2), гл. VI].

7.4.2. ТЕОРЕМА. *Всякий автоморфизм полугруппы* $S'(F, A, A_1^*)$, *в частности полугруппы* $S'(F, A)$, *является произведением сингулярного автоморфизма на внутренний автоморфизм.*

7.4.3. Положив в (5) $\psi = \psi_1 = 1$, получим: $\delta_1 = \delta_1^2$. Так как $\psi f = \delta_\psi$ содержится в мультипликативной группе тела F, то $1f = \delta_1 = 1$.

Заметив, что всякое линейное преобразование $x \in S(F, A)$ является полулинейным при $\psi = 1$, получим из п. 7.4:

$$\forall_{x \in S(F,\, A)} x\, \varphi_f = x.$$

Таким образом, *всякий сингулярный автоморфизм полугруппы* $S'(F, A)$ *является продолжением тождественного автоморфизма полугруппы* $S(F, A)$ *всех линейных преобразований пространства* A.

Из теорем пп. 7.4.2, 3.6 вытекает следующая

ТЕОРЕМА. *Всякий автоморфизм полугруппы* $S'(F, A)$ *переводит в себя полугруппу* $S(F, A)$. *Всякий автоморфизм полугруппы* $S(F, A)$ *может быть продолжен* (*не всегда однозначно*) *до автоморфизма полугруппы* $S'(F, A)$.

Аналогичную теорему можно сформулировать и для полугрупп $S'(F, A, A_1^*)$.

7.5. Пусть F, H — два тела, Ψ, Φ — их группы автоморфизмов, g — такой изоморфизм полугруппы $\langle F \rangle$ на $\langle H \rangle$, при котором

$$\forall_{\alpha \in F \setminus 0} \langle 1, \alpha \rangle\, g = \langle 1, \alpha' \rangle \quad (\alpha' \in H),$$

$$\forall_{\alpha' \in H \setminus 0} \langle 1, \alpha' \rangle\, g^{-1} = \langle 1, \alpha \rangle \quad (\alpha \in F).$$

Обозначим $\alpha' = \alpha h$, $0h = 0$. Тогда

$$\forall_{\alpha\in F} \langle 1, \alpha\rangle g = \langle 1, \alpha h\rangle, \tag{7}$$

где h — изоморфизм полугруппы $\mathfrak{M}F$ на $\mathfrak{M}H$. Пусть, кроме того,

$$\forall_{\psi\in\Psi} \langle\psi, 1\rangle g = \langle\psi', \gamma_\psi\rangle \quad (\psi' \in \Phi, \gamma_\psi \in H\setminus 0). \tag{8}$$

Тогда из (2), (7) и (8) при любых $\alpha, \beta \in F\setminus 0, \psi \in \Psi$ имеем:

$$\langle\psi, \alpha\rangle g = \langle\psi, 1\rangle g\cdot\langle 1, \alpha\rangle g = \langle\psi', \gamma_\psi\cdot\alpha h\rangle, \tag{9}$$

$$\langle\psi', \alpha h\psi'\cdot\gamma_\psi\cdot\beta h\rangle = \langle 1, \alpha h\rangle \langle\psi', \gamma_\psi\rangle \langle 1, \beta h\rangle =$$
$$= \{\langle 1, \alpha\rangle \langle\psi, 1\rangle\} g\cdot\langle 1, \beta\rangle g = \langle\psi, \alpha\psi\rangle g\cdot\langle 1, \beta\rangle g =$$
$$= \langle\psi, 1\rangle g\cdot\langle 1, \alpha\psi\rangle g\cdot\langle 1, \beta\rangle g = \langle\psi', \gamma_\psi\rangle \langle 1, \alpha\psi h\rangle \langle 1, \beta h\rangle =$$
$$= \langle\psi', \gamma_\psi\cdot\alpha\psi h\cdot\beta h\rangle,$$

т. е.

$$\forall_{\alpha, \beta\in F\setminus 0, \psi\in\Psi}\, \alpha h\psi'\cdot\gamma_\psi\cdot\beta h = \gamma_\psi\cdot(\alpha\psi\cdot\beta)\, h. \tag{10}$$

7.6. Доказательство теоремы п. 7.4. Достаточность условий теоремы доказывается так же, как в п. 3.3. Докажем их необходимость. Пусть θ_1 и θ_2 — изоморфизмы полугрупп K_1 и K_2 на вполне простые полугруппы

$$S_1 = S(\langle F\rangle, I_1, \Lambda_A, [\mathbf{e}_\varkappa, f_i])$$

и

$$S_2 = S(\langle H\rangle, I_2, \Lambda_A, [\mathbf{e}'_{\varkappa'}, f'_{i'}]),$$

где $I_1F = A_1^*$, $I_2H = B_1^*$. Если φ — произвольный изоморфизм полугруппы K_1 на K_2, то отображение $\varphi_1 = \theta_1^{-1}\varphi\theta_2$ является изоморфизмом полугруппы S_1 на S_2. Вследствие 1.3 и замечания п. 2.2 (остающегося в силе для полугрупп полулинейных преобразований), можно считать, что φ_1 имеет вид

$$\varphi_1(\langle\psi, \alpha\rangle, i\lambda) = (\langle\psi, \alpha\rangle g, i'\lambda'), \tag{11}$$

где g — изоморфизм $\langle F\rangle$ на $\langle H\rangle$, а $i \to i'$, $\lambda \to \lambda'$ — взаимно однозначные отображения I_1 на I_2 и Λ_A на Λ_B, причем для любых i, λ

$$\langle 1, [\mathbf{e}'_{\lambda'}, f'_{i'}]\rangle = \langle 1, [\mathbf{e}_\lambda, f_i]\rangle g. \tag{12}$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — любые линейно независимые точки из A (по условию, $r(A) \geqslant 2$). Так как A_1^* является, по условию, t-подпространством A^*, то, по лемме 2.3, существует такая форма $f_1 \in A_1^*$, что

$$[\mathbf{e}_1, f_1] = 1, \quad [\mathbf{e}_2, f_1] = 0.$$

По определению форм f_i (см. 2.2), в качестве одной из таких форм можно выбрать $f_i = f_1$. Во всех одномерных подпространствах, содержащихся в пространстве с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, кроме подпространства $\{\mathbf{e}_1\}$, можно выбрать $\mathbf{e}_\lambda$ (см. 2.2) так, что $\mathbf{e}_\lambda = \alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, где α пробегает все числа из F. Так как $[\mathbf{e}_\lambda, f_1] = \alpha$, то из равенства (12) следует, что для любого $\alpha \in F$ $\langle 1, \alpha\rangle g = \langle 1, \alpha h\rangle$, где h — изоморфизм полугруппы $\mathfrak{M}F$ в $\mathfrak{M}H$. Рассматривая отображение φ^{-1}, обратное к φ, получим, что $Fh = H$.

Равенство (12) можно теперь переписать в виде

$$\forall_{\lambda\in\Lambda_A,\ i\in I_1}[\mathbf{e}'_{\lambda'}, f'_{i'}] = [\mathbf{e}_\lambda, f_i]\, h$$

(см. 3.3). Так как A_1^* и B_1^*, по условию, являются t-подпространствами A^* и B^*, то отображения a и b пространств A и A_1^* на B и B_1^*

$$(\alpha\mathbf{e}_\lambda)\, a = (\alpha h)\, \mathbf{e}'_{\lambda'}, \quad (f_i\, \beta)\, b = f'_{i'}\, (\beta h)$$

удовлетворяют условиям леммы п. 3.2, из которой следует, что h является изоморфизмом тела F на тело H, a — изоморфизмом a_h пространства A на пространство B. Как и в п. 3.3,

$$\forall_{\lambda\in\Lambda_A}\mathbf{e}'_{\lambda'} = \mathbf{e}_\lambda a, \quad \forall_{i\in I} f'_{i'} = f_i a^*. \tag{13}$$

Пусть теперь $c = \theta_1^{-1}(\langle\psi, \alpha\rangle, i\lambda)$ — произвольный элемент из $S'_2(F, A, A_1^*)$. Из (11) и (9) имеем для любого $\mathbf{x}\in B$:

$$\mathbf{x}\,(c\,\varphi) = \mathbf{x}\,(c\theta_1\varphi_1\theta_2^{-1}) = \mathbf{x}\,\{(\langle\psi,\ \alpha\rangle,\ i\lambda)\,\varphi_1\theta_2^{-1}\} =$$
$$= \mathbf{x}\,\{(\langle\psi, \alpha\rangle\, g,\ i'\lambda')\,\theta_2^{-1}\} = \mathbf{x}\,\{(\langle\psi',\ \gamma_\psi\cdot\alpha\, h\rangle,\ i'\lambda')\,\theta_2^{-1}\}.$$

Отсюда, по определению θ_2 (см. (3), (4)), следует:

$$\mathbf{x}\,(c\,\varphi) = [\mathbf{x},\ f'_{i'}]\,\psi'\cdot\gamma_\psi\cdot\alpha h\cdot\mathbf{e}'_{\lambda'}.$$

Вместе с (13) и (6) последнее равенство дает:

$$\mathbf{x}\,(c\varphi) = [(\mathbf{x}a^{-1})\, a,\ f_i a^*]\,\psi'\cdot\gamma_\psi\cdot\alpha h\cdot\mathbf{e}_\lambda a = [\mathbf{x}a^{-1},\ f_i]\, h\psi'\cdot\gamma_\psi\cdot\alpha\, h\cdot\mathbf{e}_\lambda a. \tag{14}$$

Из (10), (14) и определения изоморфизма $a = a_h$ (п. 7.4) получаем:

$$\mathbf{x}\,(c\varphi) = \gamma_\psi\cdot\{[\mathbf{x}a^{-1},\ f_i]\,\psi\cdot\alpha\}\, h\cdot\mathbf{e}_\lambda a = \gamma_\psi\cdot\{[\mathbf{x}a^{-1},\ f_i]\,\psi\cdot\alpha\cdot\mathbf{e}_\lambda\}\, a.$$

Воспользовавшись снова (3), (4), выводим отсюда:

$$\mathbf{x}\,(c\,\varphi) = \gamma_\psi\,(\mathbf{x}a^{-1}ca) = \{\gamma_\psi\, h^{-1}\,(\mathbf{x}a^{-1}c)\}\, a = \mathbf{x}a^{-1}\,(\gamma_\psi\, h^{-1}\cdot c)\, a.$$

Таким образом, обозначая $\gamma_\psi\, h^{-1} = \delta_\psi$, имеем:

$$\forall_{c_\psi\in S'_2(F,\, A,\, A_1^*)}\, c_\psi\,\varphi = a^{-1}\,(\delta_\psi\cdot c_\psi)\, a. \tag{15}$$

Отображение φ_a^{-1} (см. 7.4) является изоморфизмом полугруппы $S'_2(H, B, B_1^*)$ на $S'_2(F, A, A_1^*)$. Поэтому $\varphi_2 = \varphi\varphi_a^{-1}$ является автоморфизмом полугруппы $S'_2(F, A, A_1^*)$. Из (15) для любого $c = c_\psi \in S'_2(F, A, A_1^*)$ следует:

$$c_\psi\varphi_2 = \delta_\psi\, c_\psi.$$

Так как φ_2 — изоморфизм, то для любых $c_\psi, d_{\psi_1}\in S'_2(F, A, A_1^*)$ из замечания к п. 7.4 вытекает:

$$\delta_{\psi\psi'}\cdot c_\psi\, d_{\psi_1} = (c_\psi d_{\psi_1})\,\varphi_2 = c_\psi\,\varphi_2\cdot d_{\psi_1}\varphi_2 = \delta_\psi\, c_\psi\cdot\delta_{\psi_1} d_{\psi_1} = (\delta_{\psi_1}\cdot\delta_\psi\,\psi_1)\, c_\psi\, d_{\psi_1},$$

и φ_2 является сингулярным автоморфизмом полугруппы $S'_2(F, A, A_1^*)$. Теорема доказана.

Поступило
7. III. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Глускин Л. М., Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 841—870.
[2] Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, М., ИЛ, 1955.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 815—824

И. М. МЕЛЬНИК

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть R — часть римановой поверхности некоторой алгебраической функции. По заданным на границе R значениям аналитической или псевдоаналитической функции $f(z)$ выводятся соотношения между числом внутренних критических точек функции $f(z)$ на R, граничным индексом функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и угловыми порядками кривых, ограничивающих R.

§ 1. Введение

1. Пусть $w(z)$ — многозначная алгебраическая функция, определяемая уравнением

$$\Phi(z, w) = P_0(z) w^m + P_1(z) w^{m-1} + \ldots + P_m(z) = 0, \tag{1}$$

где $P_k(z)$ — многочлены с комплексными коэффициентами, а многочлен $\Phi(z, w)$ неприводим, т. е. не существует разложения

$$\Phi(z, w) = g(z, w)\psi(z, w),$$

где g и ψ — многочлены, отличные от постоянных.

Обозначим через a_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ все различные между собой нули многочлена $P_0(z)$, многочлена $D(z)$—дискриминанта уравнения (1), и точку $z = \infty$. Очевидно, среди точек a_k содержатся все точки ветвления функции $w(z)$.

Построим риманову поверхность наложения функции $w(z)$ следующим образом. Возьмем плоскость z и предположим, что $z = z_0$ — такая точка, для которой уравнение $\Phi(z_0, w) = 0$ имеет m различных корней $w_1, w_2, \ldots, w_m$, причем $w_k'(z_0) \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Все точки a_k соединим жордановыми кривыми так, чтобы указанные кривые не имели общих точек, отличных от точки z_0. Плоскость z будем предполагать разрезанной вдоль этих кривых. Условимся понимать под значением $w(z)$ в каждой точке z, не лежащей ни на одном из разрезов, то значение, которое получено из $w(z_0) = w_1$ аналитическим продолжением вдоль пути, не пересекающего ни одного из наших разрезов. Приготовим m экземпляров разрезанной плоскости z. Налагая, затем, все экземпляры один на другой, соединим берега разрезов, на которых функция $w(z)$ принимает одинаковые значения. Если значения функции $w(z)$ на различных берегах разреза, проведенного на определенном экземпляре плоскости z, совпадают, то указанные берега склеиваются и разрез уничтожается. Полученную риманову поверхность наложения функции $w(z)$ обозначим через R_0.

Пусть R — конечная или бесконечная часть поверхности R_0, ограниченная α замкнутыми жордановыми кривыми $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha) = \Gamma$, не проходящими через точки ветвления поверхности R_0, и $f(z)$ — функция, аналитическая или псевдоаналитическая всюду на R, кроме точек ветвления и, быть может, конечного числа полюсов.

Задачей настоящей работы является вывод для функции $w(z)$ (или $f(z)$) топологических соотношений, связывающих число кривых, ограничивающих R, граничный индекс вещественной части рассматриваемой функции, вычисленной по контуру Γ относительно поверхности R, и число критических точек функции $w(z)$ (или $f(z)$) на R.

2. Предположим, что G — однолистная область, ограниченная α жордановыми кривыми $(L_1, L_2, \ldots, L_\alpha) = L$, и $u(x, y)$ — функция, гармоническая или псевдогармоническая в G, кроме, быть может, конечного числа логарифмических полюсов. В монографии М. Морса [см. (1), стр. 60], рассматриваются три вида граничных условий: А, В, С, одному из которых должна удовлетворять функция $u(x, y)$. При всех указанных граничных условиях имеет место соотношение

$$M - S = 2 - \alpha + I, \qquad (2)$$

где M — число логарифмических полюсов u в G, S — число внутренних седловых точек u в G, каждая из которых считается столько раз, какова ее кратность, I — граничный индекс функции $u(x, y)$. Граничный индекс I всей границы L определяется как сумма граничных индексов I_k от каждой кривой L_k. Величина I_k называется привзносом граничного индекса I от кривой L_k. При граничном условии А

$$I_k = s_k - m_k, \qquad (3)$$

где m_k — число точек относительного минимума u на L_k, s_k — число седловых точек u на L_k. При граничном условии С (частный случай граничного условия А) m_k обозначает число точек относительного входящего минимума u на L_k, s_k — число точек относительного входящего максимума u на L_k.

Заметим, что формула (2), полученная для однолистной области, остается справедливой и для областей, подобных однолистным и не имеющих точек ветвления, в силу топологической инвариантности всех входящих в нее членов.

Приведенные здесь результаты монографии М. Морса будут использованы в следующих параграфах.

В работе Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова (2) (§ 9) выводятся топологические соотношения для аналитической или псевдоаналитической функции в многолистной области, но без точек ветвления.

§ 2. Основная теорема

Очевидно, в окрестности произвольной внутренней точки $z = a$ поверхности R функция $w(z)$ может быть представлена в виде

$$w(z) = (z - a)^{\frac{p}{q}} \psi\,[(z - a)^{\frac{1}{q}}] + b, \quad \psi(0) \neq 0, \qquad (4)$$

если $z = a$ — конечная точка, и в виде

$$w(z) = z^{-\frac{p}{q}} g\left(z^{\frac{1}{q}}\right) + b, \quad g(\infty) \neq 0, \tag{4'}$$

если $z = a$ — бесконечно удаленная точка. Здесь p и q — целые числа, $q \geqslant 1$, b — комплексная постоянная, функция $\psi(t)$ — аналитическая в точке $t = 0$, функция $g(t)$ — аналитическая в точке $t = \infty$.

Ясно, что если $q > 1$, то точка $z = a$ является алгебраической точкой ветвления функции $w(z)$, в которой связано q листов римановой поверхности R_0. Если $q = 1$, то a является точкой аналитичности или полюсом функции $w(z)$.

Определение 1. Внутреннюю точку $z = a$ поверхности R будем называть обыкновенной точкой функции $w(z)$ (или $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$), если в соответствующем ей представлении (4) или (4') $p = q = 1$. Все внутренние точки R, отличные от обыкновенных, будем называть критическими точками функции $w(z)$ (или $u(x, y) = \operatorname{Re} w$). Седловые точки и точки относительного минимума $u(x, y)$, расположенные на границе, будем называть граничными критическими точками функции $u(x, y)$.

Определение 2. Число p назовем порядком функции $w(z)$ в точке $z = a$.

В дальнейшем будем предполагать, что поверхность R содержит m листов и удовлетворяет следующим условиям:

1) каждый лист поверхности R является областью (если восстановить разрезы, проведенные при построении R_0, то R разделится ровно на m областей);

2) поверхность R может быть гомеоморфно отображена так, что все однолистные области, и только они, перейдут в однолистные области и каждая кривая Γ_j перейдет в кривую Γ_j^*, которая проектируется на плоскость z в окружность L_j.

Определение 3. Пусть точка t совершит полный обход кривой Γ_j. Тогда точка t_0 на L_j, соответствующая точке t, совершит обход окружности L_j целое число раз $n_j \geqslant 1$. Число n_j будем называть угловым порядком кривой Γ_j, расположенной на поверхности R.

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего предложения.

ТЕОРЕМА. *Для функции $w(z)$, определяемой уравнением* (1), *на поверхности R имеет место соотношение*

$$\sum_{j=1}^{n} (q_j - p_j) = 2m - \sum_{j=1}^{\alpha} n_j + I, \tag{5}$$

где α — число граничных кривых Γ_j, каждая из которых имеет угловой порядок n_j, I — граничный индекс функции $u(x, y)$ по контуру Γ относительно R, n — число всех внутренних критических точек функции $w(z)$ на R.

Докажем сначала некоторые вспомогательные предложения.

ЛЕММА 1. *Пусть функция $w(z)$, определяемая уравнением* (1), *в q-листной окрестности внутренней точки a имеет представление вида* (4) *или*

(4′). *Существует замкнутая кривая* γ, *имеющая угловой порядок* q *и ограничивающая достаточно малую окрестность точки* $z = a$, *такая, что привзнос* $I(\gamma)$ *граничного индекса функции* $u(x, y)$ *по кривой* γ *относительно* q-*листной области, не содержащей точки* $z = a$, *равен* p.

Предположим, что $z = a$ — конечная точка на R. Тогда функция

$$t = (z - a)^{\frac{1}{q}} \{\psi [(z - a)^{\frac{1}{q}}]\}^{\frac{1}{p}},$$

где $\{\psi [(z - a)^{\frac{1}{q}}]\}^{\frac{1}{p}}$ обозначает любую ветвь радикала, однозначную и непрерывную в достаточно малой q-листной окрестности точки a, взаимно однозначно и с сохранением ориентации отображает q-листную окрестность поверхности R с точкой ветвления a на однолистную окрестность точки $t = 0$. Отображение всюду конформно, исключая точку $z = a$ (когда $q > 1$). Функция $w(z)$ для точек z, близких к a, преобразуется к виду $w(z) = t^p + b$. Переходя к полярным координатам (ρ, φ), получим:

$$u(\rho, \varphi) = \operatorname{Re} w = \rho^p \cos p\varphi + \operatorname{Re} b.$$

В качестве кривой γ возьмем прообраз окружности $|t| = \rho$ достаточно малого радиуса ρ. Дифференцируя $u(\rho, \varphi)$, найдем:

$$u'_\varphi(\rho, \varphi) = -\rho^p p \sin p\varphi, \quad u''_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi) = -\rho^p p^2 \cos p\varphi,$$
$$u'_\rho(\rho, \varphi) = p\rho^{p-1} \cos p\varphi.$$

Решая уравнение $u'_\varphi(\rho, \varphi) = 0$, получим, что функция $u(\rho, \varphi)$ достигает экстремальных значений в точках

$$\varphi_k = \frac{\pi k}{p}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, (2p \mp 1),$$

где верхний знак надо брать при $p > 0$, нижний — при $p < 0$. Так как

$$\operatorname{sign} u''_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi_k) = (-1)^{k+1}, \quad \operatorname{sign} u'_\rho(\rho, \varphi_k) = (-1)^k \operatorname{sign} p,$$

то при $p > 0$ функция $u(\rho, \varphi)$ на окружности $|t| = \rho$ относительно области $|t| > p$ имеет p входящих максимумов и p выходящих минимумов. Если $p < 0$, то $u(\rho, \varphi)$ на $|t| = \rho$ имеет $|p|$ входящих минимумов и $|p|$ выходящих максимумов. Отсюда, на основании формулы (3), получим, что $I(\gamma) = p$.

Пусть теперь $z = a$ — бесконечно удаленная точка поверхности R. Тогда функция*

$$t = z^{-\frac{1}{q}} \{g(z^{\frac{1}{q}})\}^{\frac{1}{p}}$$

гомеоморфно и с сохранением ориентации отображает q-листную окрестность поверхности R с точкой ветвления $z = \infty$ на однолистную окрестность точки $t = 0$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что $I(\gamma) = p$. Лемма доказана.

---

* Здесь, как и раньше, $\{g(z^{\frac{1}{q}})\}^{\frac{1}{p}}$ обозначает любую ветвь радикала, однозначную и непрерывную в q-листной окрестности точки $z = \infty$.

Обозначим через a_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ точки z-плоскости, соответствующие точкам ветвления поверхности R. В окрестности точки z с аффиксом a_j уравнение (1) определяет одно или несколько разложений вида

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - a_j)^{\frac{k}{q_j}}, \tag{6}$$

где сумма чисел q_j, соответствующих аффиксу a_j, равна m.

Так как формула (2) справедлива для областей, подобных однолистным, то для возможности ее использования преобразуем m-листную поверхность R в m областей, подобных однолистным и не имеющих точек ветвления. Это можно сделать, удаляя окрестности точек ветвления a_j и точки z_0 и проводя соответствующие разрезы.

Обозначим через R^* поверхность, полученную из R удалением достаточно малых q_j-листных окрестностей точек ветвления a_j и m-листной окрестности точки z_0. Границы окрестностей точек a_j обозначим через γ_j $(j = 1, 2, \ldots, \mu; \mu \geqslant r)$, а границу окрестности точки z_0 — через γ_0; через Γ^* обозначим границу поверхности R^*. Очевидно, поверхность R^* представляет собой m-листную область, но без точек ветвления. Каждую q_j-листную кривую γ_j $(j = 1, 2, \ldots, \mu)$ соединим q_j разрезами, расположенными на различных листах, с m-листной кривой γ_0. Аналогично, каждую кривую Γ_j, имеющую угловой порядок n_j, соединим n_j разрезами, расположенными на различных листах, с γ_0 так, чтобы концы разрезов, принадлежащие Γ_j, были обыкновенными точками кривой Γ_j. Разрезы на R^* будем проводить вдоль гладких жордановых кривых так, чтобы они не имели общих точек, не проходили через внутренние критические точки функции $w(z)$, не имели общих точек с кривыми Γ_j (кроме, быть может, концов), чтобы они оканчивались в обыкновенных точках (отличных от седловых и точек минимума) функции $u(x, y)$ на Γ^* и чтобы функция $u(x, y)$ на каждом разрезе имела не более конечного числа относительных экстремальных значений. Так как каждый лист поверхности R^* представляет собой область и функция $u(x, y)$ имеет конечное число внутренних и граничных критических точек, то провести разрезы указанным образом всегда возможно. Эти разрезы разделяют m-листную поверхность R^* на m односвязных областей G_k, каждая из которых подобна однолистной и ограничена некоторой жордановой кривою L_k, на которой функция $u(x, y)$ удовлетворяет одному из граничных условий A, B, C. Все разрезы, проведенные на R^* и пронумерованные в определенном порядке, будем обозначать через B_j.

ЛЕММА 2. *Привзнос $I(B_j)$ граничного индекса функции $u(x, y)$ от левого и правого берегов закрытого разреза B_j равен* -1.

1. Предположим, что функция $u(x, y)$ убывает вдоль B_j при приближении к концу A_j, расположенному на некоторой кривой Γ_k. Так как A_j— обыкновенная точка кривой Γ_k, отличная от граничных критических точек функции $u(x, y)$, то одна из угловых точек, образовавшихся при проведении разреза B_j и примыкающих к A_j, будет точкой относительного минимума функции $u(x, y)$ на $B_j + \Gamma_k$. Очевидно, разрез B_j всегда можно провести так, чтобы каждый из углов, образовавшихся при пересечении B_j с Γ_k, был меньше π. Поэтому минимум в указанной

угловой точке будет входящим. Каждый минимум и максимум функции $u(x, y)$, расположенный на внутренней части B_j, является входящим на одном береге разреза и выходящим на другом. Последнее означает, что каждый минимум и максимум функции $u(x, y)$, расположенный на внутренней части B_j, следует считать только один раз. Поэтому если $u(x, y)$ убывает вдоль B_j при приближении к обоим концам, то на закрытом разрезе B_j входящих минимумов будет на один больше, чем максимумов, так как в этом случае концы разреза B_j являются точками входящего минимума. Следовательно, на основании (3), получим: $I(B_j) = -1$.

2. Пусть теперь $u(x, y)$ возрастает вдоль B_j при приближении к обоим концам. Очевидно, в этом случае концы разреза B_j являются точками, отличными от точек относительного входящего экстремума $u(x, y)$ на B_j. Следовательно, и в этом случае крайние точки относительного входящего экстремума $u(x, y)$ на B_j являются точками входящего минимума. Поэтому $I(B_j) = -1$.

Случай, когда $u(x, y)$ возрастает вдоль B_j при приближении к одному концу и убывает при приближении к другому, рассматривается аналогично.

ЛЕММА 3. *Привзнос $I(\gamma_0)$ граничного индекса функции $u(x, y)$ от m-листной кривой γ_0 относительно R^* равен m.*

Так как кривая γ_0 получена удалением окрестности обыкновенной точки z_0 на всех листах поверхности R, то привзнос от части кривой γ_0, расположенной на k-м листе, равен 1. Отсюда следует, что $I(\gamma_0) = m$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим область G_k, ограниченную кривою L_k. Функция $w(z)$ в области G_k в качестве своих критических точек может иметь некоторые точки b_i $(i = 1, 2, \ldots, s_k)$, которые являются ее полюсами или нулями производной $w'(z)$. Для каждой точки b_i соответствующее по формуле (4) или (4′) число $q_i = 1$. Пусть I_k — граничный индекс функции $u(x, y)$ по контуру L_k относительно G_k и p_i — порядок функции $w(z)$ в точке b_i. Обозначим через G_k^0 область, полученную из G_k удалением достаточно малых замкнутых окрестностей точек b_i; границы этих окрестностей обозначим через γ_i. Через L_k^0 обозначим границу области G_k^0, а через I_k^0 — граничный индекс функции $u(x, y)$ по контуру L_k^0 относительно G_k^0. Запишем основное соотношение (2) для функции $u(x, y)$ в G_k^0. Так как в G_k^0 нет критических точек функции $u(x, y)$, то

$$2 - \alpha_k + I_k^0 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

где α_k обозначает связность области G_k^0. Очевидно,

$$\alpha_k = 1 + s_k, \quad I_k^0 = I_k + \sum_{i=1}^{s_k} I(\gamma_i) = I_k + \sum_{i=1}^{s_k} p_i.$$

Вставляя выражения α_k и I_k^0 в (7) и суммируя по всем листам, получим:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{s_k} (1 - p_i) = m + \sum_{k=1}^{m} I_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{s_k} (q_i - p_i), \quad q_i = 1. \tag{8}$$

Выразим теперь $\sum I_k$ через заданные величины:

$$\sum I_k = \sum I(B_j) + \sum I(\gamma_j). \tag{9}$$

Так как $I(B_j) = -1$, то

$$\sum I(B_j) = -\sum_{j=1}^{\alpha} n_j - \sum_{j=1}^{\mu} q_j.$$

Аналогично, на основании первой и третьей лемм, имеем:

$$\sum_{j=0}^{\mu} I(\gamma_j) = m + \sum_{j=1}^{\mu} p_j.$$

Вставляя полученные выражения в (9), находим:

$$\sum I_k = I + m - \left\{\sum_{j=1}^{\alpha} n_j + \sum_{j=1}^{\mu} (q_j - p_j)\right\}. \tag{10}$$

Обозначим через n число всех критических точек функции $w(z)$ на R Тогда, очевидно,

$$\sum s_k = n - \mu.$$

Пронумеровав заново критические точки b_i, найдем:

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{s_k} (q_i - p_i) = \sum_{j=\mu+1}^{n} (q_j - p_j).$$

Следовательно, на основании (8) и (10),

$$\sum_{j=\mu+1}^{n} (q_j - p_j) = 2m - \sum_{j=1}^{\alpha} n_j - \sum_{j=1}^{\mu} (q_j - p_j) + I.$$

Последнее выражение равносильно соотношению (5). Теорема доказана.

Замечание. Мы предполагали, что над точкой z_0 лежат m листов поверхности R. Это предположение не является существенным и сделано для упрощения доказательства.

§ 3. Следствия из основной теоремы

1. Предположим, что поверхность R имеет k листов, $k < m$, и удовлетворяет всем условиям, указанным в § 2. Рассуждая аналогично предыдущему, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} (q_j - p_j) = 2k - \sum_{j=1}^{\alpha} n_j + I. \tag{11}$$

2. Пусть все критические точки алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением (1), принадлежат R. В этом случае каждый контур Γ_j получен удалением из поверхности R_0 некоторой области, не имеющей критических точек функции $w(z)$. На основании условий, налагаемых на R, заключаем, что угловой порядок каждого контура Γ_j равен 1 и $I(\Gamma_j) = 1$ для $j = 1, 2, \ldots, \alpha$. Это означает, что в рассматриваемом случае $I = \alpha$, и формула (5) дает:

$$\sum_{j=1}^{n} (q_j - p_j) = 2m. \tag{12}$$

Обозначая через p род алгебраической функции $w(z)$ и пользуясь

известным соотношением

$$2(p+m-1)=\sum_{j=1}^{n}(q_j-1),$$

мы получим из (12) формулу, выражающую род p через порядки функции $w(z)$ во всех ее критических точках:

$$p=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j-1)+1. \qquad (13)$$

3. Предположим теперь, что R представляет собой многолистную область без точек ветвления. В этом случае $q_j=1$ для всех j и на основании (5) имеем:

$$\sum_{j=1}^{n}(1-p_j)=2m-\sum_{j=1}^{\alpha}n_j+I. \qquad (14)$$

4. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая или псевдоаналитическая * на R, кроме точек ветвления и, быть может, конечного числа полюсов. Предположим, что точки ветвления поверхности R являются точками ветвления функции $f(z)$, причем если в точке ветвления a_j связано q_j листов поверхности R, то a_j является точкой ветвления функции $f(z)$ порядка q_j-1, функция $u=\mathrm{Re}\, f(z)$ удовлетворяет на Γ одному из граничных условий A, B, C. Рассуждая аналогично предыдущему, найдем, что для функции $f(z)$ справедливо соотношение (5), если R содержит m листов, или соотношение (11), если R содержит k листов.

§ 4. Случай однолистной области

Пусть G — однолистная область, конечная или бесконечная, ограниченная α жордановыми кривыми $(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\alpha)=\Gamma$, и пусть функция $f(z)$, заданная в G, имеет вид:

$$f(z)=g(z)\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{p_j}+b, \quad a_j\in G, \quad g(a_j)\neq 0, \qquad (15)$$

где p_j — дробные рациональные числа, причем $\sum_{j=1}^{m}p_j=p$ — целое число, функция $g(z)$ — аналитическая в G, кроме конечного числа полюсов, $u(x,y)=\mathrm{Re}\, f(z)$ удовлетворяет на Γ любому из граничных условий A, B, C, b — постоянная. В области G возьмем такую точку z_0, для которой $f'(z_0)\neq 0$. Соединим z_0 со всеми точками ветвления a_j разрезами, проведенными вдоль жордановых кривых, не имеющих общих точек, кроме точки z_0, и расположенными в G. Под функцией $f(z)$ будем понимать любую ее однозначную ветвь, непрерывную всюду в разрезанной области G, кроме, быть может, точек ветвления и конечного числа полюсов.

Обозначим через b_j $(j=m+1, \ldots, n)$ нули и полюсы функции $g(z)$. В окрестности b_j функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=(z-b_j)^{p_j}\psi(z)+b, \quad \psi(b_j)\neq 0,$$

где p_j — целые числа $(j=m+1, \ldots, n)$. При указанных условиях справедлива

* Функция $f(z)$ называется псевдоаналитической, если она получена из аналитической гомеоморфной и сохраняющей ориентацию заменой аргумента.

ТЕОРЕМА. *Пусть I — граничный индекс функции $u(x, y)$ по контуру Γ относительно G. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - p_j) = 2 - \alpha + I. \tag{16}$$

Доказательство. Полагая $p_j = \frac{\mu_j}{q_j}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$; μ_j, q_j — целые числа, $q_j > 1$), обозначим общее наименьшее кратное чисел q_j через q. Аналогично предыдущему, построим q-листную область, в которой функция $f(z)$ будет аналитической всюду, кроме точек ветвления и полюсов. Граничный индекс функции $u(x, y)$ от кривых, расположенных на каждом из листов, один и тот же и равен I. Так как каждая кривая Γ_j имеет угловой порядок, равный 1, то, на основании (5), для $f(z)$ в полученной q-листной области имеем:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\frac{q}{q_j} (q_j - \mu_j) \right] + q \sum_{j=m+1}^{n} (1 - p_j) = 2q - \alpha q + qI. \tag{17}$$

Преобразуем первое слагаемое левой части:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\frac{q}{q_j} (q_j - \mu_j) \right] = q \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{\mu_j}{q_j}\right) = q \sum_{j=1}^{m} (1 - p_j).$$

Вставляя последнее выражение в (17), получим (16).

§ 5. Примеры

1. Пусть $w(z)$ — функция, определяемая уравнением

$$[w - (z - 5)^6]^4 = (z - 1)(z + 1)^2 (z - 5)^5,$$

а R — конечная часть ее римановой поверхности наложения, ограниченная кривою Γ, состоящей из четырех окружностей $|z| = r$, расположенных на различных листах. Радиус r будем считать настолько большим, чтобы все нули функции $w'(z)$ и точки ветвления функции $w(z)$ ($a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 5$) принадлежали R. Тогда граничный индекс функции $u(x, y) = \operatorname{Re} w(z)$ по каждой окружности $|z| = r$ относительно поверхности R равен -6, так как $w(z)$ в бесконечно удаленной точке на каждом листе имеет полюс шестого порядка и в бесконечной части римановой поверхности, ограниченной контуром Γ, нет других критических точек функции $w(z)$. Пользуясь соотношением (5), получим:

$$1 + 1 + 3 - 1 + \sum (1 - p_j) = 8 - 4 - 24.$$

Отсюда следует, что $\sum (p_j - 1) = 24$. Последнее означает, что функция $w'(z)$ в четырехлистной области R имеет 24 нуля в точках, отличных от точек ветвления a_k. Каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

2. На всех листах поверхности R удалим замкнутые области

$$|z - 1| \leqslant \frac{1}{4}, \quad |z + 1| \leqslant \frac{1}{4}, \quad |z - 5| \leqslant 1.$$

Полученную четырехлистную область без точек ветвления обозначим

через R^*, а границу области R^* — через Γ^*. При удалении области $|z+1| \leqslant \frac{1}{4}$ мы получим две граничные окружности $L_1, L_2\left(|z+1| = \frac{1}{4}\right)$, каждая из которых имеет угловой порядок, равный 2. Каждая из окружностей $L_3\left(|z-1| = \frac{1}{4}\right)$ и L_4 $(|z-5| = 1)$ имеет угловой порядок, равный 4. Проверим соотношение (14) для функции $w(z)$ на R^*, определяемой уравнением

$$w^4 + (z-1)(z+1)^2(z-5)^5 = 0.$$

Очевидно, привзнос граничного индекса функции $u(x, y)$ от четырех окружностей $|z| = r$ равен -8. На основании леммы 1 находим:

$$I(L_1) = I(L_2) = I(L_3) = 1, \quad I(L_4) = 5.$$

Таким образом, $I(\Gamma^*) = 8 - 8 = 0$. Функция $w(z)$ на R^* имеет 8 критических точек, расположенных по 4 соответственно над $z = 0$ и $z = 2$. Легко проверить, что

$$\begin{matrix} w_k'(0) = 0, & w_k'(2) = 0, \\ w_k''(0) \neq 0, & w_k''(2) \neq 0 \end{matrix} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Следовательно, $p_j = 2$, $q_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, 8$. Отсюда вытекает, что $\sum(q_j - p_j) = -8$. Вставляя полученные значения в (14), найдем:

$$-8 = 8 - (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4),$$

т. е. соотношение (14) удовлетворяется.

3. Проверим формулу (12) для алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением

$$w^2 = z(z-1).$$

Функция $w(z)$ имеет 6 критических точек:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = a_6 = \infty.$$

Соответственно находим:

$$p_1 = p_2 = 1, \quad p_3 = p_4 = 2, \quad p_5 = p_6 = -1,$$

$$q_1 = q_2 = 2, \quad q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 1.$$

Вставляя значения p_j и q_j в (12), получим:

$$2(2-1) + 2(1-2) + 2(1+1) = 4.$$

Поступило
13. VI. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, ИЛ, 1951.

[2] Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М., Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 207—240.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 825—870

М. М. ДЖРБАШЯН и Р. М. МАРТИРОСЯН

ТЕОРИЯ ОБЩИХ ЯДЕРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В работе развивается общая теория линейных преобразований гильбертовых пространств функций $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$ друг на друга, осуществляемых почти изометрическими операторами, порожденными определенными ядрами.

Полученные результаты являются дальнейшим естественным развитием теории биортогональных разложений в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$.

Введение

Пусть $\sigma_k(x)$ $(k = 1, 2)$ — неубывающая функция, определенная и непрерывная справа на интервале (a_k, b_k) $(-\infty \leqslant a_k < b_k \leqslant \infty)$ и имеющая ограниченную вариацию на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a_k, b_k)$. Обозначим через $H_k = L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ гильбертово пространство всех σ_k-измеримых на (a_k, b_k) и интегрируемых с квадратом модуля по этой мере функций со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{\sigma_k} = \int_{a_k}^{b_k} f_1(x)\overline{f_1(x)}\, d\sigma_k(x).$$

В работе одного из авторов данной статьи ([1]) была дана аналитическая характеристика операторов, осуществляющих изометрическое отображение пространств H_1 и H_2 друг на друга, так называемых изометрических пар операторов, осуществляющих «почти изометрическое» отображение тех же пространств. При этом было установлено, что такие отображения аналитически осуществляются специальными интегральными преобразованиями, подобными преобразованию Фурье — Планшереля, содержащими специальные ядра. В той же работе было показано, что эти ядра удовлетворяют определенным функциональным уравнениям, являющимся естественными аналогами условия биортогональности систем функций в пространстве $L^2(a, b)$.

В качестве конкретной реализации таких отображений была доказана теорема, являющаяся широким обобщением теоремы Палей и Винера ([2]) о системах функций, близких к полным ортонормальным, устанавливающая, что из близости данного ядра к ядру некоторого изометрического оператора следует существование изометрической пары операторов, порождающей это ядро.

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование линейных почти изометрических отображений пространств H_1 и H_2 друг на друга.

Это исследование завершается построением полной теории общих ядерных биортогональных преобразований, являющейся дальнейшим развитием известных результатов Н. К. Бари [см. (3), (4), (5)] по теории биортогональных систем и разложений.

В § 1, имеющем предварительный характер, приводятся точные формулировки ряда определений и понятий, необходимых для дальнейшего. Мы определяем понятия различного рода ядер — функций двух переменных $K(\xi, x)$, называя их, в зависимости от налагаемых на них условий, бесселевыми, гильбертовыми или ядрами Рисса. При этом мы показываем естественность наших определений, устанавливая их тождественность с соответствующими понятиями и определениями, хорошо известными из теории биортогональных систем в случае, когда $H_1 = L^2(a, b)$ и $H_2 = L^2_{[x]}(0,\infty)$.

На основе введенных определений в § 2 доказывается ряд предложений о свойствах бесселевых и гильбертовых ядер и о связи этих ядер с ядрами изометрических отображений. Полученные теоремы представляют собой континуальные аналоги известных предложений Н. К. Бари о связи между различного рода биортогональными и ортогональными системами.

В § 3 проводится развернутое исследование свойств базисных ядер Рисса. Устанавливая тождественность таких ядер с ядрами, порожденными почти изометрическими операторами, мы доказываем затем две основные теоремы, утверждающие, что из близости в том или ином смысле данного ядра с ядром Рисса следует, что и данное ядро является ядром Рисса.

Наконец, в § 4 мы доказываем теорему, дающую условия достаточно-необходимого типа для разрешимости общей проблемы моментов в пространствах H_1 и H_2. Эта теорема позволяет указать условия, при выполнении которых данное ядро допускает биортогонализацию.

§ 1. Предварительные замечания и определения

Пусть $\sigma_k(x)$ $(k = 1, 2)$ — неубывающая функция, определенная и непрерывная справа на интервале (a_k, b_k), $-\infty \leqslant a_k < b_k \leqslant \infty$, и имеющая ограниченную вариацию на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a_k, b_k)$. Обозначим через $H_k = L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ гильбертово пространство всех σ_k-измеримых и суммируемых с квадратом на (a_k, b_k) функций со скалярным произведением

$$(f, g)_{\sigma_k} = \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, \overline{g(x)}\, d\sigma_k(x).$$

На протяжении всей работы мы будем изучать различные свойства так называемых ядер. Последние представляют собой функции двух переменных $K(\xi, x)$, где $\xi \in (a_2, b_2)$, $x \in (a_1, b_1)$, удовлетворяющие тем или иным условиям. Мы будем в дальнейшем налагать на эти функции определенные требования и в зависимости от их выполнения давать ядрам $K(\xi, x)$ соответствующие названия, например B-ядра, бесселевы и гильбертовы ядра, базисные ядра и т. д. В настоящем параграфе мы приведем

точные формулировки наиболее существенных определений и при этом попытаемся оправдать целесообразность вводимых терминов, позаимствованных нами из теории общих ортогональных рядов. Предлагаемые нами определения на первый взгляд могут показаться громоздкими и далекими от привычных понятий, но этого вряд ли можно было избежать при той широкой и общей постановке вопроса,которую мы предпочли в настоящей работе. В частности, может показаться странным определение базисных ядер Рисса, поскольку здесь не чувствуется никакого аналога понятия сходимости в среднем. Тем не менее, если подчинить рассматриваемые нами ядра более жестким условиям, то станет совершенно прозрачной связь вводимых нами понятий с общепринятыми в теории ортогональных рядов. Однако в настоящем параграфе мы пойдем по иному пути и проанализируем вводимые понятия и их взаимосвязь в одном частном случае пространств H_1 и H_2, достаточно удовлетворительно оправдывающем целесообразность наших определений.

1. В качестве указанного частного случая рассмотрим произвольное пространство H_1, а H_2 определим следующим образом. Пусть $a_2 = 0$, $b_2 = +\infty$, а $\sigma_2(u) \equiv [u]$, где через $[u]$ обозначена целая часть u. Очевидно, $H_2 = L^2_{[u]}(0, \infty)$ изоморфно пространству l^2 всех последовательностей $\{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Пусть последовательность функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$, $\widetilde{k}_n(x) \in H_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, допускает биортогонализацию, т. е. существует такая последовательность $\{\widetilde{k}^*_n(x)\}$, $\widetilde{k}^*_n(x) \in H_1$, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{k}_n(x)\, \overline{\widetilde{k}^*_m(x)}\, d\sigma_1(x) = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Функции $\widetilde{k}_n(x)$ и $\widetilde{k}^*_n(x)$ определены при целых индексах, но мы их доопределим для всех $u \in (0, \infty)$, полагая, что при $n \leqslant u < n+1$

$$\widetilde{k}_u(x) = \widetilde{k}_n(x), \quad \widetilde{k}^*_u(x) = \widetilde{k}^*_n(x).$$

Введем также следующее обозначение, которым будем пользоваться в общем случае на протяжении всей работы. Положим

$$e_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \xi), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [0, \xi) \end{cases} \quad \xi > 0;$$

$$e_\xi(x) = \begin{cases} -1, & x \in [\xi, 0), \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [\xi, 0) \end{cases} \quad \xi < 0. \tag{1.1}$$

Пусть, далее,

$$\widetilde{K}(\xi, x) = \int_0^\infty \widetilde{k}_u(x)\, e_\xi(u)\, d[u], \qquad x \in (a_1, b_1), \quad \xi \in (0, \infty), \tag{1.2}$$

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = \int_0^\infty \widetilde{k}^*_u(x)\, e_\xi(u)\, d[u], \qquad x \in (a_1, b_1), \quad \xi \in (0, \infty). \tag{1.3}$$

Тогда, имея последовательности функций $\widetilde{k}_n(x) \in H_1$ и $\widetilde{k}_n^*(x) \in H_1$, мы можем построить некоторые ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ по формулам (1.2) и (1.3), причем очевидно, что при каждом фиксированном $\xi \in (0, \infty)$ $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$ и $\widetilde{K}^*(\xi, x) \in H_1$. Обратно, имея некоторые ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $\widetilde{K}^*(\xi, x)$, обладающие последним свойством, мы можем поставить им в соответствие последовательности функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$, $\widetilde{k}_n(x) \in H_1$ и $\{\widetilde{k}_n^*(x)\}$, $\widetilde{k}_n^*(x) \in H_1$, по формулам:

$$k_n(x) = \widetilde{K}(n+1, x) - \widetilde{K}(n, x), \quad \widetilde{k}_n^*(x) = \widetilde{K}_*(n+1, x) - \widetilde{K}_*(n, x). \tag{1.4}$$

Нетрудно видеть, что $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{k}_n^*(x)\}$ образуют биортогональную систему в H_1 тогда и только тогда, когда при всех $\xi, \eta \in (0, \infty)$ выполняется условие:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\Big(\sum_{p \leq [\xi]} \widetilde{k}_p(x)\Big)} \Big(\sum_{q \leq [\eta]} \widetilde{k}_q^*(x)\Big) d\sigma_1(x) = \min\{[\xi], [\eta]\}. \tag{1.5}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\Big(\sum_{p \leq [\xi]} \widetilde{k}_p(x)\Big)} \Big(\sum_{q \leq [\eta]} \widetilde{k}_q^*(x)\Big) d\sigma_1(x) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \Big(\overline{\int_0^\infty \widetilde{k}_u(x)\, e_\xi(u)\, d[u]} \cdot \int_0^\infty \widetilde{k}_u^*(x)\, e_\eta(u)\, d[u]\Big) d\sigma_1(x).$$

Поэтому условие (1.5) можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы последовательности функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{k}_n^*(x)\}$ образовывали биортогональную систему в H_1, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\xi, \eta \in (0, \infty)$ выполнялось условие:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d[u].$$

Далее, легко видеть, что полнота в H_1 системы функций $\widetilde{k}_n(x)$ эквивалентна полноте в H_1 всевозможных конечных сумм $\sum_{p=1}^{n} \widetilde{k}_p(x)$ этих функций. Таким образом, в терминах ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$ условие полноты системы функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ формулируется следующим образом.

Для полноты системы функций $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ в H_1 необходимо и достаточно, чтобы из условия

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x)\, \overline{f(x)}\, d\sigma_1(x) = 0, \quad f(x) \in H_1,$$

выполняющегося при всех $\xi \in (0, \infty)$, следовало условие

$$f(x) \equiv 0.$$

Поэтому в случае общих пространств H_1 и H_2 мы примем следующие определения.

Определение 1.1. Ядро $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ называется полным в H_1, если из того, что $f(x) \in H_1$ и

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x)\, \overline{f(x)}\, d\sigma_1(x) = 0$$

при всех $\xi \in (a_2, b_2)$, следует, что $f(x) \equiv 0$.

Определение 1.2. Функцию $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ назовем B-ядром, если существует такая функция $\widetilde{K}_*(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x)\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u) \tag{1.6}$$

при всех $\xi, \eta \in (a_2, b_2)$, причем оба ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ полны в H_1. При этом $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ называется сопряженным с $\widetilde{K}(\xi, x)$ ядром.

Замечание. Ясно, что сопряженное ядро определяется единственным образом. Очевидно также, что ядро, сопряженное с B-ядром, само является B-ядром.

Напомним теперь известное определение [см. ([6])] бесселевых систем и распространим это определение на случай общих ядер.

Пусть $\{\widetilde{k}_n\}$ и $\{\widetilde{k}_n^*\}$ — две полные системы функций из H_1, образующие биортогональную систему (в этом случае говорят, что как $\{\widetilde{k}_n\}$, так и $\{\widetilde{k}_n^*\}$ являются B-системами). B-система $\{\widetilde{k}_n\}$ называется бесселевой, если для любой функции $f \in H_1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n^*)_{\sigma_1}|^2$$

сходится.

Положим теперь

$$g(u) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_u^*(x)}\, d\sigma_1(x).$$

Поскольку $g(n) = (f, \widetilde{k}_n^*)_{\sigma_1}$, то условие бесселевости системы $\{\widetilde{k}_n\}$ эквивалентно тому, что

$$g(u) \in H_2 = L^2_{[u]}(0, \infty).$$

Это условие можно записать в равносильной форме:

$$\int_0^{\infty} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_u^*(x)}\, d\sigma_1(x) \right) e_\eta(u)\, d[u] = \int_0^{\infty} g(u)\, e_\eta(u)\, d[u], \qquad \eta \in (0, \infty),$$

где $g(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty)$. Меняя порядок интегрирования в левой части и пользуясь формулой (1.3), получаем:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^{\infty} g(u)\, e_\eta(u)\, d[u], \qquad g(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty).$$

Это условие необходимо и достаточно для бесселевости системы $\{\widetilde{k}_n\}$, ибо отсюда немедленно следует предыдущее условие, которое, как мы видели, эквивалентно бесселевости системы $\{\widetilde{k}_n\}$.

Таким образом, в общем случае естественно принять следующее определение.

Определение 1.3. B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ называется бесселевым в H_1, если любой функции $f(x) \in H_1$ соответствует некоторая функция $g(u) \in H_2$ такая, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{1.7}$$

Очевидно, что $g(u)$ определяется единственным образом.

Напомним, далее, что B-система $\{\widetilde{k}_n^*\}$ называется гильбертовой [см. ([6])], если для любой последовательности $\{c_n\} \in l^2$ существует единственная функция $f \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, для которой c_n являются коэффициентами биортогонального разложения по системе $\{\widetilde{k}_n^*\}$, т. е.

$$c_n = (f, \widetilde{k}_n)_{\sigma_1}.$$

В наших терминах это означает, что для любой функции $g(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty)$ существует такая функция $f(x) \in H_1$, что выполняется равенство

$$g(u) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_u(x)}\, d\sigma_1(x), \quad u \in (0, \infty).$$

Умножая обе части этого равенства на $e_\eta(u)$ и интегрируя, а затем меняя порядок интегрирования в правой части и пользуясь формулой (1.2), найдем, как и в предыдущем случае, что гильбертовость B-системы $\{\widetilde{k}_n^*\}$ эквивалентна выполнению равенства

$$\int_0^\infty g(u)\, e_\eta(u)\, d[u] = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x), \quad f(x) \in H_1.$$

Таким образом, в общем случае мы приходим к следующему определению.

Определение 1.4. B-ядро $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ называется гильбертовым в H_1, если для любой функции $g(u) \in H_2$ существует некоторая функция $f(x) \in H_1$ такая, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$ выполняется равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{1.8}$$

Очевидно, что функция $f(x) \in H_1$ определяется единственным образом.

2. Для того чтобы дать корректное определение базисного ядра, обобщающее известное определение базиса в гильбертовых пространствах, мы воспользуемся нижеследующей леммой, предварительно напомнив определение базиса Рисса в гильбертовом пространстве G [см. ([6])].

B-система $\widetilde{k}_n \in G$ называется базисом Рисса в гильбертовом простран-

стве G, если для любого элемента $f \in G$ разложения

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\widetilde{k}_n, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n)\, \widetilde{k}_n^*$$

сильно сходятся в G, причем существуют такие постоянные $0 < m < M$, что

$$m\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n^*)|^2 \leqslant M\|f\|^2,$$

$$m\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n)|^2 \leqslant M\|f\|^2.$$

ЛЕММА 1.1. *Пусть система элементов $\widetilde{k}_n \in G$ гильбертова пространства G допускает биортогонализацию, т. е. существует такая система элементов $\widetilde{k}_n^* \in G$, что*

$$(\widetilde{k}_n, \widetilde{k}_m^*) = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Пусть, далее, для некоторого плотного в G множества элементов $\{\zeta_\alpha\}$ при каждом $f \in G$ выполняется равенство

$$(f, \zeta_\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\, (\widetilde{k}_n, \zeta_\alpha) \tag{1.10}$$

и, кроме того, при любом $f \in G$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n)|^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n^*)|^2 < \infty. \tag{1.11}$$

Тогда система $\widetilde{k}_n$ является базисом Рисса в G.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из условий (1.11) вытекает существование такой константы $M > 0$, что при всех $f \in G$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n)|^2 \leqslant M\|f\|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n^*)|^2 \leqslant M\|f\|^2. \tag{1.12}$$

В самом деле, это утверждение есть очевидное следствие известной теоремы И. М. Гельфанда о выпуклых функционалах [7].

Пусть теперь $\varphi \in G$ — произвольный элемент пространства G. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского, а также оценками (1.12), получаем:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\, (\widetilde{k}_n, \varphi) - \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\, (\widetilde{k}_n, \zeta_\alpha) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \widetilde{k}_n^*)|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(\widetilde{k}_n, \varphi - \zeta_\alpha)|^2 \leqslant M^2\|f\|^2\, \|\varphi - \zeta_\alpha\|^2.$$

Выберем ζ_{α_i} так, чтобы $\|\varphi - \zeta_{\alpha_i}\| \to 0$. Тогда из предыдущего неравенства будет следовать:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\, (\widetilde{k}_n, \zeta_{\alpha_i}) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \widetilde{k}_n^*)\, (\widetilde{k}_n, \varphi).$$

Сравнение с (1.10) дает:

$$\lim_{i\to\infty}(f, \zeta_{\alpha_i}) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)(\widetilde{k}_n, \varphi)$$

и поэтому для любых элементов $f, \varphi \in G$ пространства G справедливо равенство

$$(f, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)(\widetilde{k}_n, \varphi). \tag{1.13}$$

Отсюда следует полнота обеих систем $\widetilde{k}_n$ и k_n^*. В самом деле, если при всех n $(f, \widetilde{k}_n^*) = 0$ или $(f, \widetilde{k}_n) = 0$, то из равенства

$$\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)(k_n, f),$$

вытекающего из (1.13), при $\varphi = f$ вытекает, что $f = 0$. Таким образом, биортогональное разложение

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)\,\widetilde{k}_n$$

слабо сходится, причем обе системы $\widetilde{k}_n$ и $\widetilde{k}_n^*$ полны в G. Как известно [см. ([6])], в этом случае обе системы $\widetilde{k}_n$ и $\widetilde{k}_n^*$ являются базисами Рисса.

Замечание. Если бы в (1.10) в качестве ζ_α можно было принять любой элемент пространства G, т. е. если бы биортогональное разложение

$$f \sim \sum (f, \widetilde{k}_n^*)\,\widetilde{k}_n$$

слабо сходилось, то условия (1.11) можно было бы заменить полнотой одной из систем $\widetilde{k}_n$ или $\widetilde{k}_n^*$. Нетрудно показать, что в этом случае система $\widetilde{k}_n^*$ также является базисом Рисса. Заметим, однако, что даже из полноты обеих систем $\widetilde{k}_n$ и $\widetilde{k}_n^*$ и равенства (1.10) для плотной системы элементов ζ_α еще не следует слабая сходимость биортогонального разложения

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)\,\widetilde{k}_n.$$

В самом деле, известны примеры [см. ([6])] дважды полных биортогональных систем $\{\widetilde{k}_n\}$, $\{\widetilde{k}_n^*\}$, не являющихся базисами. Тем не менее очевидно, что для любого $f \in G$

$$(f, \widetilde{k}_m^*) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \widetilde{k}_n^*)(\widetilde{k}_n, \widetilde{k}_m^*),$$

т. е. условие (1.10) выполняется для плотной системы элементов $\widetilde{k}_m^*$.

Вернемся теперь к нашему случаю пространств $H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $H_2 = L^2_{[u]}(0, \infty)$ и запишем условия леммы 1.1 в несколько иной форме.

Положим

$$g(u) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\overline{\widetilde{k}_u^*(x)}\,d\sigma_1(x), \quad g^*(u) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\overline{\widetilde{k}_u(x)}\,d\sigma_1(x), \quad u \in (0, \infty),$$

считая, что $\widetilde{k}_n(x), \widetilde{k}_n^*(x) \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$. Условия (1.11) означают, очевидно, что $g(u), g^*(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty)$. Однако мы применим другой способ записи. Для этого обе части предыдущих равенств умножим на $e_\xi(u)$, проинтегрируем от 0 до ∞ по мере $[u]$ и в правой части изменим порядок интегрирования, учитывая формулы (1.2) и (1.3). Тогда условия (1.11) можно сформулировать следующим образом. Любой функции $f(x) \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ соответствуют такие функции $g(u), g^*(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty)$, что при всех $\xi \in (0, \infty)$ выполняются равенства:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty \ (u)\, e_\xi(u)\, d[u], \tag{1.14}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty g^*(u)\, e_\xi(u)\, d[u]. \tag{1.15}$$

Пусть, далее, функции $f(x) = e_\eta(x)$ в формуле (1.15) соответствует функция, которую мы обозначим через $\widetilde{H}_*(\eta, u)$. Тогда, по определению, положим:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty \widetilde{H}_*(\eta, u)\, e_\xi(u)\, d[u]. \tag{1.16}$$

Поскольку

$$\widetilde{K}(\xi, x) = \sum_{q \leqslant [\xi]} \widetilde{k}_q(x),$$

то (1.16) означает, что

$$\sum_{q \leqslant [\xi]} \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{k}_q(x)}\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \sum_{q \leqslant [\xi]} \widetilde{H}_*(\eta, q),$$

откуда следует, что

$$\widetilde{H}_*(\eta, u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{k}_u(x)}\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x).$$

Беря в качестве элементов ζ_α функции $e_\xi(x)$, определенные формулой (1.1), мы можем переписать условие (1.10) в форме:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \sum_{n=1}^\infty \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_n^*(x)}\, d\sigma_1(x) \right) \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)} =$$

$$= \int_0^\infty g(u)\, \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, d[u], \tag{1.17}$$

где функция $g(u)$ определена формулой (1.14).

Таким образом, условия предыдущей леммы могут быть заменены в рассматриваемом нами случае условиями (1.14) — (1,17). Представляется удобным изменить соответственно и формулировку самой леммы.

ЛЕММА 1.2. *Пусть при всех* $\xi \in (0, \infty)$ $\widetilde{K}(\xi, x), \widetilde{K}_*(\xi, x) \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, *причем при всех* $\xi, \eta \in (0, \infty)$ *выполняется условие биортогональности*:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d[u]. \tag{1.18}$$

Пусть, далее, для любой функции $f(x) \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ *существуют такие функции* $g(u)$, $g^*(u) \in L^2_{[u]}(0, \infty)$, *что при всех* $\xi \in (a_1, b_1)$ *справедливы равенства:*

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty g(u)\, e_\eta(u)\, d[u], \tag{1.19}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty g^*(u)\, e_\eta(u)\, d[u]. \tag{1.20}$$

Функцию $g^*_\xi(u)$, *соответствующую по формуле* (1.20) *функции* $f(x) = e_\xi(x)$, *обозначим через* $\widetilde{H}_*(\xi, u)$, *т. е. положим, по определению,*

$$\int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\, \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty \widetilde{H}_*(\xi, u)\, e_\eta(u)\, d[u], \quad \xi \in (a_1, b_1) \;\; u \in (0, \infty). \tag{1.21}$$

Если при этом для любой $f(x) \in L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ *при всех* $\xi \in (a_1, b_1)$ *выполняется равенство*

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_0^\infty g(u)\, \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, d[u], \tag{1.22}$$

где $g(u)$ *определено формулой* (1.19), *то система функций* $\widetilde{k}_n(x)$, *порожденная ядром* $\widetilde{K}(\xi, x)$ *по формуле* (1.4), *является базисом Рисса в* $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$.

Доказательство. Переписав (1.21) в виде

$$\sum_{q \leqslant [\eta]} \int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\, \overline{\widetilde{k}_q(x)}\, d\sigma_1(x) = \sum_{q \leqslant [\eta]} \widetilde{H}_*(\xi, q),$$

получим:

$$\widetilde{H}_*(\xi, n) = \int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\, \overline{\widetilde{k}_n(x)}\, d\sigma_1(x),$$

причем из (1.20) следует, что

$$\sum_{n=1}^\infty |\widetilde{H}_*(\xi, n)|^2 < \infty.$$

Далее, из (1.19) находим:

$$\sum_{n \leqslant [\eta]} \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}^*_n(x)}\, d\sigma_1(x) = \sum_{n \leqslant [\eta]} g(n),$$

откуда имеем:

$$g(n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}^*_n(x)}\, d\sigma_1(x),$$

причем

$$\sum_{n=1}^\infty |g(n)|^2 < \infty.$$

Аналогично, из (1.20) получаем, что

$$g^*(n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_n(x)}\, d\sigma_1(x),$$

причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} | g^*(n) |^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} | (f, \widetilde{k}_n^*)_{\sigma_1} |^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} | (f, \widetilde{k}_n)_{\sigma_1} |^2 < \infty. \tag{1.23}$$

Далее, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \widetilde{H}_*(\xi, n) |^2 < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} | g(n) |^2 < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, \overline{\widetilde{H}_*(\xi, n)}$$

сходится и при этом, согласно (1.22),

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)\, \overline{\widetilde{H}_*(\xi, n)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{k}_n^*(x)}\, d\sigma_1(x) \cdot \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{k}_n(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x). \tag{1.24}$$

Заметим, наконец, что линейная оболочка функций $e_\xi(x)$ плотна в $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$, а также что $\{\widetilde{k}_n(x)\}$ и $\{\widetilde{k}_n^*(x)\}$ образуют биортогональную систему в $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ в силу (1.18). Это в сочетании с (1.23) и (1.24) показывает, что мы находимся в условиях применимости предыдущей леммы, что и завершает доказательство.

Доказанная лемма 1.2 позволяет в случае общих пространств H_1 и H_2 дать естественное определение базисных ядер или ядер Рисса, обобщающее общепринятое определение базиса Рисса в гильбертовом пространстве.

Определение 1.5. Функция $\widetilde{K}(\xi, x)$ ($\xi \in (a_2, b_2)$, $x \in (a_1, b_1)$), принадлежащая при каждом фиксированном $\xi \in (a_2, b_2)$ пространству H_1, называется базисным ядром или ядром Рисса, если выполнены следующие условия:

а) существует функция $\widetilde{K}_*(\xi, x)$, определенная при тех же ξ и x, что и $\widetilde{K}(\xi, x)$, принадлежащая пространству H_1 при каждом фиксированном $\xi \in (a_2, b_2)$ и удовлетворяющая условию биортогональности (1.6) при всех $\xi, \eta \in (a_2, b_2)$;

b) любой функции $f(x) \in H_1$ соответствуют такие функции $g(u)$, $g^*(u) \in H_2$, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$ справедливы равенства:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \tag{1.25}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g^*(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u); \tag{1.26}$$

c) для любой функции $f(x) \in H_1$ при всех $\xi \in (a_1, b_1)$ выполняется равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u) \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, d\sigma_2(u), \tag{1.27}$$

где функция $g(u) \in H_2$ связана с $f(x)$ соотношением (1.25), а функция $\widetilde{H}_*(\xi, u) \in H_2$ соответствует функции $f(x) = e_\xi(x) \in H_1$ по формуле (1.26), т. е.

$$\int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x) \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_*(\xi, u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{1.28}$$

Замечание. При доказательстве леммы 1.1 мы убедились, что не только система $\widetilde{k}_n$, но и сопряженная система $\widetilde{k}_n^*$ является базисом Рисса. Если ввести соответствующее дополнение и в лемму 1.2, то из определения 1.5 мы получим следующее утверждение.

Если функции $f(x) = e_\xi(x)$ по формуле (1.25) соответствует функция $\widetilde{H}(\xi, u) \in H_2$, т. е.

$$\int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x) \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}(\xi, u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u),$$

то при любой $f(x) \in H_1$ выполняется равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g^*(u) \overline{\widetilde{H}(\xi, u)}\, d\sigma_2(u),$$

где функция $g^*(u)$ связана с $f(x)$ соотношением (1.26).

Это утверждение, причем в более полной формулировке, составляет содержание приводимой ниже теоремы 3.2.

§ 2. Гильбертовы и бесселевы ядра

1. В этом параграфе будут изучены связи между понятиями бесселевых и гильбертовых ядер, введенными в предыдущем параграфе, и так называемыми ядрами изометрических операторов. Прежде чем дать определение ядер изометрических операторов, мы приведем здесь обобщенную формулировку теоремы Бохнера [см. ([1])] об аналитической характеристике изометрических операторов, действующих из пространства H_1 в пространство H_2 (определение этих пространств дано в начале § 1).

ТЕОРЕМА 2 а. *Любому изометрическому оператору* $g(u) = V_1 f(x)$, *отображающему все пространство* H_1 *на все пространство* H_2, *соответствуют две функции*

$$K(\xi, x) = V_2 e_\xi(x) \in H_1, \quad \xi \in (a_2, b_2),$$
$$H(\xi, u) = V_1 e_\xi(x) \in H_2, \quad \xi \in (a_1, b_1), \tag{2.1}$$

обладающие тем свойством, что

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{2.2}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\xi, u)}\, g(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_1, b_1). \tag{2.3}$$

Кроме того, функции $K(\xi, x)$ *и* $H(\xi, u)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\xi, x)}\, K(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi, \eta \in (a_2, b_2), \tag{2.4}$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\xi, u)}\, H(\eta, u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi, \eta \in (a_1, b_1), \tag{2.5}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} K(\xi, x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{H(\eta, u)}\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_2, b_2),\ \eta \in (a_1, b_1). \tag{2.6}$$

Обратно, всякая пара функций $K(\xi, x)$ *и* $H(\xi, u)$, *обладающая свойствами* (2.4), (2.5) *и* (2.6), *порождает, согласно формулам* (2.2) *и* (2.3), *некоторый изометрический оператор* V_1, *отображающий все пространство* H_1 *на все пространство* H_2, *и оператор* V_2, *ему обратный, осуществляющий обратное отображение. При этом, как и в случае прямой части теоремы, функции* $K(\xi, x)$ *и* $H(\xi, u)$ *и порожденные ими операторы* V_1 *и* V_2 *связаны формулами* (2.1).

В дальнейшем мы воспользуемся также следующей теоремой, которая близка по содержанию ко второй части теоремы 2 а.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть при всех* $\xi \in (a_2, b_2)$ $K(\xi, x) \in H_1$, *причем ядро* $K(\xi, x)$ *полно* * *в* H_1 *и удовлетворяет условию* (2.4) *теоремы* 2 а *при всех* $\xi, \eta \in (a_2, b_2)$. *Тогда существует такой изометрический оператор* V_2, *отображающий все* H_2 *на все* H_1 *и связанный с ядром* $K(\xi, x)$ *соотношением* (2.1), *что если обозначить через* V_1 *оператор, обратный к* V_2, $V_1 = V_2^{-1}$, *и положить*

$$g(u) = V_1 f(x), \quad H(\xi, u) = V_1 e_\xi(t),$$

то ядро $H(\xi, u)$ *будет полно в* H_2 *и будут выполняться утверждения* (2.2), (2.3), (2.5) *и* (2.6) *теоремы* 2 а.

Доказательство. Положим $V_2 e_\xi(t) = K(\xi, x)$. Пусть $g(t) \in H_2$ —некоторая непрерывная справа и финитная (т. е. обращающаяся в нуль вне некоторого отрезка, целиком расположенного внутри (a_2, b_2)) сту-

---

* См. определение 1.1.

пенчатая функция. Нетрудно видеть, что она единственным образом представляется в виде

$$g(t) = \sum a_k e_{\xi_k}(t)$$

в силу линейной независимости функций $e_{\xi_k}(t)$. Положим

$$V_2 g(t) = \sum a_k V_2 e_{\xi_k}(t).$$

Очевидно, что

$$(V_2 f(t), V_2 g(t))_{\sigma_1} = (f(t), g(t))_{\sigma_2}$$

для любых непрерывных справа и финитных ступенчатых функций $f(t)$ и $g(t)$, ибо условие теоремы означает, что

$$(V_2 e_\xi(t), V_2 e_\eta(t))_{\sigma_1} = (e_\xi(x), e_\eta(x))_{\sigma_2},$$

а оператор V_2 аддитивен в силу единственности представления

$$g(t) = \sum a_k e_{\xi_k}(t).$$

Обозначим через $D \subset H_2$ совокупность всех непрерывных справа финитных ступенчатых функций, определенных на (a_2, b_2). Пусть $g_n \in H_2$, $g_n \in D$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| g - g_n \|_{\sigma_2} = 0.$$

Так как

$$\| V_2 g_n \|_{\sigma_1} = \| g_n \|_{\sigma_2},$$

то

$$\| V_2 g_n - V_2 g_m \|_{\sigma_1} = \| g_n - g_m \|_{\sigma_2}.$$

Поэтому если

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n - g \|_{\sigma_2} = 0,$$

то последовательность элементов $V_2 g_n$ фундаментальна в H_1. Пусть $f \in H_1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| V_2 g_n - f \|_{\sigma_1} = 0.$$

Положим $V_2 g = f$. Это определение не зависит от выбора g_n, ибо если еще

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n' - g \|_{\sigma_2} = 0,$$

то, составив последовательность $g_1, g_1', g_2, g_2', \ldots, g_n, g_n', \ldots$, которая также сильно сходится к g в метрике H_2, мы убедимся в том, что $V_2 g_n$ и $V_2 g_n'$ имеют один и тот же предел f в H_1. Итак, $V_2 g$ определен уже на всем пространстве H_2, причем

$$(V_2 g_1, V_2 g_2)_{\sigma_1} = (g_1, g_1)_{\sigma_2}$$

для всех $g_1, g_2 \in H_2$. Покажем, что оператор V_2 изометрический. Для этого остается лишь обнаружить, что оператор V_2 отображает H_2 на все пространство H_1. В самом деле, если $f \in H_1$, то найдется такая последовательность $g_n \in H_2$, что

$$\lim_{n\to\infty} \| V_2 g_n - f \|_{\sigma_1} = 0$$

в силу полноты ядра

$$K(\xi, x) = V_2 e_\xi(t).$$

При этом, на основании доказанного,

$$\|V_2 g_n - V_2 g_m\|_{\sigma_1} = \|g_n - g_m\|_{\sigma_2}$$

и из фундаментальности $V_2 g_n$ мы заключаем о фундаментальности g_n. Следовательно, существует $g \in H_2$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{\sigma_2} = 0.$$

Очевидно, что при этом $f = V_2 g$, что и доказывает изометричность оператора V_2.

Обозначим через V_1 оператор, обратный к V_2 и, следовательно, осуществляющий изометрическое отображение пространства H_1 на H_2. Положим, далее, $V_1 e_\xi(t) = H(\xi, x)$, рассматривая функцию $e_\xi(t)$, определенную формулой (1.1), как элемент пространства H_1 при каждом фиксированном $\xi \in (a_1, b_1)$. Легко видеть, что ядро $H(\xi, x)$ полно в H_2. В самом деле, если при всех $\xi \in (a_1, b_1)$ и некотором $g \in H_2$

$$\int_{a_2}^{b_2} H(\xi, x)\, \overline{g(x)}\, d\sigma_2(x) = 0,$$

т. е.

$$(V_1 e_\xi(t), g(x))_{\sigma_2} = 0,$$

то

$$(e_\xi(x), V_2 g)_{\sigma_1} = 0,$$

откуда вытекает, что $V_2 g = 0$ и, следовательно, $g = 0$ в силу изометричности оператора V_2. Пусть, далее, $f \in H_1$ и $g = V_1 f$. В силу изометричности оператора V_2,

$$(f, V_2 e_\xi(t))_{\sigma_1} = (V_1 f, e_\xi(x))_{\sigma_2} = (g(x), e_\xi(x))_{\sigma_2}$$

при всех $\xi \in (a_2, b_2)$, что совпадает с формулой (2.2). Аналогично, из равенства

$$(f, e_\xi(x))_{\sigma_1} = (V_1 f, V_1 e_\xi(t))_{\sigma_2},$$

имеющего место при всех $\xi \in (a_1, b_1)$, мы получаем равенство (2.3). Далее при всех $\xi, \eta \in (a_1, b_1)$ имеем:

$$(V_1 e_\eta(t), V_1 e_\xi(t))_{\sigma_2} = (e_\eta(x), e_\xi(x))_{\sigma_1},$$

что совпадает с формулой (2.5). Наконец, формула (2.6) вытекает из равенства

$$(V_2 e_\xi(t), e_\eta(x))_{\sigma_1} = (e_\xi(x), V_1 e_\eta(x))_{\sigma_2},$$

выполняющегося при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ и всех $\eta \in (a_1, b_1)$.

Доказанная теорема оправдывает следующее определение.

Определение 2.1. Всякое B-ядро* $K(\xi, x)$, совпадающее со своим сопряженным $K(\xi, x) = K_*(\xi, x)$, называется ядром изометрического оператора.

2. Перейдем теперь к выяснению связей между ядрами изометрических операторов и бесселевыми и гильбертовыми ядрами.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для того чтобы B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ было бесселевым**, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой линейный ограниченный оператор A, отображающий H_1 в себя, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$*

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \tag{2.7}$$

где $K(\xi, x)$ — ядро произвольного, наперед заданного изометрического оператора, отображающего H_1 на H_2.

Доказательство. Пусть B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ бесселево, т. е. любой функции $f(x) \in H_1$ соответствует некоторая функция $g(u) \in H_2$ такая, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$ выполняется условие (1.7). Пусть, далее, $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора, и пусть $F(x) \in H_1$ соответствует упомянутой функции $g(u)$ по формуле (2.2), т. е.

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a^1}^{b_1} F(x)\overline{K(\xi, x)}\, d\sigma_1(x).$$

Положим $Af(x) = F(x)$. Очевидно, оператор A аддитивен. Покажем, что

$$A\widetilde{K}(\xi, x) \equiv K(\xi, x).$$

В самом деле, при фиксированном $\xi = \xi_0$ функции $f(x) = \widetilde{K}(\xi_0, x)$ соответствует некоторая функция $g_{\xi_0}(u)$ по формуле (1.7). Сопоставляя (1.7), где $f(x) = \widetilde{K}(\xi_0, x)$, с равенством

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi_0, x)\overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_{\xi_0}(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u),$$

находим, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_2}^{b_2} e_{\xi_0}(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_2}^{b_2} g_{\xi_0}(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u),$$

откуда следует:

$$g_{\xi_0}(u) \equiv e_{\xi_0}(u).$$

Поэтому, в силу самого определения оператора A, при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ имеем:

$$\int_{a_2}^{b_2} e_{\xi_0}(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} A\widetilde{K}(\xi_0, x)\overline{K(\xi, x)}\, d\sigma_1(x).$$

---

* См. определение 1.2.
** См. определение 1.3.

С другой стороны, ядро всякого изометрического оператора удовлетворяет условию (2.4), и из предыдущего равенства следует, что

$$A\widetilde{K}(\xi_0, x) = K(\xi_0, x)$$

в силу полноты ядра $K(\xi, x)$ в H_1. Для доказательства ограниченности оператора A заметим, что, как легко видеть, оператор, ставящий в соответствие функции $f(x) \in H_1$ функцию $g(u) \in H_2$ по формуле (1.7), замкнут, а потому и оператор A замкнут (поскольку переход от $g(u)$ к $F(x)$ осуществляется изометрическим оператором) и, следовательно, ограничен [см. ([8])].

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что некоторое B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ удовлетворяет условию теоремы. Так как $K(\xi, x)$ — ядро изометрического оператора, то, в силу (2.4),

$$(\widetilde{K}(\xi, x), A^* K(\eta, x))_{\sigma_1} = (A\widetilde{K}(\xi, x), K(\eta, x))_{\sigma_1} =$$

$$= (K(\xi, x), K(\eta, x))_{\sigma_1} = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u).$$

С другой стороны, в силу самого определения B-ядра, имеем:

$$(\widetilde{K}(\xi, x), \widetilde{K}_*(\eta, x))_{\sigma_1} = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u).$$

Сравнение с предыдущим равенством, в силу полноты ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$, дает:

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = A^* K(\xi, x). \tag{2.8}$$

Пусть теперь $f(x) \in H_1$ и $F(x) = Af(x)$. Поскольку $K(\xi, x)$ — ядро изометрического оператора, то, согласно теореме 2 а, функции $F(x)$ соответствует такая функция $g(u) \in H_2$, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_1}^{b_1} F(x)\overline{K(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \qquad g(u) \in H_2.$$

С другой стороны, на основании (2.8),

$$(F, K(\eta, x))_{\sigma_1} = (Af, K(\eta, x))_{\sigma_1} = (f, A^* K(\eta, x))_{\sigma_1} = (f, \widetilde{K}_*(\eta, x))_{\sigma_1}.$$

Сравнивая с предыдущим соотношением, мы получаем отсюда:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \qquad g(u) \in H_2,$$

что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для того чтобы B-ядро $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ было гильбертовым *, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой линейный ограни-*

* См. определение 1.4.

ченный оператор C, отображающий H_1 в себя, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$

$$\widetilde{K}_* (\xi, x) = CK (\xi, x), \tag{2.9}$$

где $K (\xi, x)$ — ядро произвольного наперед заданного изометрического оператора.

Доказательство. Покажем сначала, что из условия (2.9) следует равенство

$$C^* \widetilde{K} (\xi, x) = K (\xi, x). \tag{2.10}$$

В самом деле, принимая во внимание (1.6), находим:

$$(C^* \widetilde{K} (\xi, x), K (\eta, x))_{\sigma_1} = (\widetilde{K} (\xi, x), CK (\eta, x))_{\sigma_1} =$$
$$= (\widetilde{K} (\xi, x), \widetilde{K}_* (\eta, x))_{\sigma_1} = \int\limits_{a_2}^{b_2} e_\xi (u)\, e_\eta (u)\, d\sigma_2 (u).$$

Заметим, что ядро $K (\xi, x)$ изометрического оператора удовлетворяет условию (2.4); в соединении с предыдущим равенством это дает:

$$(C^* \widetilde{K} (\xi, x), K (\eta, x))_{\sigma_1} = (K (\xi, x), K (\eta, x))_{\sigma_1},$$

откуда, в силу полноты ядра $K (\xi, x)$ в H_1, и вытекает (2.10).

Для доказательства достаточности условия теоремы предположим существование оператора C и рассмотрим произвольную функцию $g (u) \in H_2$. Согласно теореме 2 а, функции $g (u)$ соответствует единственная функция $f (x) \in H_1$ по формуле (2.2), т. е.

$$(f (x), K (\eta, x))_{\sigma_1} = \int\limits_{a_2}^{b_2} g (u)\, e_\eta (u)\, d\sigma_2 (u).$$

Но в силу (2.10)

$$(f (x), C^* \widetilde{K} (\eta, x))_{\sigma_1} = (f (x), K (\eta, x))_{\sigma_1}$$

и поэтому

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} Cf (x) \cdot \overline{\widetilde{K} (\eta, x)}\, d\sigma_1 (x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g (u)\, e_\eta (u)\, d\sigma_2 (u),$$

что и доказывает гильбертовость ядра $\widetilde{K}_* (\xi, x)$, поскольку $Cf (x) \in H_1$.

Чтобы установить необходимость условия теоремы, рассмотрим ядро $K (\xi, x)$ произвольного изометрического оператора. Любой функции $f (x) \in H_1$ можно поставить в соответствие единственную функцию $g(u) \in H_2$ по формуле (2.2). Для этой функции $g (u)$, в силу гильбертовости ядра $\widetilde{K}_* (\xi, x)$, найдется единственная функция $F (x)$ такая, что

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} F (x)\, \overline{\widetilde{K} (\eta, x)}\, d\sigma_1 (x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g (u)\, e_\eta (u)\, d\sigma_2 (u).$$

Положим $Cf (x) = F (x)$. Очевидно, оператор C аддитивен, а в силу (2.2) и предыдущего равенства легко заключить, что он также и замкнут, а поэтому ограничен. Зафиксируем теперь $\xi = \xi_0$ и положим $f (x) = K (\xi_0, x)$.

В силу полноты ядра $K(\xi, x)$, из (2.2) и (2.4) следует, что соответствующая функции $f(x) = K(\xi_0, x) \in H_1$ функция $g_{\xi_0}(u) \in H_2$ при построении оператора C совпадает с $e_{\xi_0}(x)$. Поэтому

$$\int_{a_1}^{b_1} CK(\xi_0, x)\widetilde{K}(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_{\xi_0}(u) e_\eta(u)\, d\sigma_2(u).$$

Сравнение этого равенства с (1.6) дает:

$$CK(\xi_0, x) = \widetilde{K}_*(\xi_0, x),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2.4. *При выполнении любого из условий* (2.7) *или* (2.9) *соответствующие операторы A или C осуществляют взаимно однозначное отображение пространства H_1 в себя.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (2.7), т. е. ограниченный оператор A таков, что

$$A\widetilde{K}(\xi, x) \equiv K(\xi, x).$$

Мы утверждаем, что из условия $Af = 0$ следует $f = 0$. В самом деле, как было установлено при доказательстве теоремы 2.2, из условия (2.7) следует (2.8). Но в таком случае из полноты ядра $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ вытекает, что область значений оператора A^* плотна в H_1. Если теперь предположить, что при некотором $f_0 \in H_1$ $Af_0 = 0$, то для всех $f \in H_1$ будем иметь:

$$0 = (0, f) = (Af_0, f) = (f_0, A^*f),$$

откуда, в силу плотности в H_1 многообразия функций A^*f, получим:

$$f_0 = 0.$$

Аналогично, если выполнено условие (2.9), то, как было установлено при доказательстве теоремы 2.3, выполняется условие (2.10), из которого, в силу полноты ядра $K(\xi, x)$, следует, что многообразие функций C^*f плотно в H_1. Отсюда, так же как и выше, приходим к заключению, что если $Cf = 0$, то $f = 0$.

ТЕОРЕМА 2.5. *Если некоторое B-ядро бесселево, то сопряженное с ним ядро гильбертово, и наоборот.*

Доказательство. Пусть B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ бесселево. Тогда, в силу теоремы 2.2, существует такой ограниченный оператор A, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ выполняется условие (2.7). Но, как мы видели при доказательстве теоремы 2.2, из условия (2.7) вытекает, что

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = A^* K(\xi, x)$$

и поэтому, в силу теоремы 2.3, ядро $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ гильбертово. Аналогично, если ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ гильбертово, то, по теореме 2.3, выполняется условие (2.9), из которого, как мы видели, вытекает (2.10). Чтобы завершить доказательство, остается еще раз воспользоваться теоремой 2.2.

ТЕОРЕМА 2.6. *Для того чтобы B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ было бесселевым, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой положительный ограниченный эрмитов оператор T, определенный на H_1, для которого при всех*

$\xi \in (a_2, b_2)$ *выполняется условие*

$$\widetilde{K}_* (\xi, x) = T\widetilde{K} (\xi, x). \tag{2.11}$$

Выполнение этого условия обеспечивает взаимную однозначность отображения, осуществляемого оператором T.

Доказательство. Покажем прежде всего, что при выполнении условия (2.11) из $Tf_0 = 0$ следует $f_0 = 0$. В самом деле, поскольку оператор T эрмитов, то при всех $f \in H_1$ имеем:

$$0 = (Tf_0, f) = (f_0, Tf),$$

откуда и вытекает, что $f_0 = 0$, ибо, в силу полноты ядра $\widetilde{K}_* (\xi, x)$, область значений оператора T плотна в H_1.

Для доказательства необходимости условия (2.11) вспомним, что если ядро $\widetilde{K} (\xi, x)$ бесселево, то, в силу теоремы 2.2, существует такой ограниченный оператор A, что

$$A\widetilde{K} (\xi, x) = K (\xi, x),$$

причем по формуле (2.8) одновременно выполняется условие

$$\widetilde{K}_* (\xi, x) = A^*K (\xi, x).$$

Поэтому, применяя к предыдущему равенству оператор A^*, находим:

$$A^*A\widetilde{K} (\xi, x) = \widetilde{K}_* (\xi, x),$$

что и доказывает необходимость условия (2.11) с $T = A^*A$, ибо, как известно, оператор A^*A положителен.

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что условие (2.11) выполнено. Как известно из функционального анализа [см. ([8])], из всякого положительного эрмитова оператора T можно извлечь квадратный корень $T^{\frac{1}{2}}$, являющийся снова положительным эрмитовым оператором. Положим $A = T^{\frac{1}{2}}$ и введем в рассмотрение функцию

$$K (\xi, x) = A\widetilde{K} (\xi, x). \tag{2.12}$$

Докажем, что $K (\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора. В самом деле, с одной стороны, поскольку оператор A эрмитов,

$$(K (\xi, x), K (\eta, x))_{\sigma_1} = (A\widetilde{K} (\xi, x), A\widetilde{K} (\eta, x))_{\sigma_1} = (\widetilde{K} (\xi, x), A^2 \widetilde{K} (\eta, x))_{\sigma_1} =$$
$$= (\widetilde{K} (\xi, x), T\widetilde{K} (\eta, x))_{\sigma_1} = (\widetilde{K} (\xi, x), \widetilde{K}_* (\eta, x))_{\sigma_1},$$

откуда, в силу (1.6), следует, что ядро $K (\xi, x)$ удовлетворяет условию (2.2).

С другой стороны, ядро $K (\xi, x)$ плотно в H_1. Действительно, если выполняется равенство

$$\int_{a_1}^{b_1} K (\xi, x) \overline{f_0 (x)} \, d\sigma_1 (x) = 0,$$

то, на основании (2.12),

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} A\widetilde{K}(\xi, x) \cdot \overline{f_0(x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x) \cdot \overline{Af_0(x)}\, d\sigma_1(x),$$

откуда, в силу полноты ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$, следует: $Af_0(x) = 0$. Но в таком случае

$$Tf_0(x) = A^2 f_0(x) = 0$$

и поэтому $f_0 = 0$, поскольку условие (2.11), как было установлено выше, обеспечивает взаимную однозначность отображения, осуществляемого оператором T. Таким образом, условия теоремы 1.1 выполнены и, следовательно, $K(\xi, x)$ является ядром некоторого изометрического оператора. Пользуясь теоремой 2.2 и принимая во внимание (2.12), заключаем отсюда, что ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ бесселево.

Замечание. Из теоремы 2.5 непосредственно следует, что в случае гильбертовых ядер справедливо следующее утверждение.

Для того чтобы B-ядро $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ было гильбертовым, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой положительный ограниченный эрмитов оператор T, определенный на H_1, для которого при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ выполняется условие (2.11).

3. Определение 2.2. B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ называется ядром Рисса — Фишера, если оно одновременно и бесселево и гильбертово.

Очевидно, что если одно из двух сопряженных B-ядер является ядром Рисса — Фишера, то таким же является и другое.

ТЕОРЕМА 2.7. *Если $\widetilde{K}(\xi, x)$ — ядро Рисса — Фишера, то при любом $f(x) \in H_1$ существуют единственным образом определенные функции $g(u) \in H_2$ и $g^*(u) \in H_2$ такие, что имеют место равенства:*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{2.13}$$

$$\int_{a_2}^{b_2} g^*(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2). \tag{2.14}$$

При этом существуют такие положительные константы M, m, K, k, что выполняются неравенства:

$$m\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|g\|_{\sigma_2} \leqslant M\|f\|_{\sigma_1}, \quad k\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|g^*\|_{\sigma_2} \leqslant K\|f\|_{\sigma_1}.$$

Обратно, любой функции $g(u) \in H_2$ соответствует некоторая функция $f(x) \in H_1$ такая, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ выполняется равенство (2.13). *Аналогичное утверждение справедливо и относительно* (2.14).

Доказательство. Из гильбертовости ядра $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ заключаем, в силу самого определения, что для любой функции $g(u) \in H_2$ существует единственная функция $f(x) \in H_1$ такая, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(u) e_\xi(u)\, d\sigma_2(u).$$

В силу же бесселевости ядра $\widetilde{K}_*(\xi, x)$, для любой функции $f(x) \in H_1$ существует функция $g_1(u) \in H_2$ такая, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} g_1(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u).$$

Отсюда следует, что $g_1(u) \equiv g(u)$ и что соотношение (2.13) выполняется при любом $f \in H_1$, если $g(u) \in H_2$ подобрано соответствующим образом, и, наоборот, при любом $g(u) \in H_2$ и соответствующем выборе $f \in H_1$. Рассматривая $f(x)$ как значение оператора, действующего на $g(u)$, заключаем, что

$$\|f\|_{\sigma_1} \leqslant M_1 \|g\|_{\sigma_2}$$

при некотором $M_1 > 0$, ибо этот оператор замкнут, как это легко усмотреть из (2.13), и потому ограничен [см. ([8])]. Рассматривая же $g(u)$ как значение оператора, действующего на $f(x)$, находим по той же причине, что при некотором $M > 0$

$$\|g\|_{\sigma_2} \leqslant M \|f\|_{\sigma_1}.$$

Этим доказаны все утверждения теоремы $\left(\text{если положить } m = \frac{1}{M_1}\right)$, касающиеся формулы (2.13). Аналогично устанавливаются утверждения, касающиеся формулы (2.14).

ТЕОРЕМА 2.8. *Для того чтобы B-ядро* $\widetilde{K}(\xi, x)$ *было ядром Рисса — Фишера, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный ограниченный оператор A, отображающий* H_1 *на все* H_1, *такой, что*

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \tag{2.15}$$

где $K(\xi, x)$ *— ядро некоторого изометрического оператора. При этом выполнение условия* (2.15) *обеспечивает существование ограниченного обратного оператора* A^{-1}.

Доказательство. В силу теоремы 2.2, из (2.15) следует, что ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ бесселево, а потому оператор A осуществляет взаимно однозначное отображение пространства H_1 на все пространство H_1, как это следует из теоремы 2.4. Поскольку пространство H_1 полно, то в силу теоремы Банаха [см. ([9])] оператор A^{-1} ограничен.

Достаточность условия (2.15) теперь уже очевидна, ибо отсюда следует, что

$$\widetilde{K}(\xi, x) = A^{-1} K(\xi, x),$$

а это условие вместе с условием (2.15) означает, что ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ является одновременно и гильбертовым и бесселевым, в силу теорем 2.3 и 2.2 соответственно.

Докажем необходимость. Если B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса — Фишера, то, согласно теоремам 2.2 и 2.3, существуют такие ограниченные операторы A и C, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \quad \widetilde{K}(\xi, x) = C\, K(\xi, x),$$

где $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора. Отсюда следует, что ограниченные операторы AC и CA удовлетворяют условиям:

$$\widetilde{K}(\xi, x) = CA\widetilde{K}(\xi, x), \quad K(\xi, x) = ACK(\xi, x).$$

Из полноты ядер $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $K(\xi, x)$ вытекает, что ограниченные операторы CA и AC совпадают с единичным оператором на плотном множестве и поэтому операторы A и C являются обратными друг другу, что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 2.9. *Для того чтобы B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ было ядром Рисса — Фишера, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой ограниченный положительно определенный эрмитов оператор T, определенный на H_1, для которого при всех $\xi \in (a_2, b_2)$ выполняется условие:*

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = T\widetilde{K}(\xi, x).$$

Доказательство. Пусть условие теоремы выполнено. Если положить $A = T^{\frac{1}{2}}$, то, как мы видели при доказательстве теоремы 2.6,

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \tag{2.16}$$

где $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора. С другой стороны, как известно из функционального анализа [см. ([8])], для того чтобы ограниченный линейный оператор A имел ограниченный обратный, определенный на всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы эрмитовы операторы A^*A и AA^* были положительно определенными. Поскольку в рассматриваемом случае $A^* = A$ и $AA = T$, где оператор T, по условию, положительно определен, то оператор A^{-1} определен на всем H_1 и ограничен. Из теоремы 2.8 следует, что $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса — Фишера.

Обратно, допустим, что $\widetilde{K}(\xi, x)$ — ядро Рисса — Фишера. Тогда, по теореме 2.8, выполняется равенство (2.16), где оператор A^{-1} существует и ограничен. Согласно упомянутой выше теореме функционального анализа, оператор $T = A^*A$ положительно определен. С другой стороны, при доказательстве теоремы 2.8 мы видели, что в рассматриваемом случае

$$A^*A\widetilde{K}(\xi, x) = T\widetilde{K}(\xi, x) = \widetilde{K}^*(\xi, x).$$

Этим теорема полностью доказана.

§ 3. Ядра Рисса и изометрические пары

В этом параграфе приводится несколько теорем о базисных ядрах или ядрах Рисса *. В первой из них дается аналитическое представление ядер, порожденных произведением двух изометрических пар. Вторая теорема существенно дополняет принятое нами ранее определение базисов Рисса. Далее устанавливается эквивалентность понятий ядер Рисса и ядер Рисса — Фишера и доказываются две теоремы о ядрах, близких в том или ином смысле к ядрам Рисса.

* См. определение 1.5.

1. При доказательстве этих теорем будут существенно использованы понятие изометрической пары операторов и один результат об аналитическом представлении такой пары, принадлежащие одному из авторов настоящей работы [см. ([1])]. Приведем соответствующие формулировки.

Определение 3.1. Пусть линейные операторы R_1 и R_{*1} отображают все пространство $H_1 = L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ на все пространство $H_2 = L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$. Мы скажем, что эти операторы составляют изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$, если для произвольных элементов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из H_1 имеют место равенства

$$(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_{*1}f_1, R_1f_2)_{\sigma_2}{}^{*}. \tag{3.1}$$

Отсюда следует, что обратные к R_1 и R_{*1} операторы $R_2 = R_1^{-1}$ и $R_{*2} = R_{*1}^{-1}$ также существуют и отображают все пространство H_1 на все пространство H_1, составляя при этом изометрическую пару $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ Иначе говоря, равенство

$$(g_1, g_2)_{\sigma_2} = (R_2g_1, R_{*2}g_2)_{\sigma_1} = (R_{*2}g_1, R_2g_2)_{\sigma_1} \tag{3.2}$$

имеет место для произвольных элементов $g_1(u)$ и $g_2(u)$ из H_2. Поэтому естественно говорить, что изометрические пары $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ и $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ обратны друг другу. Очевидно, далее, что если $R_{*1} = R_1 = V_1$ (т. е. если $R_{*2} = R_2 = V_2$), то условия (3.1) или (3.2) совпадают с обычными условиями изометрического отображения пространств H_1 и H_2 друг на друга при помощи изометрического оператора V_1 или оператора $V_2 = V_1^{-1}$, обратного ему.

Аналитическую характеристику изометрических операторов дает теорема Бохнера в обобщенной формулировке (теорема 2 а). Как естественное обобщение этой теоремы, в работе ([1]) была доказана следующая теорема, которая ниже будет существенно использована.

ТЕОРЕМА 3 а. *Пусть операторы R_1 и R_{*1} отображают все пространство H_1 на все пространство H_2, составляя при этом изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *функции*

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{K}(\xi, x) &= R_{*2}e_\xi(u) \in H_1, \\ \widetilde{K}_*(\xi, x) &= R_2e_\xi(u) \in H_1, \end{aligned}\quad \xi \in (a_2, b_2),\right\} \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{H}(\xi, u) &= R_{*1}e_\xi(x) \in H_2, \\ \widetilde{H}_*(\xi, u) &= R_1e_\xi(x) \in H_2, \end{aligned}\quad \xi \in (a_1, b_1),\right\} \tag{3.4}$$

удовлетворяют уравнениям:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi, \eta \in (a_2, b_2), \tag{3.5}$$

$$\int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}(\xi, u)\, \widetilde{H}_*(\eta, u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi, \eta \in (a_1, b_1), \tag{3.6}$$

---

* Легко видеть, что при этом также $(f_1, f_2)_{\sigma_1} = (R_1f_1, R_{*1}f_2)$.

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\eta, x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_1, b_1), \quad \eta \in (a_2, b_2), \tag{3.7}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}_*(\eta, x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_1} \overline{\widetilde{H}(\xi, u)}\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_1, b_1), \quad \eta \in (a_2, b_2); \tag{3.8}$$

б) *отображение* $g(u) = R_1 f(x)$, $f(x) = R_2 g(u)$, *осуществляется согласно формулам:*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_2} \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{3.9}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x),\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}(\xi, u)}\, g(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_1, b_1), \tag{3.10}$$

а отображение $g(u) = R_{*1} f(x)$, $f(x) = R_{*2}\, g(u)$, — *согласно формулам:*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{3.11}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, g(u)\, d\sigma_2(u), \quad \xi \in (a_1, b_1); \tag{3.12}$$

в) *для операторов* R_1 *и* R_{*1} *справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} m_1 \| f \|_{\sigma_1} \leqslant \| R_1 f \|_{\sigma_2} \leqslant M_1 \| f \|_{\sigma_1}, \\ m_{*1} \| f \|_{\sigma_1} \leqslant \| R_{*1} f \|_{\sigma_2} \leqslant M_{*1} \| f \|_{\sigma_1}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где f — *любой элемент пространства* H_1, *или, что то же самое, для операторов* R_2 *и* R_{*2} *справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_1} \| g \|_{\sigma_2} \leqslant \| R_2 g \|_{\sigma_1} \geqslant \frac{1}{m_1} \| g \|_{\sigma_2}, \\ \frac{1}{M_{*1}} \| g \|_{\sigma_2} \leqslant R_{*2} g \|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{m_{*1}} \| g \|_{\sigma_2}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где g — *любой элемент пространства* H_2. *Здесь* m_1, M_1, m_{*1}, M_{*1} — *некоторые положительные постоянные, зависящие от изометрической пары* $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$.

Удобно принять следующее определение.

Определение 3.2. Условимся говорить, что взаимно обратные изометрические пары $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$ и $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2 H_1}$ принадлежат классу

$$[m_1, M_1;\, m_{*1}, M_{*1}] \quad (0 < m_1 < M_1,\; 0 < m_{*1} < M_{*1}),$$

если для соответствующих операторов (компонентов этих пар) выполняется условие (3.13), или, что то же самое, условие (3.14).

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть даны три гильбертовых пространства:* $H_k = L^2_{\sigma_k}(a_k, b_k)$ $(k = 1, 2, 3)$. *Предположим, что четверка функций*

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}_{12}(\xi, x), \quad \widetilde{K}_{*12}(\xi, x) \in H_1, \quad \xi \in (a_2, b_2), \\ &\widetilde{H}_{12}(\xi, u), \quad \widetilde{H}_{*12}(\xi, u) \in H_2, \quad \xi \in (a_1, b_1), \end{aligned} \tag{3.15'}$$

порождается взаимно обратными изометрическими парами $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и* $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$, *т. е.*

$$R_{*1}e_{\xi}(x) = \widetilde{H}_{12}(\xi, u), \quad R_{*2}e_{\xi}(u) = \widetilde{K}_{12}(\xi, x), \tag{3.16}$$

$$R_1e_{\xi}(x) = \widetilde{H}_{*12}(\xi, u), \quad R_2e_{\xi}(u) = \widetilde{K}_{*12}(\xi, u). \tag{3.17}$$

Пусть, далее, четверка функций

$$\begin{aligned} &\widetilde{K}_{23}(\xi, u), \widetilde{K}_{*23}(\xi, u) \in H_2, \quad \xi \in (a_3, b_3), \\ &\widetilde{H}_{23}(\xi, t), \widetilde{H}_{*23}(\xi, t) \in H_3, \quad \xi \in (a_2, b_2), \end{aligned} \tag{3.15''}$$

порождается взаимно обратными изометрическими парами $\{S_1, S_{*1}\}_{H_2H_3}$ *и* $\{S_2, S_{*2}\}_{H_3H_2}$, *т. е.*

$$S_{*1}e_{\xi}(u) = \widetilde{H}_{23}(\xi, t), \quad S_{*2}e_{\xi}(t) = \widetilde{K}_{23}(\xi, u), \tag{3.18}$$

$$S_1e_{\xi}(u) = \widetilde{H}_{*23}(\xi, t), \quad S_2e_{\xi}(t) = \widetilde{K}_{*23}(\xi, u). \tag{3.19}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *операторы*

$$T_1 = S_1R_1, \quad T_{*1} = S_{*1}R_{*1} \tag{3.20}$$

и

$$T_2 = R_2S_2, \quad T_{*2} = R_{*2}S_{*2} \tag{3.21}$$

составляют взаимно обратные изометрические пары $\{T_1, T_{*1}\}_{H_1H_3}$ *и* $\{T_2, T_{*2}\}_{H_3H_1}$;

б) *четверка функций*

$$\widetilde{K}_{13}(\xi, x), \ \widetilde{K}_{*13}(\xi, x) \in H_1, \quad \xi \in (a_3, b_3),$$

$$\widetilde{H}_{13}(\xi, t), \ \widetilde{H}_{*13}(\xi, t) \in H_3, \quad \xi \in (a_1, b_1),$$

порождаемая взаимно обратными парами $\{T_1, T_{*1}\}_{H_1H_3}$ *и* $\{T_2, T_{*2}\}_{H_3H_1}$, *т. е.*

$$T_{*1}e_{\xi}(x) = \widetilde{H}_{13}(\xi, t), \quad T_{*2}e_{\xi}(t) = \widetilde{K}_{13}(\xi, x), \tag{3.22}$$

$$T_1e_{\xi}(x) = \widetilde{H}_{*13}(\xi, t), \quad T_2e_{\xi}(t) = \widetilde{K}_{*13}(\xi, x), \tag{3.23}$$

определяется из формул:

$$\int_{a_2}^{b_1} \widetilde{K}_{13}(\xi, x)\, e_{\eta}(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}_{23}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{H}_{*12}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u), \tag{3.24}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}_{*13}(\xi, x)\, e_{\eta}(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}_{*23}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{H}_{12}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u), \tag{3.25}$$

$$\int_{a_3}^{b_3} \widetilde{H}_{13}(\xi, t)\, e_{\eta}(t)\, d\sigma_3(t) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_{12}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{K}_{*23}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u), \tag{3.26}$$

$$\int_{a_3}^{b_3} \widetilde{H}_{*13}(\xi, t)\, e_{\eta}(t)\, d\sigma_3(t) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_{*12}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{K}_{23}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u). \tag{3.27}$$

Доказательство. Поскольку операторы R_{*1} и R_{*2} обратны друг другу, то из (3.22) и (3.21) получаем, учитывая (3.17) и (3.18):

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}_{13}(\xi, x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = (T_{*2} e_\xi(t), e_\eta(x))_{\sigma_1} =$$
$$= (R_{*2} S_{*2} e_\xi(t), e_\eta(x))_{\sigma_1} = (R_{*1}R_{*2}S_{*2}e_\xi(t), R_1 e_\eta(x))_{\sigma_2} =$$
$$= (S_{*2}e_\xi(t), R_1 e_\eta(x))_{\sigma_2} = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}_{23}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{H}_{*12}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u),$$

что совпадает с (3.24). Далее, пользуясь тем, что операторы R_1 и R_2 обратны друг другу, и учитывая формулы (3.23), (3.21), (3.16) и (3.19), находим:

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}_{*13}(\xi, x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = (T_2 e_\xi(t), e_\eta(x))_{\sigma_1} =$$
$$= (R_2 S_2 e_\xi(t), e_\eta(x))_{\sigma_1} = (R_1 R_2 e_\xi(t), R_{*1} e_\eta(x))_{\sigma_2} =$$
$$= (S_2 e_\xi(t), R_{*1} e_\eta(x))_{\sigma_2} = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}_{*23}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{H}_{12}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u),$$

что совпадает с (3.25). Чтобы доказать (3.26), заметим, что операторы S_1 и S_2 обратны друг другу, и воспользуемся формулами (3.22), (3.20), (3.16) и (3.19). Получим:

$$\int_{a_3}^{b_3} \widetilde{H}_{13}(\xi, t)\, e_\eta(t)\, d\sigma_3(t) = (T_{*1} e_\xi(t), e_\eta(t))_{\sigma_3} = (S_{*1} R_{*1} e_\xi(x), e_\eta(t))_{\sigma_3} =$$
$$= (S_{*1} R_{*1} e_\xi(x), S_1 S_2 e_\eta(t))_{\sigma_3} = (R_{*1} e_\xi(x), S_2 e_\eta(t))_{\sigma_2} =$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_{12}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{K}_{*23}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u).$$

Наконец, для доказательства (3.27) заметим, что операторы S_{*1} и S_{*2} обратны друг другу, и примем во внимание формулы (3.23), (3.20), (3.17) и (3.18). Тогда найдем:

$$\int_{a_3}^{b_3} \widetilde{H}_{*13}(\xi, t)\, e_\eta(t)\, d\sigma_3(t) = (T_1 e_\xi(x), e_\eta(t))_{\sigma_3} = (S_1 R_1 e_\xi(x), e_\eta(t))_{\sigma_3} =$$
$$= (S_1 R_1 e_\xi(x), S_{*1} S_{*2} e_\eta(t))_{\sigma_3} = (R_1 e_\xi(x), S_{*2} e_\eta(t))_{\sigma_2} =$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_{*12}(\xi, u)\, \overline{\widetilde{K}_{23}(\eta, u)}\, d\sigma_2(u),$$

что и доказывает теорему.

Отметим, что в том весьма частном случае, когда все пространства H_k $(k = 1, 2, 3)$ совпадают с пространством $H = L_2(0, \infty)$, а все операторы, о которых говорилось в доказанной теореме, являются изометрическими, соответствующий результат содержится в работе ([10]).

2. Установим одно важное свойство ядер Рисса. Если $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$, $\xi \in (a_2, b_2)$, есть ядро Рисса, то, согласно определению 1.5 и замечанию

к нему, можно утверждать следующее:

а) существует некоторая функция $\widetilde{K}_*(\xi, x) \in H_1$, $\xi \in (a_2, b_2)$, такая, что

$$\int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x)\, \widetilde{K}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u);$$

б) существуют функции $\widetilde{H}(\xi, u)$ и $\widetilde{H}_*(\xi, u) \in H_2$, $\xi \in (a_1, b_1)$, связанные с функциями $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ формулами:

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\eta(u)\, \widetilde{H}_*(\xi, u)\, d\sigma_2(u),$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, e_\xi(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\eta(u)\, \widetilde{H}(\xi, u)\, d\sigma_2(u).$$

ТЕОРЕМА 3.2 *Пусть* $\widetilde{K}(\xi, x)$ *есть ядро Рисса. Тогда существуют взаимно обратные изометрические пары операторов* $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и* $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ *такие, что*

$$\widetilde{K}(\xi, x) = R_{*2}e_\xi(u), \quad \widetilde{K}_*(\xi, x) = R_2 e_\xi(u),$$

$$\widetilde{H}(\xi, u) = R_{*1}e_\xi(u), \quad \widetilde{H}_*(\xi, u) = R_1 e_\xi(u),$$

и справедливы все утверждения с), б) *и* в) *теоремы* 3 а.

Обратно, каковы бы ни были взаимно обратные изометрические пары $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и* $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$, *функции* $\widetilde{K}(\xi, x)$ *и* $\widetilde{K}_*(\xi, x)$, *определенные формулами* (3.3), *являются взаимно сопряженными ядрами Рисса в пространстве* H_1, *а функции* $\widetilde{H}(\xi, u)$ *и* $\widetilde{H}_*(\xi, u)$, *определенные формулами* (3.4),— *взаимно сопряженными ядрами Рисса в пространстве* H_2.

Доказательство. Вторая часть теоремы немедленно вытекает из теоремы 3 а. Обращаясь к доказательству первой части, вспомним, что, по определению ядер Рисса, любой функции $f \in H_1$ по формулам (1.25) и (1.26) однозначно соответствуют (в силу полноты системы функций $e_\xi(x)$) две функции $g(u)$ и $g^*(u)$, которые удобно обозначить соответственно через $R_{*1}f$ и $R_1 f$. Таким образом, в новых обозначениях формулы (1.25) и (1.26) перепишутся следующим образом:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\overline{\widetilde{K}_*(\eta,x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} R_{*1} f\cdot e_\eta(u)\, d\sigma_2(u), \tag{3.28}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} R_1 f\cdot e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{3.29}$$

Условие (1.27) означает, что при этом

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_\eta(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} R_{*1} f\cdot \overline{\widetilde{H}_*(\eta, u)}\, d\sigma_2(u) \tag{3.30}$$

и

$$\int_{a_1}^{b_1} e_\xi(x)\overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{H}_*(\xi, u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{3.31}$$

Для доказательства теоремы достаточно обнаружить, что операторы R_1 и R_{*1} линейны, ограничены и составляют изометрическую пару, т. е. что при всех $f, \varphi \in H_1$ выполняется равенство

$$(f, \varphi)_{\sigma_1} = (R_{*1}f, R_1\varphi)_{\sigma_2}, \tag{3.32}$$

причем область значений операторов R_{*1} и R_1 совпадает с H_2. Тогда все остальные утверждения будут вытекать из теоремы 3 а.

Но из (3.28) и (3.29) немедленно следует, что операторы R_{*1} и R_1 аддитивны. С другой стороны, из тех же соотношений следует, что эти операторы замкнуты, а поэтому ограничены [см. ([8])]. Заметим, далее, что (3.31) означает, что

$$R_1 e_\xi (x) = \widetilde{H}_* (\xi, u),$$

а поэтому равенство (3.30) сводится к равенству

$$(f, e_\eta)_{\sigma_1} = (R_{*1}f, R_1 e_\eta)_{\sigma_2}. \tag{3.33}$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ — произвольный элемент пространства H_1. В силу плотности системы функций $e_\xi(x)$ в H_1, найдется такая последовательность чисел $c_{n,i}$ и $\xi_{n,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi(x) - \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} e_{\xi_{n,i}}(x)\|_{\sigma_1} = 0.$$

С другой стороны, из (3.33) следует:

$$(f, \sum_{i=1}^{n} c_{n,i} e_{\xi_{n,i}})_{\sigma_1} = (R_{*1} f, R_1 \{\sum_{i=1}^{n} c_{n,i} e_{\xi_{n,i}}\})_{\sigma_2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая ограниченность оператора R_1, находим, что (3.32) выполняется при всех $f, \varphi \in H_1$. Отсюда заключаем, что $\widetilde{K}(\eta, x)$ и $\widetilde{K}_*(\eta, x)$ полны* в H_1. В самом деле, если для некоторой функции $\varphi(x) \in H_1$

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi(x) \overline{\widetilde{K}(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = 0$$

при всех $\eta \in (a_2, b_2)$, то из (3.29) будет следовать, что $R_1\varphi = 0$. Но тогда из (3.32) вытекает, что при всех $f \in H_1$ выполняется равенство

$$(f, \varphi)_{\sigma_1} = 0,$$

откуда получаем

$$\varphi = 0.$$

Аналогично, если для некоторой функции $f(x) \in H_1$

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)}\, d\sigma_1(x) = 0$$

при всех $\eta \in (a_2, b_2)$, то из (3.28) находим, что $R_{*1}f = 0$. Но тогда из (3.32) будет следовать, что при всех $\varphi \in H_1$ выполняется равенство $(f, \varphi)_{\sigma_1} = 0$, откуда получаем:

$$f = 0.$$

* См. определение 1. 1.

Таким образом, мы доказали, что $\widetilde{K}(\eta, x)$ и $\widetilde{K}_*(\eta, x)$ являются B-ядрами *. В силу условий (1.25) и (1.26) отсюда заключаем, что $\widetilde{K}(\eta, x)$ и $\widetilde{K}_*(\eta, x)$ являются бесселевыми ядрами, а потому, согласно теореме 2.5, и гильбертовыми. Но это и означает, что область значений операторов R_{*1} и R_1 совпадает с H_2. Следовательно, операторы R_{*1} и R_1 составляют изометрическую пару, что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса — Фишера, то оно является также ядром Рисса и поэтому выполняются все утверждения теоремы* 3.2.

Доказательство. Если B-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса — Фишера, то, согласно теореме 2.8, существует линейный ограниченный оператор A, отображающий H_1 на все H_1 и такой, что

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \tag{3.34}$$

где $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора. Оператор A имеет ограниченный обратный A^{-1} и поэтому (3.34) можно записать в эквивалентной форме:

$$\widetilde{K}(\xi, x) = A^{-1}K(\xi, x). \tag{3.34'}$$

Кроме того, заметим, что из (2.7) следует (это было показано в начале доказательства теоремы 2.2):

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = A^*K(\xi, x). \tag{3.35}$$

Пусть V_1 — изометрический оператор, соответствующий ядру $K(\xi, x$ и отображающий все пространство H_1 на все пространство H_2, а $V_2 = V_1^{-1}$ Составим линейные операторы

$$R_1 = V_1(A^{-1})^*, \quad R_{*1} = V_1A, \tag{3.36}$$

отображающие все пространство H_1 на все пространство H_2. Легко видеть, что операторы

$$R_2 = A^*V_2, \quad R_{*2} = A^{-1}V_2 \tag{3.37}$$

осуществляют обратное отображение, т. е.

$$R_1R_2 = R_{*1}R_{*2} = I_2, \quad R_2R_1 = R_{*2}R_{*1} = I_1,$$

где I_k $(k = 1, 2)$ — единичный оператор в пространстве H_k.

Докажем, что операторы R_1 и R_{*1} составляют изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$.

Действительно, если f_1 и f_2 — произвольные элементы из H_1, то, учитывая изометричность оператора V_1 и формулы (3.36), находим:

$$(R_1f_1, R_{*1}f_2)_{\sigma_2} = (V_1(A^{-1})^*f_1, V_1Af_2)_{\sigma_2} =$$
$$= ((A^{-1})^*f_1, Af_2)_{\sigma_1} = (f_1, A^{-1}Af_2)_{\sigma_1} = (f_1, f_2)_{\sigma_1}.$$

* См. определение 1. 2.

Но это и означает, что операторы R_1 и R_{*1} составляют изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$, а потому, согласно теореме 3.2, $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса. Заметив теперь, что, согласно формуле (2.1),

$$K(\xi, x) = V_2 e_\xi(u),$$

$$\xi \in (a_2, b_2),$$

из (3.34′) и (3.37) получаем:

$$\widetilde{K}(\xi, x) = A^{-1} V_2 e_\xi(u) = R_{*2} e_\xi(u),$$

а из (3.35) и (3.37) следует, что

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = A^* V_2\, e_\xi(u) = R_2 e_\xi(u).$$

Полагая, далее,

$$\widetilde{H}(\xi, u) = R_{*1} e_\xi(x),$$

$$\widetilde{H}_*(\xi, u) = R_1 e_\xi(x),$$

заключаем, на основании теоремы 3.2, что справедливы все утверждения а), б) и в) теоремы 3 а.

3. В работе ([1]) было дано обобщение теоремы Палея — Винера [см. ([2]) и ([8])] о системах функций, близких к полным ортонормальным. Именно, в предположении, что ядро $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ в определенном смысле близко к ядру $K(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ некоторого изометрического оператора, было установлено, что $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса, т. е. порождается некоторой изометрической парой операторов.

Приведем здесь дальнейшее обобщение этой теоремы.

Обозначим через H_2^* совокупность всех комплексно-значных функций ограниченной вариации, непрерывных справа на (a_2, b_2) и обращающихся в нуль вне замкнутых слева интервалов $[\alpha, \beta) \subset (a_2, b_2)$ (нефиксированных, зависящих от выбора функции).

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть* $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ *есть ядро Рисса, порожденное взаимно обратными изометрическими парами* $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и* $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2H_1}$ *из класса* $[m_1, M_1; m_{*1}, M_{*1}]$ *.

Пусть, далее, для функции $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ *существует такая постоянная* ϑ, $0 < \vartheta < \dfrac{1}{M_{*1}^0}$, *что*

$$\int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{a_2}^{b_2} \{\widetilde{K}(y, x) - \widetilde{\widetilde{K}}(y, x)\}\, dg(y) \right|^2 d\sigma_1(x) \leqslant \vartheta^2 \int_{a_2}^{b_2} |g(y)|^2\, d\sigma_2(y) \qquad (3.38)$$

при всех $g(y) \in H_2^*$.

Тогда $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ *есть также ядро Рисса, причем соответствующие ему взаимно обратные изометрические пары операторов* $\{r_1, r_{*1}\}_{H_1H_2}$ *и* $\{r_2, r_{*2}\}_{H_2H_1}$ *принадлежат классу* $\left[m_1(1 - \vartheta_0), M_1(1 + \vartheta_0); \dfrac{m_{*1}}{1 + \vartheta_0}, \dfrac{M_{*1}}{1 - \vartheta_0}\right]$, *где* $\vartheta_0 = \vartheta M_{*1}^0$.

* См. определение 3.2.

Доказательство. Пусть $H_1^* = R_2 H_2^*$ есть образ многообразия H_2^* в H_2 при отображении $f = R_{*2}g$, $g \in H_2$. Из очевидного неравенства

$$\| R_{*2}g_1 - R_{*2}\, g_2 \|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{M_{*1}^0} \| g_1 - g_2 \|_{\sigma_2}$$

следует, что образ H_1^* плотного в H_2 многообразия H_2^* будет плотным в H_1. Пусть функция $f(x) \in H_1^*$ произвольна, а $g(y) = R_{*1} f(x) \in H_2^*$. Тогда, обозначив

$$Uf(x) = -\int_{a_2}^{b_2} \{\widetilde{K}(y, x) - \widetilde{\widetilde{K}}(y, x)\}\, dg(y), \tag{3.39}$$

в силу условия близости (3.38) будем иметь:

$$\int_{a_1}^{b_1} |Uf(x)|^2\, d\sigma_1(x) \leqslant \vartheta^2 \int_{a_2}^{b_2} |g(y)|^2\, d\sigma_2(y) =$$
$$= \vartheta^2 \| R_{*1} f(x) \|_{\sigma_2}^2 \leqslant (\vartheta M_{*1}^0)^2 \| f \|_{\sigma_1}^2 = \vartheta_0^2 \| f \|_{\sigma_1}^2, \tag{3.40}$$

где $\vartheta_0 = \vartheta M_{*1}^0$, т. е. $0 < \vartheta_0 < 1$.

Иначе говоря, на H_1^* определен линейный оператор U, переводящий любой элемент $f \in H_1^*$ в элемент $Uf \in H_1$, причем

$$\| Uf \|_{\sigma_1} \leqslant \vartheta_0 \| f \|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1^*.$$

Но поскольку многообразие H_1^* плотно в H_1, то оператор U можно распространить на все пространство H_1 без увеличения нормы, т. е.

$$\| Uf \|_{\sigma_1} \leqslant \vartheta_0 \| f \|_{\sigma_1}, \quad f \in H_1. \tag{3.41}$$

Таким образом,

$$\| U \| \leqslant \vartheta_0 < 1. \tag{3.42}$$

Обозначим через $\Omega f(x)$ сумму ряда

$$\Omega f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U^k f(x), \quad f(x) \in H_1, \tag{3.43}$$

сильно сходящегося в H_1 в силу оценок

$$\| U^k \| \leqslant \vartheta_0^k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

и пусть

$$T = I_1 - U, \tag{3.44}$$

где I_1 есть единичный оператор в пространстве H_1. Из (3.43) заключаем, что оператор T имеет обратный, причем

$$T^{-1} = \Omega \tag{3.45}$$

(оператор T отображает все пространство H_1 на все пространство H_1).

Если ядро Рисса $\widetilde{K}(\xi, x)$ порождается взаимно обратными изометрическими парами $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1 H_2}$ и $\{R_2, R_{*2}\}_{H_2 H_1}$, то, согласно теореме 3.2,

мы должны иметь:

$$\widetilde{K}(\xi, x) = R_{*2}\, e_\xi(y), \qquad \xi \in (a_2, b_2),$$

т. е.

$$e_\xi(y) = R_{*1}\widetilde{K}(\xi, x), \quad \xi \in (a_2, b_2). \tag{3.46}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$e_\xi(y) \in H_2^*, \quad \xi \in (a_2, b_2).$$

Поэтому значение оператора $U\widetilde{K}(\xi, x)$ $(\xi \in (a_2, b_2))$ может быть вычислено посредством формулы

$$U\widetilde{K}(\xi, x) = -\int_{a_2}^{b_2} \{\widetilde{K}(y, x) - \widetilde{\widetilde{K}}(y,x)\}\, de_\xi(y),$$

из которой, очевидно, следует:

$$U\widetilde{K}(\xi, x) = \widetilde{K}(\xi, x) - \widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), \quad \xi \in (a_2, b_2). \tag{3.47}$$

Теперь из (3.44) получаем:

$$T\widetilde{K}(\xi, x) = \widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), \quad \xi \in (a_2, b_2). \tag{3.48}$$

Учитывая (3.46), эту формулу можно переписать в виде:

$$\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x) = TR_{*2}e_\xi(y), \quad \xi \in (a_2, b_2). \tag{3.49}$$

С другой стороны, легко видеть, что операторы T^* и $(T^{-1})^*$ также отображают все H_1 на все H_1, причем, как известно,

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$$

Введем в рассмотрение следующие линейные операторы:

$$\begin{aligned} r_1 &= R_1T^*, \qquad r_{*1} = R_{*1}T^{-1}, \\ r_2 &= (T^{-1})^*R_2, \quad r_{*2} = TR_{*2}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Операторы r_1 и r_{*1} отображают все пространство H_1 на все пространство H_2, а операторы r_2 и r_{*2} осуществляют обратное отображение, т. е.

$$\begin{aligned} r_1r_2 &= r_{*1}r_{*2} = I_2, \\ r_2r_1 &= r_{*2}r_{*1} = I_1, \end{aligned} \tag{3.51}$$

где I_k $(k = 1, 2)$, как и раньше, есть единичный оператор в пространстве H_k. Покажем, что операторы r_1 и r_{*1} составляют изометрическую пару $\{r_1, r_{*1}\}_{H_1H_2}$.

В самом деле, если $f_1, f_2 \in H_1$, то, учитывая, что по условию операторы R_1 и R_{*1} составляют изометрическую пару $\{R_1, R_{*1}\}_{H_1H_2}$, из (3.50) найдем:

$$\begin{aligned} (r_1f_1, r_{*1}f_2)_{\sigma_2} &= (R_1T^*f_1, R_*T^{-1}f_2)_{\sigma_2} = \\ &= (T^*f_1, T^{-1}f_2)_{\sigma_1} = (f_1, TT^{-1}f_2)_{\sigma_1} = (f_1, f_2)_{\sigma_1}, \end{aligned}$$

что и доказывает наше утверждение, ибо, как мы видели, операторы r_1 и r_{*1} отображают все пространство H_1 на все пространство H_2.

Далее, заметив, что согласно (3.50) $r_{*2} = TR_{*2}$, можно переписать формулу (3.49) в виде:

$$\tilde{\tilde{\tilde{K}}}(\xi, x) = r_{*2}e_{\xi}(y), \qquad \xi \in (a_2, b_2), \tag{3.49'}$$

а это и значит, что функция $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}(\xi, x)$ является ядром Рисса. Поэтому если вместе с функцией

$$\tilde{\tilde{\tilde{K}}}(\xi, x) = r_{*2}e_{\xi}(y) \in H_1, \qquad \xi \in (a_2, b_2),$$

ввести в рассмотрение еще три функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\tilde{K}}}_*(\xi, x) &= r_2 e_{\xi}(y) \in H_1, \quad \xi \in (a_2, b_2), \\ \tilde{\tilde{\tilde{H}}}(\xi, u) &= r_{*1} e_{\xi}(x) \in H_2, \quad \xi \in (a_1, b_1), \\ \tilde{\tilde{\tilde{H}}}_*(\xi, u) &= r_1 e_{\xi}(x) \in H_2, \quad \xi \in (a_1, b_1), \end{aligned}$$

то при помощи четверки функций $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}$, $\tilde{\tilde{\tilde{K}}}_*$, $\tilde{\tilde{\tilde{H}}}$ и $\tilde{\tilde{\tilde{H}}}_*$, удовлетворяющих условию б) теоремы 3 а, отображения $g = r_1 f$, $f = r_2 g$, или $g = r_{*1} f$, $g = r_{*2} f$, аналитически будут осуществляться посредством формул вида (3.9), (3.10) или (3.11), (3.12) соответственно.

Наконец, из (3.41) и (3.44) получаем:

$$(1 - \vartheta_0)\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|Tf\|_{\sigma_1} = \|T^* f\|_{\sigma_1} \leqslant (1 + \vartheta_0)\|f\|_{\sigma_1} \tag{3.52}$$

и поэтому

$$\frac{\|f\|_{\sigma_1}}{1 + \vartheta_0} \leqslant \|T^{-1} f\|_{\sigma_1} = \|(T^{-1})^* f\|_{\sigma_1} \leqslant \frac{\|f\|_{\sigma_1}}{1 - \vartheta_0}. \tag{3.52'}$$

С другой стороны, согласно условию теоремы, имеем:

$$\left.\begin{aligned} m_1\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|R_1 f\|_{\sigma_2} \leqslant M_1\|f\|_{\sigma_1}, \\ m_{*1}\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \|R_{*1} f\|_{\sigma_2} \leqslant M_{*1}\|f\|_{\sigma_1}, \end{aligned} \quad f \in H_1, \right\} \tag{3.53}$$

откуда следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{M_1}\|g\|_{\sigma_2} \leqslant \|R_2 g\|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{m_1}\|g\|_{\sigma_2}, \\ \frac{1}{M_{*1}}\|g\|_{\sigma_2} \leqslant \|R_{*2} g\|_{\sigma_1} \leqslant \frac{1}{m_{*1}}\|g\|_{\sigma_2}. \end{aligned} \quad g \in H_2. \right\} \tag{3.54}$$

Из определения (3.50) операторов r_k, r_{*k} $(k = 1, 2)$, на основании оценок (3.52), (3.52′), (3.53) и (3.54) без труда заключаем, что взаимно обратные изометрические пары $\{r_1, r_{*1}\}_{H_1 H_2}$ и $\{r_2, r_{*2}\}_{H_2 H_1}$ принадлежат классу $\left[m_1(1 - \vartheta_0), M_1(1 + \vartheta_0); \frac{m_{*1}}{1 + \vartheta_0}, \frac{M_{*1}}{1 - \vartheta_0}\right]$, что и завершает доказательство теоремы.

Следует отметить, что в частном случае, когда $H_1 = L^2(a, b)$ и $H_2 = L^2_{[u]}(0, \infty)$, из доказанной теоремы легко получить важное обобщение теоремы Палея и Винера в обычной формулировке [см. ([2]), ([8])], но мы на этом останавливаться не будем.

4. Докажем заключительную теорему этого параграфа, являющуюся естественным континуальным аналогом теоремы Н. К. Бари о базисах Рисса [см. ([6])].

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть* $\widetilde{K}(\xi, x)$ — *ядро Рисса, допускающее представление*

$$\widetilde{K}(\xi, x) = \int_{a_2}^{b_2} \varphi(t, x)\, e_\xi(t)\, d\sigma_2(t), \qquad x \in (a_1, b_1), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{3.55}$$

а пусть функция

$$\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x) = \int_{a_2}^{b_2} \psi(t, x)\, e_\xi(t)\, d\sigma_2(t), \qquad x \in (a_1, b_1), \quad \xi \in (a_2, b_2), \tag{3.56}$$

удовлетворяет одному из следующих двух условий:

а) *функция* $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x) \in H_1$ *и полна в* H_1;

б) $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ *допускает биортогонализацию, т. е. существует функция* $\widetilde{\widetilde{K}}_*(\xi, x) \in H_1$ $(x \in (a_1, b_1),\ \xi \in (a_2, b_2))$ *такая, что при всех* $\xi, \eta \in (a_2, b_2)$ *выполняется равенство*

$$\int_{a_1}^{b_1} \overline{\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)}\, \widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u)\, e_\eta(u)\, d\sigma_2(u). \tag{3.57}$$

Кроме того, пусть выполняются следующие условия:

в) *для произвольных* $\alpha, \beta \in (a_1, b_1)$ *имеют место неравенства*

$$\left\| \int_{\beta}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t) \right\|_{\sigma_1} \leqslant M(\beta) \|g\|_{\sigma_2}, \tag{3.58}$$

$$\left\| \int_{a_2}^{\alpha} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t) \right\|_{\sigma_1} \leqslant m(\alpha) \|g\|_{\sigma_2}, \tag{3.59}$$

где

$$\lim_{\alpha \to a_2} m(\alpha) = \lim_{\beta \to b_2} M(\beta) = 0, \tag{3.60}$$

или, в частности,

$$\int_{a_2}^{b_2} d\sigma_2(x) \int_{a_1}^{b_1} |\varphi(t, x) - \psi(t, x)|^2\, d\sigma_1(t) < \infty; \tag{3.61}$$

г) *при любых* α, β, *целиком лежащих внутри* (a_2, b_2), *многообразие функций*

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t), \qquad \|g\|_{\sigma_2} \leqslant 1,$$

компактно в H_1 *.

При выполнении этих условий функция $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ *является ядром Рисса.*

---

* Как хорошо известно, это условие излишне при выполнении неравенства (3.61), что можно доказать так же, как доказывается полная непрерывность интегральных операторов типа Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что условие (3.61) является частным случаем условий (3.58), (3.59) и (3.60), поэтому при доказательстве мы используем лишь эти последние условия. Действительно, предполагая, что выполнено условие (3.61), мы получим:

$$\left\| \int_{\beta}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t) \right\|_{\sigma_1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{\beta}^{b_2} |\varphi(t, x) - \psi(t, x)|^2\, d\sigma_2(t) \int_{\beta}^{b_2} |g(t)|^2\, d\sigma_2(t) \right\} d\sigma_1(x) \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_{\sigma_2}^2 \cdot \int_{\beta}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\varphi(t, x) - \psi(t, x)|^2\, d\sigma_1(x) \right) d\sigma_2(t).$$

Полагая

$$M(\beta) = \left\{ \int_{\beta}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |\varphi(t, x) - \psi(t, x)|^2\, d\sigma_1(x) \right) d\sigma_2(t) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и замечая, что $M(\beta) \to 0$ при $\beta \to b_2$, находим, что выполняются условия (3.58) и (3.60). Аналогичным образом можно убедиться, что удовлетворяются и условия (3.59) и (3.60).

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что, поскольку $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса, каждой функции $f(x) \in H_1$ можно поставить в соответствие такую функцию $g^*(u) \in H_2$, что

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, e_{\xi}(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_2} \overline{\widetilde{H}_*(\xi, u)}\, g^*(u)\, d\sigma_2(u). \tag{3.62}$$

По найденной функции $g^*(u)$ построим функцию $F(x)$ по формуле:

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g^*(t)\, d\sigma_2(t)$$

и положим

$$F(x) = Tf(x).$$

Легко видеть, что оператор T вполне непрерывен. В самом деле, из условий теоремы следует, что многообразие функций

$$\int_{a_2}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t), \quad \|g\|_{\sigma_2} \leqslant 1.$$

компактно в H_1, ибо, согласно условиям в) и г), оно допускает компактную ε-сеть при любом $\varepsilon > 0$. Далее, поскольку $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса, имеет место оценка

$$\|g^*\|_{\sigma_2} \leqslant K \|f\|_{\sigma_1}.$$

Таким образом, многообразие функций $Tf(x)$ ($\|f\|_{\sigma_1} \leqslant 1$) содержится в компактном многообразии функций вида

$$\int_{a_2}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)] \, g(t) \, d\sigma_2(t), \quad \|g\|_{\sigma_2} \leqslant K,$$

и поэтому само компактно, что и доказывает полную непрерывность оператора T.

Положим в (3.62)

$$f(x) = \widetilde{K}(\xi_0, x).$$

Как это следует из определения ядер Рисса (формула (1.28)), этой функции соответствует функция

$$g^*_{\xi_0}(t) \equiv e_{\xi_0}(t)$$

и поэтому

$$T\widetilde{K}(\xi_0, x) = \int_{a_2}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)] \, e_{\xi_0}(t) \, d\sigma_2(t) =$$
$$= \widetilde{K}(\xi_0, x) - \widetilde{\widetilde{K}}(\xi_0, x).$$

Следовательно, окончательно имеем:

$$(E - T) \widetilde{K}(\xi, x) = \widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), \tag{3.63}$$

где через E обозначен единичный оператор в пространстве H_1.

Покажем теперь, что оператор $E - T$ осуществляет гомеоморфное отображение пространства H_1 само на себя. Для этого мы воспользуемся любым из условий а) и б).

Предположим сперва, что выполнено условие а). Тогда, согласно (3.63), многообразие функций $(E - T)\widetilde{K}(\xi, x)$ плотно в H_1. Но в таком случае оператор $E - T$ отображает все пространство H_1 на все пространство H_1 ибо, как известно, если оператор T вполне непрерывен, то $E - T$ отображает все пространство H_1 на некоторое подпространство. Покажем, что это отображение взаимно однозначно. В самом деле, если

$$(E - T) f_0 = 0, \quad f_0 \neq 0,$$

то, по теореме Фредгольма, существует такое $f_0^* \neq 0$, что

$$(E - T^*) f_0^* = 0.$$

Отсюда, согласно известной теореме Фредгольма, следует, что многообразие функций $(E - T) f$, $f \in H_1$, ортогонально к f_0^*, а это противоречит тому, что это многообразие совпадает с H_1, как было установлено выше. Таким образом, оператор $(E - T)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве и, как известно, ограничен. К этому же заключению можно прийти, пользуясь условием б). В самом деле, на основании (3.57) и (3.63) имеем:

$$(\widetilde{K}(\xi, x), \widetilde{K}_*(\eta, x))_{\sigma_1} = (e_\xi(u), e_\eta(u))_{\sigma_2} = (\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), \widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x))_{\sigma_1} =$$
$$= ((E - T)\widetilde{K}(\xi, x), \widetilde{\widetilde{K}}(\eta, x))_{\sigma_1} = (\widetilde{K}(\xi, x), (E - T^*)\widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x))_{\sigma_1}.$$

Сравнивая крайние члены этих равенств и принимая во внимание, что $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса и поэтому полно в H_1, находим:

$$(E - T^*)\,\widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x) = \widetilde{K}_*(\eta, x). \tag{3.64}$$

Следовательно, вопрос свелся к предыдущему случаю, ибо ядро $\widetilde{K}_*(\eta, x)$, являясь ядром Рисса, полно в H_1, а оператор T^* вполне непрерывен. Дословно повторяя вышеприведенные выкладки, мы убеждаемся в существовании и ограниченности оператора $(E - T^*)^{-1}$, а значит, и оператора $(E - T)^{-1}$.

Итак, при выполнении любого из условий а) и б) оператор $(E - T)^{-1}$ существует, определен на всем пространстве H_1 и ограничен. Далее, поскольку ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ является ядром Рисса, оно, как это следует из теоремы 3.2, является также и ядром Рисса — Фишера, а потому, на основании теоремы 2.8, существует такой ограниченный оператор A, отображающий все H_1 на все H_1 и имеющий ограниченный обратный A^{-1}, что

$$A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x),$$

где $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора. Поэтому из (3.63) следует:

$$A(E - T)^{-1}\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x) = A\widetilde{K}(\xi, x) = K(\xi, x), \tag{3.65}$$

где оператор $A(E - T)^{-1}$ ограничен и имеет, очевидно, ограниченный обратный. Если мы покажем, что $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ является B-ядром, то из теоремы 2.8 будет следовать, что $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ есть ядро Рисса — Фишера, а потому, в силу теоремы 3.3, и ядро Рисса. Для доказательства того, что $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ является B-ядром, заметим, что на основании (2.4) и (3.65)

$$(e_\xi(u), e_\eta(u))_{\sigma_2} = (K(\xi, x), K(\eta, x))_{\sigma_1} =$$
$$= (A(E - T)^{-1}\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), K(\eta, x))_{\sigma_1} = (\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x), (E - T^*)^{-1} A^* K(\eta, x))_{\sigma_1},$$

откуда следует, что ядро $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ допускает биортогонализацию, причем сопряженное ядро $\widetilde{\widetilde{K}}_*(\xi, x)$ может быть определено формулой

$$\widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x) = (E - T^*)^{-1} A^* K(\eta, x). \tag{3.66}$$

Так как операторы $E - T$ и $(E - T^*)^{-1} A^*$ имеют ограниченные обратные, а функции $\widetilde{K}(\xi, x)$ и $K(\xi, x)$ полны в H_1, то из (3.63) и (3.66) заключаем, что многообразия функций $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$, $\xi \in (a_2, b_2)$, и $\widetilde{\widetilde{K}}_*(\eta, x)$, $\eta \in (a_2, b_2)$, плотны в H_1, а это и доказывает, что функция $\widetilde{\widetilde{K}}(\xi, x)$ является B-ядром.

З а м е ч а н и е. Мы уже отмечали, что условие (3.61) содержится в условиях (3.58), (3.59) и (3.60) как частный случай. Нетрудно видеть, однако, что эти последние условия могут выполняться и в случае, когда нарушено условие (3.61). В самом деле, пусть, например,

$$\sigma_1(x) \equiv x, \quad \sigma_2(u) \equiv u, \quad H_1 = H_2 = L^2(-\infty, \infty)$$

и

$$\varphi(t, x) - \psi(t, x) = \frac{e^{-|x-t|-t^2}}{|x - t|^\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1. \tag{3.67}$$

Тогда, согласно неравенству Буняковского,

$$\left|\int_{\beta}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t)\right|^2 = \left|\int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}e^{-t^2}}{|x-t|^{\alpha}}\, g(t)\, dt\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}e^{-2t^2}}{|x-t|^{\alpha}}\, dt \int_{\beta}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{|x-t|^{\alpha}}\, |g(t)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{|x-t|^{\alpha}}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{|x-t|^{\alpha}}\, |g(t)|^2\, dt.$$

Отсюда, пользуясь теоремой Фубини и замечая, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{|x-t|^{\alpha}}\, dt$$

существует и не зависит от x, ибо интегрирование ведется по всей оси, находим:

$$\left\|\int_{\beta}^{b_2} [\varphi(t, x) - \psi(t, x)]\, g(t)\, d\sigma_2(t)\right\|_{\sigma_1}^2 \leqslant e^{-2\beta^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x-t|}}{|x-t|^{\alpha}}\, dt\right)^2 \|g\|_{\sigma_2}^2.$$

Таким образом, условия (3.58), (3.60) выполняются. Аналогично можно убедиться, что выполнены также условия (3.59), (3.60). С другой стороны, очевидно, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ условие (3.61) нарушено.

Отметим в заключение, что в частном случае, когда $H_1 = L^2(a, b)$ и $H_2 = L^2_{[u]}(0, \infty)$, доказанная теорема содержит теорему Н. К. Бари [6] о минимальных системах, близких к базисам Рисса.

§ 4. Обобщенная проблема моментов

В этом параграфе дается решение общей проблемы моментов в пространствах H_k $(k = 1, 2)$ и указываются условия, при которых данное ядро допускает биортогонализацию.

Определение 4.1. Будем говорить, что функция $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$, $\xi \in (a_2, b_2)$, $x \in (a_1, b_1)$, является C-ядром, если для любой точки непрерывности ξ_0 функции $\sigma_2(\xi)$ существует такое $\Delta_{\xi_0} > 0$ и такие положительные константы $c(\xi_0)$ и $\alpha(\xi_0)$, что для всех δ, $|\delta| < \Delta_{\xi_0}$, выполняется неравенство

$$\int_{a_1}^{b_1} |\widetilde{K}(\xi_0 + \delta, x) - \widetilde{K}(\xi_0, x)|^2\, d\sigma_1(x) \leqslant c(\xi_0)\, |\sigma_2(\xi_0 + \delta) - \sigma_2(\xi_0)|^{\alpha(\xi_0)}. \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\widetilde{K}(\xi, x)$ — C-ядро, функция $\mu(\xi)$ непрерывна во всех точках непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$ и при некотором $\gamma > 0$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_{a_2}^{b_2} \mu(\xi)\, g(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\right| \leqslant \gamma \left(\int_{a}^{b_1} \left|\int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}(\xi, x)\, g(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\right|^2 d\sigma_1(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

для всех ступенчатых функций $g(\xi)$, обращающихся в нуль вне конечных промежутков, целиком лежащих внутри (a_2, b_2). Тогда существует такая функция $f(x) \in H_1$, $\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \gamma$, что при всех $\xi \in (a_2, b_2)$, не лежащих внутри интервалов постоянства функции $\sigma_2(\xi)$,

$$\mu(\xi) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x) f(x)\, d\sigma_1(x). \tag{4.3}$$

Доказательство. Обозначим через ξ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ совокупность всех точек разрыва функции $\sigma_2(\xi)$, дополненную всеми такими рациональными точками из (a_2, b_2), никакая окрестность которых $(\xi_\nu - \delta, \xi_\nu + \delta)$ не имеет нулевой σ_2-меры в случае, когда ξ_ν оказывается точкой непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$.

Покажем, что, каковы бы ни были числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu(\xi_k)\right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \widetilde{K}(\xi_k, x)\right\|_{\sigma_1} \tag{4.4}$$

с той же константой γ, что и в условии теоремы. Для этого выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство $\delta < \Delta_{\xi_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и чтобы промежутки $(\xi_k - \delta, \xi_k + \delta)$ не имели попарно общих точек.

Рассмотрим функцию $g_\delta(\xi)$, равную

$$\frac{\lambda_k}{\sigma_2(\xi_k + \delta) - \sigma_2(\xi_k - \delta)} \tag{4.5}$$

в интервале $(\xi_k - \delta; \xi_k + \delta)$, если ξ_k — точка непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$, равную

$$\frac{\lambda_k}{\sigma_2(\xi_k + 0) - \sigma_2(\xi_k - 0)} \tag{4.6}$$

в точке ξ_k, если ξ_k — точка разрыва функции $\sigma_2(\xi)$, и равную нулю во всех остальных точках. Очевидно, что если ξ_k — точка разрыва функции $\sigma_2(\xi)$, то

$$\int_{\xi_k - 0}^{\xi_k + 0} \mu(\xi) g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi) = \lambda_k \mu(\xi_k).$$

В противном же случае из равенства

$$\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta} \mu(\xi) g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi) - \lambda_k \mu(\xi_k) = \int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta} \{\mu(\xi) - \mu(\xi_k)\} g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi),$$

в силу непрерывности $\mu(\xi)$ в точке ξ_k, заключаем, что выражение в левой части стремится к нулю при $\delta \to 0$, ибо

$$\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta} g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi) = 1.$$

Таким образом, всегда

$$\lim_{\delta\to 0}\left|\int_{a_2}^{b_2}\mu(\xi)\, g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mu(\xi_k)\right|=0. \tag{4.7}$$

Заметим, далее, что в точках разрыва ξ_k функции $\sigma_2(\xi)$ мы имеем:

$$\int_{\xi_k-0}^{\xi_k+0}\widetilde{K}(\xi, x)\, g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi)=\lambda_k\widetilde{K}(\xi_k, x), \tag{4.8}$$

поскольку в таких точках функция $g_\delta(\xi)$ совпадает с выражением (4.6). В случае, когда ξ_k — точка непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$, на основании теоремы Фубини приходим к следующей оценке:

$$\int_{a_1}^{b_1}\left|\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}\{K(\xi, x)-K(\xi_k, x)\}\, g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\right|^2 d\sigma_1(x)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}g_\delta^2(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}|K(\xi, x)-K(\xi_k, x)|^2 d\sigma_2(\xi)\right\}d\sigma_1(x)=$$

$$=\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}g_\delta^2(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\cdot\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}\left\{\int_{a_1}^{b_1}|K(\xi, x)-K(\xi_k, x)|^2 d\sigma_1(x)\right\}d\sigma_2(\xi). \tag{4.9}$$

Воспользовавшись тем, что в рассматриваемом случае функция $g_\delta(\xi)$ совпадает с выражением (4.5), а также принимая во внимание оценку (4.1) и учитывая, что функция $\sigma_2(\xi)$ не убывает, из (4.9) выводим:

$$\left\|\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}\{K(\xi, x)-K(\xi_k, x)\}\, g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\right\|_{\sigma_1}^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}g_\delta^2(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\cdot\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}c(\xi_k)\,|\sigma_2(\xi)-\sigma_2(\xi_k)|^{\alpha(\xi_k)}d\sigma_2(\xi)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}g_\delta^2(\xi)\, d\sigma_2(\xi)\cdot\int_{\xi_k-\delta}^{\xi_k+\delta}c(\xi_k)\,|\sigma_2(\xi_k+\delta)-\sigma_2(\xi_k-\delta)|^{\alpha(\xi_k)}d\sigma_2(\xi)=$$

$$=\frac{\lambda_k^2}{|\sigma_2(\xi_k+\delta)-\sigma_2(\xi_k-\delta)|^2}\,|\sigma_2(\xi_k+\delta)-\sigma_2(\xi_k-\delta)|\times$$

$$\times c(\xi_k)\cdot|\sigma_2(\xi_k+\delta)-\sigma_2(\xi_k-\delta)|^{\alpha(\xi_k)+1}=$$

$$=c(\xi_k)\,\lambda_k^2\,|\sigma_2(\xi_k+\delta)-\sigma_2(\xi_k-\delta)|^{\alpha(\xi_k)}$$

В силу (4.8), находим окончательно:

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|\int_{a_2}^{b_2}\widetilde{K}(\xi, x)\, g_\delta(\xi)\, d\sigma_2(\xi)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\widetilde{K}(\xi_k, x)\right\|_{\sigma_1}=0. \tag{4.10}$$

Теперь формула (4.4) непосредственно следует из условия (4.2) на основании (4.7) и (4.10).

С другой стороны, как известно [см. ([11])], выполнение условия (4.4) обеспечивает существование такой функции $f(x) \in H_1$, $\|f\|_{\sigma_1} \leqslant \gamma$, что при всех ξ_k

$$\mu(\xi_k) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi_k, x) f(x)\, d\sigma_1(x). \tag{4.11}$$

Отсюда равенство (4.3) легко получается предельным переходом. В самом деле, во всех точках разрыва функции $\sigma_2(\xi)$ равенство (4.3) выполняется на основании (4.11), поскольку в совокупность $\{\xi_k\}$ были включены все такие точки. Пусть теперь ξ_* — точка непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$, не лежащая внутри интервала постоянства этой функции и не содержащаяся в совокупности $\{\xi_k\}$. Выберем из этой совокупности такую подпоследовательность ξ_{k_n}, чтобы

$$\xi_* = \lim_{n\to\infty} \xi_{k_n}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\mu(\xi_*) = \lim_{n\to\infty} \mu(\xi_{k_n}), \tag{4.12}$$

ибо, по условию теоремы, функция $\mu(\xi)$ непрерывна в каждой точке непрерывности функции $\sigma_2(\xi)$. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi_{k_n}, x) f(x)\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi_*, x) f(x)\, d\sigma_1(x), \tag{4.13}$$

что вытекает из следующей оценки, имеющей место в силу условия (4.1) при $|\xi_{k_n} - \xi_*| < \Delta_{\xi_*}$:

$$\left|\int_{a_1}^{b_1} \{\widetilde{K}(\xi_{k_n}, x) - \widetilde{K}(\xi_*, x)\} f(x)\, d\sigma_1(x)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{a_1}^{b_1} |\widetilde{K}(\xi_{k_n}, x) - \widetilde{K}(\xi_*, x)|^2\, d\sigma_1(x) \cdot \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|^2\, d\sigma_1(x) \leqslant$$

$$\leqslant c(\xi_*)\,|\sigma_2(\xi_{k_n}) - \sigma_2(\xi_*)|^{\alpha(\xi_*)} \cdot \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|^2\, d\sigma_1(x).$$

Сравнение (4.12) и (4.13) с равенствами

$$\mu(\xi_{k_n}) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi_{k_n}, x) f(x)\, d\sigma_1(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

убеждает нас в справедливости представления (4.3).

Легко видеть, что если, в частности, $\sigma_1(x) \equiv x$ и $\sigma_2(u) \equiv [u]$, то доказанная теорема содержит в себе известный результат о разрешимости проблемы моментов в пространстве функций $L^2(a, b)$, который был использован нами выше.

Замечание 1. Если при всех $x \in (a_1, b_1)$ функция $\widetilde{K}(\xi, x)$ σ_2-измерима на (a_2, b_2), причем на любом конечном промежутке, целиком

лежащем внутри (a_2, b_2), функция

$$\int_{a_1}^{b_1} |\widetilde{K}(\xi, x)|^2 \, d\sigma_1(x)$$

ограничена, то, как легко видеть, для разрешимости проблемы моментов т. е. для выполнения равенства (4.3) при некоторой функции $f(x) \in H_1$ условие (4.2) необходимо. При этом в качестве γ можно принять $\|f\|_{\sigma_1}$.

В самом деле, в этом случае интеграл

$$\int_{a_1}^{b_1} |\widetilde{K}(\xi, x)| \cdot |f(x)| \, d\sigma_1(x)$$

существует и ограничен на любом конечном промежутке, целиком лежащем внутри (a_2, b_2), в силу неравенства Буняковского. Поэтому, если $g(\xi)$ — ступенчатая функция, обращающаяся в нуль вне некоторого конечного промежутка, целиком лежащего внутри (a_2, b_2), то интеграл

$$\int_{a_2}^{b_2} g(\xi) \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x) f(x) d\sigma_1(x) \right\} d\sigma_2(\xi)$$

существует и, в силу теоремы Фубини, в нем можно изменить порядок интегрирования. Из равенства (4.3) в этом случае получаем:

$$\int_{a_2}^{b_2} \mu(\xi) \, g(\xi) \, d\sigma_2(\xi) = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} g(\xi) \, \widetilde{K}(\xi, x) \, d\sigma_2(\xi) \right\} f(x) \, d\sigma_1(x),$$

откуда

$$\left| \int_{a_2}^{b_2} \mu(\xi) \, g(\xi) \, d\sigma_2(\xi) \right| \leqslant \| f \|_{\sigma_1} \cdot \left\{ \int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}(\xi, x) \, g(\xi) \, d\sigma_2(\xi) \right|^2 d\sigma_1(x) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

что и утверждалось.

Замечание 2. Легко видеть, что любое ядро Рисса и даже любое гильбертово ядро является C-ядром, т. е. удовлетворяет условию (4.1) и притом с равномерно ограниченным $c(\xi)$ и $\underline{\alpha}(\xi) \equiv 1$. В самом деле, в силу теоремы 2.3, любое гильбертово ядро $K(\xi, x)$ представляется в виде

$$\widetilde{K}(\xi, x) = CK(\xi, x),$$

где $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора, а оператор C ограничен. С другой стороны, на основании теоремы 2 а, ядро $K(\xi, x)$ изометрического оператора допускает представление

$$K(\xi, x) = V_2 e_\xi(u),$$

где V_2 — изометрический оператор, отображающий все H_2 на все H_1. Следовательно,

$$\widetilde{K}(\xi, x) = CV_2 e_\xi(u),$$

и поэтому

$$\| \widetilde{K}(\xi + \delta, x) - \widetilde{K}(\xi, x) \|_{\sigma_1}^2 = \| CV_2 \{ e_{\xi+\delta}(u) - e_\xi(u) \} \|_{\sigma_1}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| C \|^2 \cdot \| V_2 \{e_{\xi+\delta}(u) - e_\xi(u)\} \|^2_{\sigma_1} = \| C \|^2 \cdot \| e_{\xi+\delta}(u) - e_\xi(u) \|^2_{\sigma_2} =$$

$$= \| C \|^2 \cdot \int_{a_2}^{b_2} | e_{\xi+\delta}(u) - e_\xi(u) |^2 \, d\sigma_2(u) = \| C \|^2 \, | \sigma_2(\xi + \delta) - \sigma_2(\xi) |,$$

что и требовалось доказать.

Напомним, что о некотором ядре $\widetilde{K}(\xi, x) \in H_1$, $(\xi \in (a_2, b_2), x \in (a_1, b_1))$ мы говорим, что оно допускает биортогонализацию в H_1, если существует такая функция $\widetilde{K}_*(\xi, x) \in H_1$ $(\xi \in (a_2, b_2), x \in (a_1, b_1))$, что при любом выборе $\xi, \eta \in (a_2, b_2)$ выполняется равенство

$$\int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u) \, e_\eta(u) \, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x) \, \overline{\widetilde{K}_*(\eta, x)} \, d\sigma_1(x).$$

Если ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ полно в H_1, то, очевидно, $\widetilde{K}_*(\eta, x)$ определяется единственным образом и в этом случае называется сопряженным с $\widetilde{K}(\xi, x)$ ядром.

Введем обозначение:

$$\mu(\xi, \eta) = \int_{a_2}^{b_2} e_\xi(u) \, e_\eta(u) \, d\sigma_2(u). \tag{4.14}$$

Тогда из предыдущей теоремы непосредственно следует

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть С-ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ таково, что при всех $\eta \in (a_2, b_2)$ удовлетворяется неравенство*

$$\left| \int_{a_2}^{b_2} \mu(\xi, \eta) \, g(\xi) \, d\sigma_2(\xi) \right| \leqslant \gamma(\eta) \left(\int_{a_1}^{b_1} \left| \int_{a_2}^{b_2} \widetilde{K}(\xi, x) \, g(\xi) \, d\sigma_2(\xi) \right|^2 d\sigma_1(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

для всех ступенчатых функций $g(\xi)$, обращающихся в нуль вне конечных промежутков, целиком лежащих внутри (a_2, b_2). Тогда ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ допускает биортогонализацию в H_1.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть некоторое ядро $\widetilde{K}(\xi, x)$ полно в H_1 и проблема моментов*

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u) \, e_\xi(u) \, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \widetilde{K}(\xi, x) \, f(x) \, d\sigma_1(x) \tag{4.15}$$

разрешима в H_1 при всех $g(u) \in H_2$.

Тогда эта проблема имеет единственное решение и, каково бы ни было ядро $K(\xi, x)$ произвольного изометрического оператора, отображающего H_1 на H_2, существует такой ограниченный линейный оператор A, определенный на H_1, что сопряженное с $\widetilde{K}(\xi, x)$ ядро $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ определяется формулой

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = A \, K(\xi, x),$$

причем

$$K(\xi, x) = A^* \widetilde{K}(\xi, x).$$

Доказательство. Единственность решения проблемы моментов (4.15) является очевидным следствием полноты ядра $\widetilde{K}(\xi, x)$ в H_1.

Пусть теперь $K(\xi, x)$ — ядро некоторого изометрического оператора V_1, отображающего H_1 на H_2. Произвольной функции $f(x) \in H_1$ поставим в соответствие функцию $g(u) = V_1 f(x) \in H_2$ по формуле (2.2), т. е. предположим, что

$$\int_{a_2}^{b_2} g(u)\, e_\xi(u)\, d\sigma_2(u) = \int_{a_1}^{b_1} \overline{K(\xi, x)}\, f(x)\, d\sigma_1(x), \quad \xi \in (a_2, b_2) \tag{4.16}$$

и допустим, что решением проблемы моментов (4.15) для функции $\overline{g(u)}$ является функция $\overline{\varphi(x)} \in H_1$. Положим

$$Af(x) = \varphi(x).$$

Очевидно, A — аддитивный оператор, определенный всюду в H_1. Из (4.15) и (4.16) имеем:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, \overline{K(\xi, x)}\, d\,\sigma_1(x) = \int_{a_2}^{b_1} Af(x) \cdot \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, d\sigma_1(x), \tag{4.17}$$

откуда, в силу отмеченной выше единственности решения проблемы моментов (4.15), легко следует замкнутость, а значит, и ограниченность [см. ([8])] оператора A. Из (2.4) и (4.17) вытекает:

$$(e_\eta, e_\xi)_{\sigma_2} = \int_{a_1}^{b_1} K(\eta, x)\, \overline{K(\xi, x)}\, d\sigma_1(x) = \int_{a_1}^{b_1} AK(\eta, x) \cdot \overline{\widetilde{K}(\xi, x)}\, d\sigma_1(x) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} K(\eta, x) \cdot \overline{A^* \widetilde{K}(\xi, x)}\, d\sigma_1(x),$$

откуда получаем:

$$\widetilde{K}_*(\xi, x) = AK(\xi, x), \quad K(\xi, x) = A^* \widetilde{K}(\xi, x),$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Очевидно, утверждение теоремы 4.3 совпадает с утверждением теоремы 2.3 в том случае, если $\widetilde{K}(\xi, x)$ является B-ядром. Для того чтобы $\widetilde{K}(\xi, x)$ являлось B-ядром, достаточно дополнительно потребовать лишь полноты ядра $\widetilde{K}_*(\xi, x)$ в H_1, которая не является следствием условий теоремы 4.3.

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР

Поступило
16. VI. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д ж р б а ш я н М. М., О квазиизометрическом отображении пространств функций $L^2_{\sigma_1}(a_1, b_1)$ и $L^2_{\sigma_2}(a_2, b_2)$, Доклады Ак. наук СССР, 129, № 3 (1959), 456—459.

[2] P a l e y R. and W i e n e r N., Fourier transforms in the complex domain, New York, 1934.

[3] Б а р и Н. К., О базисах в гильбертовом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 54 (1946), 383—386.

[4] Б а р и Н. К., Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч. зап. МГУ, вып. 148, т. IV (1951), 69—107.

[5] Б а р и Н. К., Об устойчивости некоторых свойств ортогональных систем, Доклады Ак. наук СССР, 33 (1941), 342—345.

[6] Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, Москва, 1958.

[7] Ахиезер Н. и Глазман И., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950.

[8] Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, Москва, 1954.

[9] Люстерник Л. и Соболев В., Элементы функционального анализа, ГТТЛ, М.—Л., 1951.

[10] Fox C., A composition theorem for General Unitary Transforms, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 880—883.

[11] Канторович Л. и Акилов Г., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, Москва, 1959.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 871—886

Г. С. ЛИТВИНЧУК

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ОСОБЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СДВИГОМ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Дается качественное исследование одного типа особых интегральных уравнений, линии особенностей которых задаются взаимно однозначными и взаимно непрерывными отображениями контура интегрирования на себя. В основе исследования лежит метод приведения интегрального уравнения к одной краевой задаче со сдвигом для аналитических функций.

Будем рассматривать интегральное уравнение

$$Tf \equiv a(t)\, f(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - \alpha(t)} = h(t), \tag{1}$$

в котором функции $a(t)$, $b(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на замкнутом контуре Ляпунова L, причем $a(t) \neq 0$ и $b(t) \neq 0$ в точках L; функция $\alpha(t)$ взаимно однозначно отображает контур L в себя и имеет производную $\alpha'(t)$, отличную от нуля и удовлетворяющую на L условию Гёльдера; решение $f(t)$ ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Если сдвиг $\alpha(t)$ сохраняет направление обхода на L, то в случае $\alpha(t) \equiv t$ уравнение (1) превращается в характеристическое особое уравнение с ядром Коши, для которого известно решение в замкнутой форме [см., например, ([1]), гл. III].

Особые интегральные уравнения с ядрами, содержащими сдвиги, как известно, встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптико-гиперболического (смешанного) типа. Этим, прежде всего, объясняется большое внимание, уделяемое в последнее время исследованию таких уравнений [см. ([2]) — ([5])]. Ф. Д. Гахов и Л. И. Чибрикова в работе ([6]) рассмотрели несколько типов особых интегральных уравнений, включающих в себя в качестве частных случаев уравнения, изучавшиеся в работах ([2]) — ([5]). Рассмотренные в цитированных статьях типы особых интегральных уравнений сводятся, в существенном, к краевой задаче Римана, в связи с чем для этих уравнений найдены решения в замкнутой форме. Особое интегральное уравнение со сдвигом в форме (1) сводится к более общей, чем задача Римана, краевой задаче для аналитических функций, и решения уравнений вида (1) не будут, вообще говоря, иметь замкнутой формы.

В настоящей работе интегральное уравнение (1) изучается при следующих предположениях:

1) функция $\alpha(t)$ переводит контур L в себя с изменением направления обхода на нем на противоположное;

2) выполняются условия Карлемана ([7]):

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{2}$$

$$\frac{b(t)\, b[\alpha(t)]}{a(t)\, a[\alpha(t)]} = 1. \tag{3}$$

При этих предположениях оказалось возможным дать полное качественное исследование уравнения (1). В работе установлена нормальная разрешимость уравнения (1) с подсчетом числа решений соответствующего однородного уравнения и числа условий разрешимости; при этом указан алгоритм для получения самих решений. Критерии разрешимости неоднородного уравнения (1) представляют собой альтернативу Фредгольма. Для уравнений (1) оказывается полностью справедливой теорема Фредгольма, устанавливающая связь между разрешимостью и числом решений данного и союзного однородных уравнений. Заметим, что с точки зрения общей теории линейных уравнений в банаховых пространствах последнее означает равенство нулю индекса уравнения (1), где индекс понимается как разность чисел решений данного и союзного однородных уравнений [см., например, ([8])].

Интегральное уравнение (1) будет сведено нами к одной краевой задаче для аналитических функций, которую при предположениях (2) и (3) удается решить до конца. Именно, при условиях (2) и (3) упомянутая краевая задача сводится к равносильной ей паре краевых задач Карлемана соответственно для внутренней D^+ и внешней (бесконечной) области D^-, на которые контур L разделяет плоскость. В связи с этим мы изложим сначала необходимые для дальнейшего сведения о характере решения этих двух задач.

§ 1. Предварительные сведения. Краевая задача Карлемана для внешней области

Внутренняя краевая задача Карлемана была поставлена Т. Карлеманом в 1932 году и полностью исследована в работах Д. А. Квеселава ([9]), ([10]). Задача формулируется так: найти функцию $\Phi(z)$, аналитическую в области D^+, по краевому условию на контуре Ляпунова L:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^+(t) + g(t), \tag{1.1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гёльдера на L, а $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (2), переводит контур L в себя с изменением направления обхода на нем на противоположное и имеет производную $\alpha'(t)$, отличную от нуля и удовлетворяющую условию Гёльдера на L. Аналогично ставится внешняя краевая задача Карлемана:

$$\Phi^-[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \text{ на } L. \tag{1.2}$$

Краевая задача (1.2) до сих пор не рассматривалась.

В основу решения внутренней задачи Карлемана (1.1) в работах ([9]), ([10]) положено исследование интегрального уравнения Фредгольма, причем ядро этого уравнения оказывается не имеющим собственных функций.

Внешняя задача Карлемана (1.2) также сводится к интегральному уравнению Фредгольма, но здесь соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения. Аналогичное соотношение существует между исследованиями методом интегральных уравнений внутренней и внешней задачи Дирихле [см ([11]), стр. 623).

Из краевых условий (1.1) и (1.2) непосредственно следует, что для разрешимости задачи Карлемана в случае, когда $\alpha[\alpha(t)] = t$, необходимо выполнение условий

$$G(t)\, G[\alpha(t)] = 1 \quad \text{на} \quad L, \tag{1.3}$$

$$g(t) + G(t)\, g[\alpha(t)] = 0 \text{ на } L. \tag{1.4}$$

Если (1.3) выполнено, то однородная задача (1.1) разрешима при неположительном индексе функции $G(t)$, а однородная задача (1.2) разрешима при неотрицательном индексе.

Отметим некоторые свойства функций $\alpha(t)$ и $G(t)$, удовлетворяющих, соответственно, условиям (2) и (1.3).

Сдвиг $\alpha(t)$ имеет на L две неподвижные точки t_0' и t_0'', причем в этих точках

$$\alpha'(t_0') = \alpha'(t_0'') = -1. \tag{1.5}$$

Функция $G(t)$ в обеих неподвижных точках сдвига принимает одинаковые значения:

1. $G(t_0') = G(t_0'') = 1$ или
2. $G(t_0') = G(t_0'') = -1$,

если индекс * ее есть четное число, и различные значения

3. $G(t_0') = -G(t_0'') = \pm 1$,

если индекс $G(t)$ нечетен.

При решении краевых задач Карлемана (1.1) и (1.2) необходимо различать три отмеченных здесь случая. Легко видеть, что во втором и третьем случаях не существует решений однородных задач (1.1) и (1.2), не обращающихся в нуль на контуре L.

Дадим краткую схему исследования внешней задачи Карлемана (1.2). Рассмотрим сначала краевую задачу

$$\Phi^-[\alpha(t)] = \lambda \Phi^-(t) + g(t) \text{ на } L, \qquad \lambda = \pm 1. \tag{1.6}$$

Для разрешимости этой задачи, очевидно, должно быть выполнено условие

$$g(t) + \lambda g[\alpha(t)] = 0 \text{ на } L. \tag{1.7}$$

Решение задачи (1.6), аналитическое в D^-, будем искать в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau; \tag{1.8}$$

---

* Определение индекса функции, а также индекса задачи Римана см., например, в работе ([1]).

здесь $\varphi(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на L, причем мы полагаем, что

$$\varphi(t) + \lambda\varphi[\alpha(t)] = \frac{1+\lambda}{2}C, \tag{1.9}$$

где C — произвольная постоянная. Подставляя в краевое условие (1.6) предельные значения интеграла типа Коши (1.8), мы придем к интегральному уравнению

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \lambda g(t), \tag{1.10}$$

где функция

$$K(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}$$

есть ядро Фредгольма [см. ([1]), стр. 129].

ЛЕММА. *Однородное интегральное уравнение* $K\varphi = 0$ *имеет своим нетривиальным решением произвольную постоянную и только ее.*

Справедливость леммы можно установить без использования условия (2). Обозначим через $\beta(t)$ функцию, обратную $\alpha(t)$. Непосредственная проверка подтверждает, что произвольная постоянная удовлетворяет уравнению $K\varphi = 0$.

Пусть теперь $\varphi(t)$ — произвольное решение интегрального уравнения $K\varphi = 0$. Построим аналитические в D^- функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau, \quad \Phi_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \quad z \in D^-.$$

Для этих функций имеем [см. ([10])]:

$$\Phi_1^-[\alpha(t)] = \Phi_2^-(t) \text{ на } L.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_1(z) \equiv \Phi_2(z) \equiv \text{const}.$$

Поскольку

$$\Phi_1(\infty) = \Phi_2(\infty) = 0,$$

то

$$\Phi_1(z) \equiv \Phi_2(z) \equiv 0.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ и $\varphi[\beta(t)]$ являются краевыми значениями некоторых функций $\Psi_1(z)$ и $\Psi_2(z)$, аналитических в области D^+, т. е.

$$\varphi(t) = \Psi_1^+(t), \quad \varphi[\beta(t)] = \Psi_2^+(t). \tag{1.11}$$

В силу (1.11), $\Psi_1^+(t) = \Psi_2^+[\alpha(t)]$ на L. Следовательно [см. ([10])], в области D^+

$$\Psi_1(z) \equiv \Psi_2(z) \equiv C,$$

и мы получаем:

$$\varphi(t) = \Psi_1^+(t) \equiv C,$$

что и требовалось доказать.

Интегральное уравнение (1.10) разрешимо, если выполнено условие

$$\int_L g(t)\,\psi(t)\,dt = 0, \qquad (1.12)$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение однородного уравнения $K'\psi = 0$, союзного с уравнением (1.10).

Установим важные для дальнейшего свойства решений уравнения $K'\psi = 0$. Легко проверить, что если $\psi(t)$ есть нетривиальное решение уравнения $K'\psi = 0$, то функция

$$\psi^*(t) = c\psi[\alpha(t)]\,\alpha'(t)$$

тоже является решением этого уравнения при любом постоянном c. Так как оператор K имеет лишь одну собственную функцию, то

$$\psi^*(t) = \mu\psi(t),$$

где μ — постоянная. Используя свойство (1.5), легко показать, что если $\mu = 1$, то $c = -1$. Следовательно, любое решение однородного союзного уравнения удовлетворяет условию

$$\psi(t) + \psi[\alpha(t)]\,\alpha'(t) = 0 \text{ на } L. \qquad (1.13)$$

Заметим, что уравнение $K\varphi = C$, где C — некоторая постоянная, неразрешимо. В самом деле, рассуждая как при доказательстве приведенной выше леммы, можно показать, что каждому решению уравнения $K\varphi = C$ соответствует определенное решение задачи Карлемана для определения аналитической в D функции по постоянному скачку на контуре. Последняя задача не имеет решений, поскольку при $\lambda = 1$ не выполняется необходимое условие разрешимости (1.7). Из неразрешимости интегрального уравнения $K\varphi = C$ следует, что

$$\int_L \psi(t)\,dt \neq 0, \qquad (1.14)$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение уравнения $K'\psi = 0$. Нетрудно показать, используя свойство (1.13), что выполнение условия (1.7) при $\lambda = 1$ означает выполнение условия разрешимости (1.12). Заметим еще, что так как функции $\varphi(t)$ и $-\lambda\varphi[\alpha(t)]$ одновременно являются решениями неоднородного уравнения (1.10), то всякое решение этого уравнения действительно обладает свойством (1.9).

Таким образом, любое исчезающее на бесконечности аналитическое в D^- решение краевой задачи (1.6) при $\lambda = 1$ можно получить по формуле (1.8), где $\varphi(t)$ — решение уравнения (1.10). Задача (1.6) при $\lambda = -1$, вообще говоря, не имеет аналитических в D^- решений, исчезающих на бесконечности.

Рассмотрим однородную задачу (1.2). Обозначим

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = 2\varkappa' \geqslant 0.$$

Пусть λ — значение $G(t)$ в обеих неподвижных точках сдвига $\alpha(t)$. Функцию $X(z)$, определяемую по краевому условию

$$X^-[\alpha(t)] = \lambda G(t) X^-(t), \tag{1.15}$$

назовем канонической функцией [см. (1), стр. 102] однородной задачи (1.2) с четным индексом. Каноническая функция $X(z)$ аналитична всюду в области D^- и имеет в бесконечно удаленной точке нуль порядка $\varkappa'$. Во всех остальных точках D^-, включая точки контура L, $X(z) \neq 0$. Так как $X^-(t) \neq 0$ всюду на L, то будем иметь:

$$\frac{\Phi^-[\alpha(t)]}{X^-[\alpha(t)]} = \lambda \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} \quad \text{на } L.$$

Искомая функция $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ аналитична в D^- всюду, кроме точки $z = \infty$, в которой она имеет полюс порядка $\frac{\varkappa}{2}$. Будем искать функцию $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ в виде

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = P_{\frac{\varkappa}{2}}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{1.16}$$

где $P_{\frac{\varkappa}{2}}(z)$ — многочлен степени $\frac{\varkappa}{2}$, а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K\varphi = P_{\frac{\varkappa}{2}}(t) - \lambda P_{\frac{\varkappa}{2}}[\alpha(t)]. \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) разрешимо, если выполнено условие

$$\int_L \left\{P_{\frac{\varkappa}{2}}(t) - \lambda P_{\frac{\varkappa}{2}}[\alpha(t)]\right\} \psi(t)\, dt = 0, \tag{1.18}$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение союзного уравнения $K'\psi = 0$.

Используя свойства (1.13) и (1.14), получаем, что условие (1.18) при $\lambda = 1$ выполняется при произвольных коэффициентах c_k многочлена $P_{\frac{\varkappa}{2}}(z)$, а при $\lambda = -1$ условие (1.18) определяет c_0 — через остальные коэффициенты $P_{\frac{\varkappa}{2}}(z)$. Следовательно, однородная краевая задача (1.2) имеет $\frac{\varkappa}{2} + 1$ линейно независимых решений, если $\lambda = 1$, и $\frac{\varkappa}{2}$ линейно независимых решений, если $\lambda = -1$. Все эти решения могут быть получены из формулы (1.16).

Случай нечетного индекса $G(t)$ ($\varkappa = 2\varkappa' + 1$) сводится к рассмотренному при помощи способа, указанного в работе (10).

Рассмотрим неоднородную задачу (1.2). Пусть $\operatorname{Ind} G(t) = \varkappa \geqslant 0$. Учитывая (1.15), будем иметь на L:

$$\frac{\Phi^-[\alpha(t)]}{X^-[\alpha(t)]} = \lambda \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^-[\alpha(t)]}. \tag{1.19}$$

Здесь $\lambda = -1$, если $G(t_0') = G(t_0'') = -1$, и $\lambda = 1$ в остальных случаях. Решение краевой задачи (1.19) будем искать в виде

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = P_{\varkappa'}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{1.20}$$

где, по-прежнему, $P_{\varkappa'}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше $\varkappa'$. Интегральное уравнение Фредгольма, определяющее функцию $\varphi(t)$, разрешимо, если выполнено условие

$$\int_L \left\{P_{\varkappa'}(t) - \lambda P_{\varkappa'}[\alpha(t)] - \frac{g[\alpha(t)]}{X^-(t)}\right\}\psi(t)\,dt = 0, \tag{1.21}$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение $K'\psi = 0$. При $\lambda = 1$ условие (1.21) выполняется для произвольных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa'}$, а в случае $\lambda = -1$ это условие определяет одну постоянную c_k через остальные.

Если $\varkappa < 0$, то в формуле (1.20) $P_{\varkappa'}(z) \equiv 0$. Чтобы функция $\Phi(z)$ была аналитической в области D^-, необходимо потребовать, кроме того, чтобы функция

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

имела на бесконечности нуль порядка не ниже $-\varkappa' - 1$, т. е. должны выполняться условия разрешимости:

$$\int_L t^{k-1}\varphi(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa' - 1,$$

где функция $\varphi(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$K\varphi = -\frac{g[\alpha(t)]}{X^-(t)}.$$

Следовательно, при $\lambda = -1$ должно выполняться еще одно условие разрешимости:

$$\int_L \frac{g[\alpha(t)]}{X_*^-(t)}\psi(t)\,dt = 0,$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение уравнения $K'\psi = 0$.

§ 2. Исследование краевой задачи, соответствующей интегральному уравнению (1)

Построим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{2.1}$$

взяв в качестве плотности $f(t)$ искомое решение интегрального уравнения (1). По формулам Сохоцкого имеем:

$$f(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - \alpha(t)} = \Phi^+[\alpha(t)] + \Phi^-[\alpha(t)]. \tag{2.3}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1) формулы (2.2) и (2.3), придем к следующей краевой задаче для отыскания кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$:

$$a(t)\Phi^+(t)+b(t)\Phi^+[\alpha(t)]-a(t)\Phi^-(t)+b(t)\Phi^-[\alpha(t)]=h(t) \quad \text{на } L. \tag{2.4}$$

Каждому исчезающему на бесконечности решению краевой задачи (2.4) соответствует, по формуле (2.2), определенное решение интегрального уравнения (1). Так как $a(t)\neq 0$ в точках L, то, разделив обе части краевого условия (2.4) на $a(t)$ и обозначив

$$A(t)=\frac{b(t)}{a(t)}, \quad H(t)=\frac{h(t)}{a(t)},$$

будем иметь на L:

$$\Phi^+(t)+A(t)\Phi^+[\alpha(t)]-\Phi^-(t)+A(t)\Phi^-[\alpha(t)]=H(t), \tag{2.4'}$$

где

$$A(t)A[\alpha(t)]=1. \tag{3'}$$

Исключая из (2.4′) с помощью условий (2) и (3′) краевые значения функций, аналитических, соответственно, в областях D^- и D^+, мы приведем краевую задачу (2.4′) к равносильной ей паре краевых задач Карлемана:

$$\Phi^+[\alpha(t)]=-A[\alpha(t)]\Phi^+(t)+\frac{1}{2}\{A[\alpha(t)]H(t)+H[\alpha(t)]\} \quad \text{на } L, \tag{2.5}$$

$$\Phi^-[\alpha(t)]=A[\alpha(t)]\Phi^-(t)+\frac{1}{2}\{A[\alpha(t)]H(t)-H[\alpha(t)]\} \quad \text{на } L. \tag{2.6}$$

Учитывая свойство (3′), легко проверить, что функции

$$G(t)=\mp A[\alpha(t)]$$

и

$$g(t)=\frac{1}{2}\{A[\alpha(t)]H(t)\pm H[\alpha(t)]\}$$

удовлетворяют необходимым условиям разрешимости (1.3) и (1.4) задачи Карлемана при любой правой части $H(t)$.

Обозначим

$$\varkappa=\operatorname{Ind}A(t)=\operatorname{Ind}b(t)-\operatorname{Ind}a(t)$$

и назовем число $\varkappa$ индексом интегрального уравнения (1) и краевой задачи (2.4).

Рассмотрим однородную краевую задачу (2.4′).

1. Случай положительного индекса $\varkappa$. Пусть $\varkappa=\operatorname{Ind}A(t)>0$ и четно, т. е. $\varkappa=2\varkappa'$. Тогда

$$\operatorname{Ind}A[\alpha(t)]=-\operatorname{Ind}A(t)=-\varkappa<0.$$

Следовательно [см. ([10])], однородная задача

$$\Phi^+[\alpha(t)]=-A[\alpha(t)]\Phi^+(t) \quad \text{на } L \tag{2.5'}$$

разрешима и имеет $\frac{\varkappa}{2}$ линейно независимых решений, если

$$A(t_0')=A(t_0'')=-\lambda=1,$$

и $\frac{\varkappa}{2}+1$ линейно независимых решений, если

$$A(t_0')=A(t_0'')=-\lambda=-1,$$

где t_0' и t_0'' — неподвижные точки $\alpha(t)$. Общее решение задачи дается формулой

$$\Phi(z)=X(z)\left[R_{\varkappa'}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau\right],\quad z\in D^+, \tag{2.7}$$

где $R_{\varkappa'}(z)$ — рациональная функция с произвольными коэффициентами, имеющая вид

$$R_{\varkappa'}(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_{\varkappa'}}{z^{\varkappa'}},\quad c_0=0 \text{ при } \lambda=1, \tag{2.8}$$

$\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения Фредгольма

$$K_+\varphi\equiv\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=\lambda R_{\varkappa'}[\alpha(t)]-R_{\varkappa'}(t),$$

K_+ — оператор без собственных функций, $X(z)$ — каноническая функция задачи, определяемая формулой

$$X(z)=z^{\frac{\varkappa}{2}}\exp\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-z},$$

$\nu(t)$ — решение уравнения

$$K_+\nu=-\ln A^*(t),\quad A^*(t)=-\lambda\left[\frac{t}{\alpha(t)}\right]^{\frac{\varkappa}{2}}A[\alpha(t)].$$

Если индекс $\varkappa$ — нечетное число, т. е. $\varkappa=2\varkappa'-1$, $\varkappa'=1,2,\ldots$, то краевая задача (2.5′) имеет $\frac{\varkappa+1}{2}=\varkappa'$ линейно независимых решений, общее решение задачи дается, по-прежнему, формулой (2.7), но каноническая функция $X(z)$ определяется в этом случае по формуле

$$X(z)=(z-t_0)\,z^{\frac{\varkappa-1}{2}}\exp\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-z},$$

где $\nu(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K_+\nu=-\ln A_0^*(t),\quad A_0^*(t)=\frac{t_0-t}{\alpha(t)-t_0}\left[\frac{t}{\alpha(t)}\right]^{\frac{\varkappa-1}{2}}A[\alpha(t)]$$

и t_0 — та из двух неподвижных точек сдвига, в которой $A(t_0)=1$.

Так как индекс внешней однородной задачи Карлемана

$$\Phi^-[\alpha(t)]=A[\alpha(t)]\,\Phi^-(t) \text{ на } L \tag{2.6′}$$

отрицателен, то эта задача неразрешима; следовательно,

$$\Phi(z)\equiv 0,\quad z\in D^-. \tag{2.9}$$

2. Случай отрицательного индекса $\varkappa$. Пусть $\varkappa<0$. Тогда

$$\operatorname{Ind} A[\alpha(t)]=-\varkappa>0.$$

Предположим, что $\varkappa$ четно. Однородная краевая задача (2.5′) теперь неразрешима, т. е.

$$\Phi(z) \equiv 0, \quad z \in D^+. \tag{2.10}$$

Однородная задача (2.6′), напротив, разрешима и, как следует из результатов § 1, имеет $-\frac{\varkappa}{2}+1$ линейно независимых решений, если

$$A(t_0') = A(t_0'') = \lambda = 1,$$

и $-\frac{\varkappa}{2}$ линейно независимых решений, если

$$A(t_0') = A(t_0'') = \lambda = -1.$$

Общее решение представляется формулой

$$\Phi(z) = X(z)\left[P_{\varkappa'}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau\right], \quad z \in D^-, \tag{2.11}$$

где $P_{\varkappa'}(z)$ — многочлен степени не выше $-\varkappa'$ с $-\varkappa'+1$ произвольными коэффициентами в случае $\lambda=1$ и с $-\varkappa'$ произвольными коэффициентами в случае $\lambda=-1$; $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K_-\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = P_{\varkappa'}(t) - \lambda P_{\varkappa'}[\alpha(t)],$$

а каноническая функция $X(z)$ определяется формулой

$$X(z) = z^{\frac{\varkappa}{2}} \exp\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

где $\mu(t)$ — решение уравнения

$$K_-\mu = \ln A^*(t), \quad A^*(t) = \lambda\left[\frac{t}{\alpha(t)}\right]^{\frac{\varkappa}{2}} A[\alpha(t)].$$

В случае нечетного индекса $\varkappa = 2\varkappa'+1$, $\varkappa' = -1, -2, \ldots$, задача (2.6′) имеет $-\varkappa'$ линейно независимых решений; все эти решения могут быть получены из формулы (2.11), где каноническая функция $X(z)$ определяется формулой

$$X(z) = (z - t_0)\, z^{\frac{\varkappa-1}{2}} \exp\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\,d\tau;$$

здесь $\mu(t)$ — решение уравнения

$$K_-\mu = \ln A_0^*(t), \quad A_0^*(t) = \frac{t - t_0}{\alpha(t) - t_0}\left[\frac{t}{\alpha(t)}\right]^{\frac{\varkappa-1}{2}} A[\alpha(t)],$$

причем $A(t_0) = -1$.

3. Случай нулевого индекса $\varkappa$. Пусть $\operatorname{Ind} A(t) = 0$. Тогда если $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, то задача (2.5′) неразрешима, а задача (2.6′) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение; если же $A(t_0') = A(t_0'') = -1$, то неразрешима задача (2.6′), а задача (2.5′) разрешима и имеет одно линейно независимое решение.

Основные результаты проведенного исследования можно резюмировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Однородная краевая задача (2.4′) разрешима при любом индексе* $\varkappa$ ($\varkappa = 2\varkappa'$ *или* $\varkappa = 2\varkappa' + 1$).

Если $\varkappa > 0$, *то однородная задача (2.4′) имеет* $\varkappa' + 1$ *линейно независимых решений, если* $A(t) = -1$ *в обеих неподвижных точках сдвига* $\alpha(t)$, *и* $\varkappa'$ *линейно независимых решений в остальных случаях. Общее решение однородной задачи дается формулами (2.7) и (2.9).*

Если $\varkappa < 0$, *то однородная задача (2.4′) имеет* $-\varkappa' + 1$ *линейно независимых решений, если* $A(t) = 1$ *в обеих неподвижных точках* $\alpha(t)$, *и* $-\varkappa'$ *линейно независимых решений в остальных случаях. Общее решение выражается формулами (2.10) и (2.11).*

При $\varkappa = 0$ *однородная задача (2.4′) имеет одно линейно независимое решение.*

Изучим неоднородную краевую задачу (2.4′).

Рассмотрим случай положительного индекса. Если $\varkappa > 0$, то внутренняя краевая задача Карлемана (2.5) разрешима и ее общее решение выражается формулой [см. ([9])]:

$$\Phi(z) = X(z)\left[c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_{\varkappa'}}{z^{\varkappa'}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z}\right], \quad z \in D^+, \qquad (2.12)$$

где $c_0 = 0$, если $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, $X(z)$ — каноническая функция соответствующей однородной задачи, $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K_+\varphi = \lambda R_{\varkappa'}[\alpha(t)] - R_{\varkappa'}(t) + \frac{1}{2}\left\{\frac{H(t)}{X^+(t)} - \frac{\lambda H[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]}\right\}.$$

Обратимся теперь к краевой задаче (2.6), определяющей функцию $\Phi(z)$ в области D^-. При $\varkappa > 0$ задача (2.6), вообще говоря, неразрешима. Как установлено в § 1, единственное решение задачи (2.6), аналитическое в D^-, существует при выполнении $\varkappa' - 1$ условий разрешимости

$$\int_L t^{k-1}\varphi^*(t)\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \varkappa' - 1, \qquad (2.13)$$

где $\varphi^*(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K_-\varphi = \frac{1}{2}\left\{\frac{H(t)}{X^-(t)} - \frac{\lambda H[\alpha(t)]}{X^-[\alpha(t)]}\right\}, \qquad (2.14)$$

и дается формулой

$$\Phi^*(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \quad z \in D^-, \qquad (2.15)$$

где $X(z)$ определяется из условия $X^-[\alpha(t)] = \lambda A[\alpha(t)]\,X^-(t)$ на L. В случае, если $A(t_0') = A(t_0'') = \lambda = -1$, для существования решения $\Phi^*(z)$ должно еще выполняться условие разрешимости

$$\int_L \left\{\frac{H(t)}{X^-(t)} + \frac{H[\alpha(t)]}{X^-[\alpha(t)]}\right\}\psi(t)\,dt = 0, \qquad (2.13')$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение уравнения $K_-'\psi = 0$, союзного с уравнением $K_-\varphi = 0$.

Рассмотрим теперь случай отрицательного индекса. При $\varkappa < 0$ неоднородная задача (2.5), вообще говоря, неразрешима. Единственное ре-

шение задачи, аналитическое в D^+, существует при выполнении $-\varkappa'$ условий разрешимости

$$\int_L \frac{\varphi_*(t)}{t^k}\,dt = 0, \quad k = 2, \ldots, -\varkappa', \tag{2.16}$$

$$\int_L \frac{\varphi_*(t)}{t}\,dt = 0, \tag{2.16'}$$

если $A(t_0') = A(t_0'') = -\lambda = 1$, и при выполнении $-\varkappa' - 1$ условий (2.16) в двух остальных случаях; $\varphi^*(t)$ есть решение интегрального уравнения

$$K_+\varphi = \frac{1}{2}\left\{\frac{H(t)}{X^+(t)} - \frac{\lambda H[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]}\right\}. \tag{2.17}$$

Решение задачи (2.5) дается формулой

$$\Phi_*(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - z} - \frac{1+\lambda}{2\tau}\right]\varphi_*(\tau)\,d\tau, \quad z \in D^+, \tag{2.18}$$

где $X(z)$ определяется из условия

$$X^+[\alpha(t)] = -\lambda A[\alpha(t)]\,X^+(t) \text{ на } L.$$

Рассмотрим краевую задачу (2.6). Общее решение задачи, аналитическое в D^-, дается формулой

$$\Phi(z) = X(z)\left[P_{\varkappa'}(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z}\right], \quad z \in D^-, \tag{2.19}$$

где $P_{\varkappa'}(z)$ — многочлен степени не выше $-\varkappa'$ с $-\varkappa'$ произвольными коэффициентами, если $A(t_0') = A(t_0'') = \lambda = -1$, и $-\varkappa' + 1$ произвольными коэффициентами в остальных случаях, $X(z)$ — каноническая функция соответствующей однородной задачи, $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K_-\varphi = P_{\varkappa'}(t) - \lambda P_{\varkappa'}[\alpha(t)] + \frac{1}{2}\left\{\frac{H(t)}{X^-(t)} - \frac{\lambda H[\alpha(t)]}{X^-[\alpha(t)]}\right\}.$$

Если индекс $\varkappa = 0$, то разрешимы обе задачи (2.5) и (2.6). Пусть $A(t_0') = A(t_0'') = 1$. Тогда задача (2.5) имеет единственное решение, получающееся из формулы (2.12) при $c_0 = c_1 = \ldots = c_{\varkappa'} = 0$. Решение задачи (2.6) зависит от одной произвольной постоянной и получается из формулы (2.19), если в ней положить $P_{\varkappa'}(z) \equiv C$. Если $A(t_0') = A(t_0'') = -1$, то задача (2.5) имеет решение, зависящее от одной произвольной постоянной и получающееся из формулы (2.12) при $c_1 = c_2 = \ldots = c_{\varkappa'} = 0$. Задача (2.6) в этом случае имеет единственное решение, получающееся из формулы (2.19) при $P_{\varkappa'}(z) \equiv 0$. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Неоднородная краевая задача* (2.4′) *безусловно разрешима в следующих случаях*:

1) $\varkappa = 0$;
2) $\varkappa = -1$;
3) $\varkappa = -2$, $\lambda = -1$.

При $\varkappa > 0$ *общее решение задачи выражается формулами* (2.12) *и* (2.15), *причем для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы*

выполнялись $\varkappa'$ *условий* (2.13) *и* (2.13′), *если* $A(t_0') = A(t_0'') = -1$, *и* $\varkappa' - 1$ *условий* (2.13) *в остальных случаях.*

При $\varkappa < 0$ *общее решение задачи* (2.4′) *дается формулами* (2.18) *и* (2.19), *и для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись* $-\varkappa'$ *условий* (2.16) *и* (2.16′), *если* $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, *и* $-\varkappa' - 1$ *условий* (2.16) *в остальных случаях.*

Заметим, что, выражая решения интегральных уравнений (2.14) и (2.17) через их резольвенты, каждому условию разрешимости (2.13), (2.13′), (2.16) и (2.16′) неоднородной задачи можно придать форму

$$\int_L h_k(t)\, H(t)\, dt = 0,$$

где $h_k(t)$ — вполне определенные линейно независимые функции, не зависящие от $H(t)$.

§ 3. Исследование интегрального уравнения (1) и союзного с ним уравнения

Решение $\Phi(z)$ краевой задачи (2.4′), к которой мы свели в начале § 3 интегральное уравнение (1), представляется интегралом типа Коши (2.1) и, в силу этого, оно должно удовлетворять дополнительному условию $\Phi(\infty) = 0$. Решение однородной задачи (2.4′), очевидно, автоматически удовлетворяет условию $\Phi(\infty) = 0$ в случаях, если $\varkappa > 0$, или если $\varkappa = 0$ и $A(t_0') = A(t_0'') = -1$.

В случаях, если $\varkappa < 0$ или если $\varkappa = 0$ и $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, общее решение однородной задачи (2.4′), исчезающее на бесконечности, получается, если в формуле (2.11) положить $c_{\varkappa'} = 0$. Следовательно, в этих последних случаях при условии $\Phi(\infty) = 0$ однородная задача (2.4′) имеет $-\varkappa'$ линейно независимых решений, если $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, и $-\varkappa' - 1$ линейно независимых решений в остальных случаях.

ТЕОРЕМА 3. *Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения* (1) *равно числу линейно независимых решений однородной задачи* (2.4′) (*при* $\varkappa > 0$, *а также при* $\varkappa = 0$ *и* $A(t_0') = A(t_0'') = -1$) *или на единицу меньше этого числа* (*при* $\varkappa < 0$, *а также при* $\varkappa = 0$ *и* $A(t_0') = A(t_0'') = 1$).

Следствие. Однородное интегральное уравнение (1) не имеет других решений, кроме тривиального, в следующих трех случаях:

1) $\varkappa = 0$, $A(t_0') = A(t_0'') = 1$;
2) $\varkappa = -1$;
3) $\varkappa = -2$, $A(t_0') = A(t_0'') = -1$.

При $\varkappa > 0$ исчезающее на бесконечности решение неоднородной краевой задачи (2.4′) существует, если, кроме условий (2.13), (2.13′) (при $\lambda = -1$) и (2.13) (при $\lambda = 1$) выполнено еще условие

$$\int_L t^{\varkappa'-1}\varphi^*(t)\, dt = 0. \tag{3.1}$$

При $\varkappa = 0$ и $A(t_0') = A(t_0'') = -1$ неоднородная задача (2.4′) не имеет, вообще говоря, решений, обращающихся в нуль на бесконечности. Такое решение существует и единственно, если выполнено условие (2.13′).

ТЕОРЕМА 4. *Неоднородное интегральное уравнение* (1) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение, если*

1) $\varkappa = 0$ *и* $A(t_0') = A(t_0'') = +1$;

2) $\varkappa = -1$;

3) $\varkappa = -2$ *и* $A(t_0') = A(t_0'') = -1$.

В случае $\varkappa > 0$ *для существования решения неоднородного интегрального уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись* $\varkappa' + 1$ *условий разрешимости* (2.13), (2.13′) *и* (3.1), *если* $A(t_0') = A(t_0'') = -1$, *и* $\varkappa'$ *условий* (2.13), (3.1) *в остальных случаях. При* $\varkappa < 0$ *для разрешимости неоднородного уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись* $-\varkappa'$ *условий* (2.16), (2.16′), *если* $A(t_0') = A(t_0'') = 1$, *и* $-\varkappa' - 1$ *условий* (2.16) *в остальных случаях. При* $\varkappa = 0$ *и* $A(t_0') = A(t_0'') = -1$ *уравнение разрешимо при выполнении условия* (2.13′).

Интегральное уравнение, союзное с уравнением (1), имеет вид

$$a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\alpha(\tau) - t}\,d\tau = h_1(t). \tag{3.2}$$

Заменяя под знаком интеграла в левой части (3.2) τ на $\alpha(\tau)$, будем иметь:

$$a(t)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b[\alpha(\tau)]\,\varphi[\alpha(\tau)]\,\alpha'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = h_1(t). \tag{3.2′}$$

Введем функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{b[\alpha(\tau)]\,\alpha'(\tau)\,\psi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau. \tag{3.3}$$

Используя формулы Сохоцкого для интеграла типа Коши (3.3), мы сведем интегральное уравнение (3.2′) к краевой задаче

$$\Psi^+(t) + \frac{\alpha'(t)}{A(t)}\Psi^+[\alpha(t)] - \Psi^-(t) + \frac{\alpha'(t)}{A(t)}\Psi^-[\alpha(t)] = \frac{\alpha'(t)\,h_1[\alpha(t)]}{A(t)}, \tag{3.4}$$

где, по-прежнему, $A(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$.

Каждому исчезающему на бесконечности решению союзной краевой задачи (3.4) соответствует по формуле

$$\psi(t) = \frac{\alpha'(t)}{b(t)}\{\Psi^+[\alpha(t)] - \Psi^-[\alpha(t)]\}$$

определенное решение союзного уравнения (3.2). Обозначим

$$A^*(t) = \frac{\alpha'(t)}{A(t)}.$$

Индекс союзной задачи (3.4) и союзного уравнения (3.2) равен

$$\varkappa^* = \operatorname{Ind} A^*(t) = \operatorname{Ind} \alpha'(t) - \operatorname{Ind} A(t) = \operatorname{Ind} \alpha'(t) - \varkappa.$$

Вычислим $\operatorname{Ind} \alpha'(t)$. Дифференцируя равенство $\alpha(\tau) = t$, где τ и t — точки контура L, по дуговой абсциссе s, будем иметь:

$$\alpha'(\tau)\frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s}$$

или

$$\alpha'(\tau) = \frac{t'}{\tau'}.$$

Следовательно, $\operatorname{Ind} \alpha'(\tau) = \operatorname{Ind} \frac{t'}{\tau'} = -1 - 1 = -2$. Таким образом, индексы союзного интегрального уравнения (3.2) и данного уравнения (1) связаны соотношением $\varkappa^* = -\varkappa - 2$. Заметим еще, что в неподвижных точках сдвига $\alpha(t)$ коэффициенты $A(t)$ и $A^*(t)$ данной и союзной задач всегда имеют, в силу свойства (1.5), противоположные знаки.

Подсчитывая по теореме 3 число линейно независимых решений союзного однородного уравнения, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *Данное однородное интегральное уравнение и союзное с ним однородное уравнение* (3.2) *имеют одинаковое число линейно независимых решений.*

Полученное нами предложение по форме совпадает со второй теоремой Фредгольма. Для сравнения отметим, что в теории особых интегральных уравнений с ядром Коши [см. ([1]), гл. III] разность чисел линейно независимых решений данного и союзного однородных уравнений равна индексу данного уравнения (третья теорема Нетера).

Опираясь на справедливое для всех линейных операторов тождество

$$\int_L \psi T \varphi \, dt = \int_L \varphi T' \psi \, dt,$$

где T и T' — данный и союзный с ним операторы, легко установить что для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (1) необходимо выполнение условий

$$\int_L h(t) \psi_k(t) \, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.5}$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_p(t)$ — полная система линейно независимых решений однородного союзного уравнения (3.2). Из теорем 3—5 следует, что число линейно независимых решений однородного союзного уравнения (3.2) и число условий разрешимости неоднородного уравнения (1) совпадают.

Поэтому выполнение условий (3.5) оказывается и достаточным для разрешимости неоднородного уравнения (1). Теорему 4 теперь можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА 4′. *Если однородное уравнение* (1) *не имеет нетривиальных решений, то соответствующее неоднородное уравнение безусловно разрешимо и имеет единственное решение. Если же однородное уравнение* (1) *нетривиально разрешимо, то неоднородное уравнение* (1), *вообще говоря, неразрешимо. Для разрешимости этого последнего уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.5), *где* $\{\psi_p(t)\}$ — *полная система собственных функций союзного уравнения* (3.2).

Таким образом, для интегрального уравнения (1) справедлива альтернатива Фредгольма. Заметим, что первая часть альтернативы реализуется только в трех случаях:

1) $\varkappa = 0$ и $A(t_0') = A(t_0'') = 1$;

2) $\varkappa = -1$;

3) $\varkappa = -2$, $A(t_0') = A(t_0'') = -1$.

В заключение отметим, что аналогично может быть построена теория особого интегрального уравнения со сдвигом

$$a(t)\overline{f(t)} + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau = h(t) \tag{3.6}$$

при условиях, что функция $\alpha(t)$ переводит контур L в себя с сохранением направления обхода на нем, причем $\alpha[\alpha(t)] = t$ и $\frac{b(t)\overline{b[\alpha(t)]}}{a(t)\overline{a[\alpha(t)]}} = 1$.

При указанных условиях интегральное уравнение (3.6) сводится к паре краевых задач типа задачи Карлемана:

$$\Phi^{\pm}[\alpha(t)] = \mp\overline{A[\alpha(t)]\,\Phi^{\pm}(t)} + \frac{1}{2}\{\overline{A[\alpha(t)]}\,h(t) \pm \overline{h[\alpha(t)]}\}. \tag{3.7}$$

В работе ([10]) рассмотрена задача определения по краевому условию (3.7) двух различных функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, аналитических во внутренней области D^+, причем выполнение условия $\alpha[\alpha(t)] = t$ не предполагается. В случае, если $\Phi_1^+(z) \equiv \Phi_2^+(z)$ в D^- и $\alpha[\alpha(t)] = t$, мы получаем задачу (3.7) для внутренней области D^+. Как недавно показал Э. Г. Хасабов, решение внутренней задачи (3.7) может быть получено методом, развитым в работе ([10]), и имеет много общего с решением краевой задачи Карлемана. Решение задачи (3.7) для бесконечной области D^- не представляет дополнительных трудностей, кроме тех, которые встречаются при решении внешней задачи Карлемана (1.2), поскольку интегральное уравнение Фредгольма, лежащее в основе решения внешней задачи (3.7), по-прежнему не имеет других нетривиальных решений, кроме произвольной постоянной.

Ростовский гос. университет

Поступило
3.VI.1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., Краевые задачи, Физматгиз, М., 1958.

[2] Gellerstedt S., Quelques problèmes mixtes, pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv för Math., Astr. och Physik., 26, № 3 (1938), 1—32.

[3] Трикоми Ф., О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, Гостехиздат, 1947.

[4] Михлин С. Г., Об интегральном уравнении F. Tricomi, Доклады Ак. наук СССР, 59, № 6 (1948), 1053—1056.

[5] Бицадзе А. В., К проблеме уравнений смешанного типа, Труды Матем. ин-та Ак. наук СССР, XLI (1953), 1—60.

[6] Гахов Ф. Д. и Чибрикова Л. И., О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сборн., 35 (77):3 (1954), 395—436.

[7] Carleman T., Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. Mathem. Kongr., Zürich, B. I, 1932.

[8] Халилов З. И., Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Баку, Изд. Ак. наук Азерб. ССР, 1949.

[9] Квеселава Д. А., Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, Доклады Ак. наук СССР, 55, № 8 (1947), 683—686.

[10] Квеселава Д. А., Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Матем. ин-та Ак. наук Груз. ССР, 16 (1948), 39—80.

[11] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 887—898

Г. В. БАДАЛЯН

УСЛОВИЕ РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫЙ СТЕПЕННОЙ РЯД В ОСНОВНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

В статье приводится новое, более общее, чем полученное ранее автором, условие разложимости функций во введенный им обобщенный ряд Тейлора.

В работе ([1]) установлено условие разложимости некоторых классов аналитических и квазианалитических функций в обобщенный степенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t), \tag{1}$$

где $t \in (0, u]$,

$$\omega_n(u, t) = \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \int_u^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} dt_2 \ldots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n =$$

$$= \frac{(-1)^n \prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}, \tag{2}$$

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty, \tag{3}$$

а $\alpha > 0$ — произвольное число.

Промежуток $(0, u]$ будем называть основным промежутком, а точку u — центром разложения.

В настоящей работе доказывается, что функции $\varphi(t)$ разлагаются в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный степенной ряд при существенно менее ограничительных условиях, чем это установлено в работе ([1]).

§ 1. Оценка модуля n-й обобщенной производной полинома Лежандра

Известно, что полиномы Лежандра для отрезка [0,1] могут быть представлены формулой

$$X_0(t) = 1, \quad X_m(t) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta + \nu}{\zeta - \nu} \frac{t^\zeta d\zeta}{\zeta}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где простой контур C охватывает окрестности нулей знаменателя подынтегральной функции [см. ([2]), стр. 8].

Определение. Назовем функции (если они существуют)

$$f'(t) = f_1(t),\ f_2(t) = \left(\frac{f_1(t)}{t^{\gamma_1-1}}\right)',\ \ldots,\ f_{k+1}(t) = \left(\frac{f_k(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)',$$
$$k = 2, 3, \ldots,$$

последовательными обобщенными производными функции $f(t)$ при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, $\gamma_0 = 0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots$.

Рассмотрим последовательность чисел $\{\gamma_\nu\}$, определенную в (3), и для произвольного $\varkappa$ составим обобщенные производные функции

$$t^{-\varkappa} X_m(t)$$

при последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

Эти обобщенные производные удобно обозначить через

$$[t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n]}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого $u \in (0, 1)$ и $t \in (0, u]$ справедливо неравенство*

$$|[t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n]}| \leqslant 2am^{\frac{3}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} [(am)^2 + \gamma_\nu'^2]^{\frac{1}{2}}\, t^{-\varkappa-\gamma_n-1}, \tag{4}$$

где $m \geqslant 1$, $a \geqslant 2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{1-u}}\right)$, $\gamma_\nu' = \varkappa + \gamma_\nu$.

Действительно, после $(n+1)$-кратного обобщенного дифференцирования

$$t^{-\varkappa} X_m(t) = \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu} \frac{t^{\zeta-\varkappa}\, d\zeta}{\zeta}$$

при последовательности $\{\gamma_\nu\}$ получаем:

$$[t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n+1]} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu} \prod_{\nu=1}^{n} (\zeta-\varkappa-\gamma_n)\, t^{\zeta-\varkappa-\gamma_n-1} d\zeta. \tag{5}$$

Нетрудно заметить, что

$$[t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n+1]} = Q_m(t) + Q_m^*(t), \tag{6}$$

где

$$Q_m^*(t) = t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu} \prod_{\nu=1}^{n} (\zeta-\varkappa-\gamma_n)\, t^{\zeta}\, d\zeta, \tag{7}$$

$$Q_m^*(t) = t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu} \prod_{\nu=1}^{n} (\zeta-\varkappa-\gamma_\nu)\, t^{\zeta}\, d\zeta, \tag{8}$$

причем

$$\Gamma_1 = \Gamma_1([-iam, iam]),$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_2(|\zeta| = am,\ \mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0).$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к оценке сверху модулей правых частей равенств (7) и (8).

Заметим, что

$$|Q_m(t)| \leqslant t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \frac{\sqrt{2m+1}}{2\pi} \int\limits_{-am}^{am} \prod_{\nu=1}^{m} \left|\frac{iy+\nu}{iy-\nu}\right| \prod_{\nu=1}^{n} |iam-\varkappa-\gamma_n|\,dy =$$

$$= t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \prod_{\nu=1}^{n} \sqrt{(am)^2+(\gamma_\nu+\varkappa)^2}\, \frac{2am\sqrt{2m+1}}{2\pi},$$

или

$$|Q_m(t)| \leqslant am^{\frac{3}{2}} \prod_{\nu=1}^{n} [a^2m^2+\gamma_\nu'^2]^{\frac{1}{2}}\, t^{-\varkappa-\gamma_n-1}, \tag{9}$$

где

$$\gamma_\nu' = \gamma_\nu + \varkappa,\ t \in (0, 1].$$

Для оценки сверху $|Q_m^*(t)|$ нам понадобится

ЛЕММА. *В условиях теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2} \left| \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\, t^{\zeta} \right| \leqslant 1. \tag{10}$$

Действительно, при $t \in (0, u]$

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2} \left| \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\, t^{\zeta} \right| \leqslant \sup_{\zeta\in\Gamma_2} \left| \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\, u^{\zeta} \right| = \sup_{\zeta\in\Gamma_2} \left| \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\, e^{-\operatorname{Re}\zeta \ln\frac{1}{u}} \right|. \tag{10'}$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что

$$\zeta = ame^{i\varphi} = \mathrm{R}e^{i\varphi},$$

следовательно,

$$\prod_{\nu=1}^{m} \left|\frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\right| = \prod_{\nu=1}^{m} \frac{R^2+\nu^2+2R\nu\cos\varphi}{R^2+\nu^2-2R\nu\cos\varphi} = \prod_{\nu=1}^{m} \left(1+\frac{4R\nu\cos\varphi}{R^2+\nu^2-2R\nu\cos\varphi}\right), \tag{11}$$

где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Это значит, что при $\zeta \in \Gamma_2$

$$\ln \prod_{\nu=1}^{m} \left|\frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\right| = \sum_{\nu=1}^{m} \ln\left(1+\frac{4R\nu\cos\varphi}{R^2+\nu^2-2R\nu\cos\varphi}\right) <$$

$$< \sum_{\nu=1}^{m} \frac{4R\nu\cos\varphi}{R^2+\nu^2-2R\nu\cos\varphi} < \sum_{\nu=1}^{m} \frac{4R\nu\cos\varphi}{R^2-2Rm+\nu^2} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{4R\nu\cos\varphi}{m^2a(a-2)+\nu^2}. \tag{12}$$

Возвращаясь к (10′), в силу (12) получаем:

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2} \left| \prod_{\nu=1}^{m} \frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}\, t^{\zeta} \right| < \exp\left[4R\cos\varphi \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\nu}{m^2a(a-2)+\nu^2} - R\cos\varphi \ln\frac{1}{u}\right] <$$

$$< \exp\left[R\cos\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{4\nu}{m^2a(a-2)} - \ln\frac{1}{u}\right)\right] <$$

$$< \exp\left[R\cos\varphi\left(\frac{4}{a(a-2)} - \ln\frac{1}{u}\right)\right],$$

или

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2}\left|\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}t^{\zeta}\right| < e^{R\cos\varphi\left[\frac{4}{(a-2)^2}-\ln\frac{1}{u}\right]}. \tag{13}$$

Но $a \geqslant 2\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-u}}\right)$, или $\frac{4}{(a-2)^2} \leqslant 1-u$. Следовательно,

$$\frac{4}{(a-2)^2} \leqslant 1-u+\frac{1}{2}(1-u)^2+\frac{1}{3}(1-u)^3+\ldots =$$

$$= -\ln[1-(1-u)] = -\ln u = \ln\frac{1}{u},$$

т. е.

$$\frac{4}{(a-2)^2} \leqslant \ln\frac{1}{u}. \tag{14}$$

Из (13), согласно (14), находим, что при $0 < t \leqslant u < 1$

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2}\left|\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\zeta+\nu}{\zeta-\nu}t^{\zeta}\right| \leqslant 1.$$

Этим лемма доказана.

Для оценки сверху $|Q_m^*(t)|$ при $t \in (0, u]$ нам, в силу (10), достаточно заметить, что

$$\sup_{\zeta\in\Gamma_2}\prod_{\nu=1}^{n}\left|\zeta+\gamma'_\nu\right| = \prod_{\nu=1}^{n}(a^2m^2+\gamma'^2_\nu)^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Из (8), используя (10) и (15), окончательно получаем, что при $a \geqslant 2\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-u}}\right)$

$$|Q_m^*(t)| \leqslant m^{\frac{3}{2}}a\prod_{\nu=1}^{n}(a^2m^2+\gamma'^2_\nu)^{\frac{1}{2}}t^{-\gamma_n-\varkappa-1}. \tag{16}$$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что из (6) следует:

$$|[t^{-\varkappa}X_m(t)]^{[n+1]}| \leqslant |Q_m(t)| + |Q_m^*(t)|,$$

откуда, в силу (9) и (16), получаем, что при $t \in (0, u]$, $0 < u < 1$, $\gamma'_\nu = \gamma_\nu + \varkappa$, $a \geqslant 2\left(1+\sqrt{\frac{1}{1-u}}\right)$

$$|[t^{-\varkappa}X_m(t)]^{[n+1]}| \leqslant 2a\cdot m^{\frac{3}{2}}\prod_{\nu=1}^{n}(a^2m^2+\gamma'^2_\nu)^{\frac{1}{2}}t^{-\varkappa-\gamma_n-1}.$$

Этим теорема доказана.

§ 2. Общее достаточное условие разложимости функций в ряд (1)

В силу теоремы (1.1) работы [1], вопрос разложимости бесконечно дифференцируемой на $(0, u]$ функции в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный степенной ряд при последовательности $\{\gamma_\nu\}$ сводится к оценке $R_n(u, t)$

в формуле

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(u, t) + R_n(u, t), \tag{17}$$

где

$$t \in (0, u], \quad a_0 = \varphi(u), \quad a_k = u^{-\gamma_k + \gamma_{k-1} + 1} \varphi_k(u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$\omega_k(u, t)$ определено формулой (2),

$$R_n(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} dt_2 \ldots \int_u^{t_{n+1}} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) \, dt_{n+1} =$$

$$= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) \, dt_0 \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n =$$

$$= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) \frac{(-1)^n t_0^{\gamma_n}}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} \, dt_0. \tag{19}$$

Не затрагивая пока вопроса о классах функций, разлагающихся в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный степенной ряд при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, отметим одно общее достаточное условие, при котором

$$\lim_{n \to \infty} R_n(u, t) = 0,$$

когда $t \in (0, u]$.

ТЕОРЕМА 2. *Для разложимости бесконечно дифференцируемой на $(0, u]$ функции $\varphi(t)$ в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный степенной ряд при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, определенной формулой (3), достаточно выполнения условия*

$$|\varphi_{n+1}(t)| < C \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \varkappa) \, t^{-\varkappa - \gamma_n - 1}, \tag{20}$$

где $\varphi(t)$ определено в (18), $t \in (0, u]$, n — достаточно большое число, а $\varkappa$ и $C > 0$ — абсолютные постоянные.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что при $0 < t \leqslant t_0 \leqslant u$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} =$$

$$= (-1)^n \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n \geqslant 0.$$

Это значит, что из (19) будем иметь:

$$|R_n(u, t)| \leqslant \int_t^u |\varphi_{n+1}(t)| \frac{t_0^{\gamma_n}}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} dt_0.$$

Следовательно, в силу условия теоремы,

$$|R_n(u, t)| < C \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa + \gamma_\nu) \int_t^u t_0^{-\varkappa-1} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} dt_0 =$$

$$= C \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa + \gamma_\nu) \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{t^{-\zeta} \int_t^u t_0^{\zeta-\varkappa-1} dt_0}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} d\zeta, \tag{21}$$

причем изменение порядка интегрирования законно.

Заметив, что при $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - \varkappa) \prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)} = 0,$$

из (21) получаем:

$$|R_n(u, t)| < C \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \varkappa) \frac{u^{-\varkappa}}{2\pi} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \varkappa) \prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}, \tag{21'}$$

или, после замены $\zeta = \zeta' + \varkappa$,

$$|R_n(u, t)| < C \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \varkappa) \frac{t^{-\varkappa}}{2\pi} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\varkappa} d\zeta}{\zeta \prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \varkappa + \gamma_\nu)}.$$

Если в качестве контура C взять бесконечную прямую $(\mu - i\infty, \mu + i\infty)$, где $\mu > 0$ — произвольное число, то будем иметь:

$$|R_n(u, t)| < C_0 \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_n + \varkappa}{\gamma_\nu + \varkappa_1} t^{-\varkappa_1}, \tag{21''}$$

где $\varkappa_1 = \varkappa + \mu$, $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

В силу расходимости ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu}$, окончательно получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(u, t) = 0$$

для всех $t \in (0, u]$.

Теорема доказана.

§ 3. Обобщенный степенной ряд и классы квазианалитических функций

Определение 1. Условимся говорить, что

$$\varphi(t) \in C_{\{\dot{m}_n\}}([0, u]), \tag{22}$$

если

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leqslant \dot{m}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad t \in [0, u], \quad 0 < u < \infty,$$

где последовательность $\{\dot{m}_n\}$ выпукло регуляризована относительно логарифмов и удовлетворяет условиям:

1) $\int\limits^{\infty} \frac{\ln \dot{T}(r)}{r^2} dr = \infty$, где $\dot{T}(r) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{\dot{m}_n}$; (23)

2) числовая функция $n(r)$ последовательности $\left\{\beta \frac{\dot{m}_n}{\dot{m}_{n-1}}\right\}$ такова, что

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{r^2}{n(r)} \int\limits_r^{\infty} \frac{n(t)\,dt}{t(t^2 + r^2)} < \Delta_1 = \ln \Delta, \tag{24}$$

где $\beta > 0$ — абсолютная постоянная, а $\Delta = \Delta(\beta)$ $(1 < \Delta < \infty)$.

Определение 2. Условимся говорить, что

$$\varphi(t) \in C_{\{\dot{m}_n, \varkappa\}}([0, u]), \tag{25}$$

если

$$t^{\varkappa} \varphi(t) \in C_{\{\dot{m}_n\}}([0, u]).$$

Замечание. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{m}_n}{\dot{m}_{n-1}}$$

и интеграл

$$\int\limits^{\infty} \frac{\ln \dot{T}(r)}{r^2} dr$$

сходятся или расходятся одновременно.

ТЕОРЕМА 3 (основная). *Всякая функция* $\varphi(t)$, *принадлежащая на* $[0, 1]$ *некоторому классу аналитических или квазианалитических функций* $C_{\{\dot{m}_n, \varkappa\}}$, *в окрестности любой точки* $u \in (0, 1)$ *разлагается в сходящийся на* $(0, u]$ *обобщенный степенной ряд*

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t) \tag{26}$$

при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, *если выполняются условия*:

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_\nu = \beta \frac{\dot{m}_\nu}{\dot{m}_{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $\beta > 6e\Delta a$, $a \geqslant 2\left(1 + \sqrt{\frac{1}{1-u}}\right)$, *а* Δ *определено в* (24).

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы 2 доказательство теоремы 3 сводится к оценке $(n+1)$-й обобщенной производной функции $\varphi(t)$ при $t \in (0, u]$, $0 < u < 1$, и последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

Установим предварительно два предложения.

ЛЕММА 1. *В условиях теоремы справедливо неравенство*

$$|[t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n+1]}| \leqslant C a m^{\frac{3}{2}} \frac{(\Delta a m)^{n(am)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(am)} \gamma_\nu} t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e^{\varkappa_1 \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}}, \tag{28}$$

где $n(r)$ — числовая функция последовательности $\{\gamma_\nu\}$, $C > 0$ — абсолютная постоянная, а $\varkappa_1 > \varkappa$ — произвольное число.

Действительно, доказательство леммы, в силу теоремы 1, сводится к оценке сверху выражения

$$\prod_{\nu=1}^{n} (R^2 + \gamma_\nu'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right) < \prod_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right) = 2R^2 \int_0^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t^2 + R^2)} =$$

$$= 2\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt + 2R^2 \int_R^\infty \frac{n(t)\,dt}{t(t^2+R^2)}. \tag{29}$$

Но

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = n(R) \ln R - \int_0^R \ln t\, dn(t) = n(R) \ln R - \sum_{\nu=1}^{n(R)} \ln \gamma_\nu,$$

т. е.

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \ln \frac{R^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)} \gamma_\nu}. \tag{30}$$

Из (29), в силу (30), получаем:

$$\ln \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right) < \ln \left[\frac{R^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)} \gamma_\nu} e^{R^2 \int_R^\infty \frac{n(t)dt}{t(t^2+R^2)}}\right], \tag{31}$$

где $n > n_0$. Согласно условию (24), для достаточно больших R имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \ln \left[\frac{R^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)} \gamma_\nu} e^{n(R) \ln \Delta}\right],$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{R^2}{\gamma_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \ln \frac{(\Delta R)^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)} \gamma_\nu}.$$

Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{R^2}{\gamma_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{(\Delta R)^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)}\gamma_\nu}. \qquad (32)$$

Возвращаясь к оценке $\prod\limits_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}$, где $\gamma_\nu'=\gamma_\nu+\varkappa$, имеем:

$$\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}=\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^2)^{\frac{1}{2}}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2\gamma_\nu\varkappa+\varkappa^2}{R^2+\gamma_\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}}<$$

$$<\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^2)\exp\left[\varkappa\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu+\frac{\varkappa}{2}}{R_2+\gamma_n^2}\right],$$

или

$$\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}<\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_k^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left[(\varkappa+\varepsilon)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right],$$

где для достаточно больших n $\varepsilon>0$ — число, сколь угодно малое.

Из последнего неравенства, в силу (32), получаем:

$$\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_\nu^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}<\prod_{k=1}^{n}\gamma_k e^{(\varkappa_1+\varepsilon)\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\frac{(\Delta R)^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)}\gamma_\nu},$$

или

$$\prod_{k=1}^{n}(R^2+\gamma_\nu^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}<C_1\prod_{k=1}^{n}\gamma_k e^{\varkappa_1\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\frac{(\Delta R)^{n(R)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(R)}\gamma_\nu},$$

где $C_1>0$ — абсолютная постоянная, $\varkappa_1>\varkappa$. Для завершения доказательства леммы остается положить $R=am$. Тогда

$$\prod_{k=1}^{n}(a^2m^2+\gamma_k^{\prime 2})^{\frac{1}{2}}<C\prod_{k=1}^{n}\gamma_k e^{\varkappa_1\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}\frac{(ma\Delta)^{n(am)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n(am)}\gamma_\nu},$$

где $\varkappa_1>\varkappa$ — произвольное число, а $C>0$ — абсолютная постоянная.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для всякой функции* $t^\varkappa\varphi(t)\in C_{\{\dot m_n\}}([0,1])$ *и*

$$A_m=\int_0^1\varphi(t)\,t^\varkappa X_m(t)\,dt,\quad m=0,1,2,\ldots, \qquad (33)$$

справедливо неравенство

$$|A_{m+1}|\leqslant\inf_{p\geqslant1}\frac{6^{p+1}p^p(p+1)}{p!}\frac{\dot m_{p+1}}{m^{p+1}}. \qquad (34)$$

Действительно, нетрудно заметить, что

$$|A_{m+1}| \leqslant E_m(\varphi, \varkappa), \tag{35}$$

где $E_m(\varphi, \varkappa)$ — наилучшее приближение функции $t^\varkappa \varphi(t)$ на отрезке $[0, 1]$ полиномами степени не выше m. Известно также, что в нашем случае

$$E_m(\varphi, \varkappa) \leqslant \inf_{p \geqslant 1} \frac{6^{p+1} p^p (p+1)}{p!} \frac{\dot{m}_{p+1}}{m^{p+1}}. \tag{36}$$

В силу бесконечной дифференцируемости $t^\varkappa \varphi(t)$ на $[0, 1]$, из (35) и (36) получаем:

$$|A_{m+1}| \leqslant \inf_{p \geqslant 1} \frac{6^{p+1} p^p (p+1)}{p!} \frac{\dot{m}_{p+1}}{m^{p+1}}.$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 3.

Представим $t^\varkappa \varphi(t)$ в $[0, 1]$ рядом Фурье по полиномам Лежандра:

$$t^\varkappa \varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m(t), \tag{37}$$

или

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{-\varkappa} X_m(t). \tag{37'}$$

После $(n+1)$-кратного обобщенного дифференцирования при последовательности $\{\gamma_\nu = \beta m_\nu m_{\nu-1}^{-1}\}$, $\gamma_0 = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ получаем:

$$\varphi_{n+1}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \, [t^{-\varkappa} X_m(t)]^{[n+1]}$$

(почленное дифференцирование законно).

Для оценки сверху $|\varphi_{n+1}(t)|$ нам остается использовать неравенства (28) и (34). Мы получим:

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 a \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e^{\varkappa_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}} t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta am)^{n(am)}}{\prod_{\nu=1}^{n(am)} \gamma_\nu} m^{\frac{3}{2}} \inf_{p \geqslant 1} \frac{6^{p+1} p^p (p+1)}{p!} \frac{\dot{m}_{p+1}}{m^{p+1}}.$$

Последнее неравенство усилится, если мы его запишем в виде

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 a \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \exp\left[\varkappa_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}\right] t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sup_{p \geqslant 1} \frac{(\Delta am)^p}{\prod_{\nu=1}^{p} \gamma_\nu} \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sup_{p \geqslant 1} \frac{(6e^{-1} m)^p}{\dot{m}_p}},$$

или, в силу определения последовательности $\{\gamma_\nu\}$, в виде

$$|\varphi_{n+1}(t)| \leqslant C_2 a \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e^{-\varkappa_1 \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}} t^{-\varkappa-\gamma_n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\dot{T}\left(\frac{\Delta a m}{\beta}\right)}{\dot{T}\left(\frac{m}{6e}\right)} m^{\frac{3}{2}}. \qquad (38)$$

Согласно условию теоремы,

$$\frac{\Delta a}{\beta} < \frac{1}{6e}.$$

Это значит, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\dot{T}\left(\frac{\Delta a m}{\beta}\right)}{\dot{T}\left(\frac{m}{6e}\right)} m^{\frac{3}{2}}$$

сходится, так как из условия (23) следует, что показатель сходимости последовательности $\{\gamma_\nu\}$ не меньше 1 [см. ([3]), стр. 15—16], а это в свою очередь, означает, что $\dot{T}(r)$ может быть рассмотрен как максимальный член целой функции порядка не меньше 1; но тогда нетрудно заметить, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\dot{T}(\alpha m)}{\dot{T}(\beta m)} m^k,$$

где $k > 0$ — произвольное число, сходится, если $0 < \alpha < \beta$.

Этим, согласно (38), доказано, что

$$|\varphi_{n+1}(t)| < C_0 a \prod_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e^{\varkappa_1 \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}} t^{-\varkappa-\gamma_n-1}, \qquad (38')$$

где $C_0 > 0$ — абсолютная постоянная, $t \in (0, u]$, $u \in (0, 1)$, $\varkappa_1 > \varkappa$.

В силу теоремы 2 и (38′) теорема 3 доказана.

В заключение заметим, что условие (24) остается в силе и тогда, когда

$$\sup_{t>r} \frac{n(t)}{t} < \frac{n(r)}{r} \ln \Delta, \qquad (24')$$

где $1 < \Delta < \infty$, и тем более тогда, когда выполняется требование теоремы (2.6) работы ([1]), т. е. когда $\frac{n(t)}{t}$ монотонно убывает, так как последнее условие равносильно условию

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}, \qquad n \geqslant n_0.$$

Институт математики и механики
Ак. наук Арм. ССР

Поступило
15. IV. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б а д а л я н Г. В., Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций, Известия Ак. наук Арм. ССР, VI, № 5—6 (1953), 1—63.

[2] Б а д а л я н Г. В., Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения, Известия Ак. наук Арм. ССР, VIII, № 5 (1955), 1—28.

[3] П о л и а Г. и С е г е Г., Задачи и теоремы из анализа, часть II, ГТТЛ, Москва, 1956.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

25 (1961), 899—924

Я. Г. СИНАЙ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СЧЕТНОКРАТНЫМ ЛЕБЕГОВСКИМ СПЕКТРОМ. I

В работе выясняются некоторые условия, обеспечивающие счетнократный лебеговский спектр у динамических систем с непрерывным временем.

Введение

Хорошо известно, что динамические системы с дискретным спектром не обладают перемешиванием. Поэтому отчетливое представление о характере движения часто позволяет понять, содержит ли спектр динамической системы дискретную компоненту. С другой стороны, существует целый ряд примеров динамических систем, у которых спектр является непрерывным и, более того, счетнократным лебеговским. Упомянем в этой связи автоморфизмы коммутативных компактных групп, рассматривавшиеся В. А. Рохлиным ([3]) и П. Халмошем ([23]), и геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны [Гельфанд и Фомин ([17])]. Отметим, что эти примеры носят алгебраический характер и вычисление спектра для них производилось алгебраическими средствами. В настоящей работе мы ставим себе целью показать, что счетнократный лебеговский спектр во многих случаях (в частности, в указанных) является, аналогично дискретному спектру, простым следствием некоторых геометрических свойств движения системы. Это позволит нам впоследствии включить в число примеров динамических систем со счетнократным лебеговским спектром системы, не имеющие алгебраического происхождения и приближающиеся ко вполне конкретным системам классической механики.

Метод, развиваемый ниже, основан на понятиях K-автоморфизма и K-потока. Так мы называем динамические системы соответственно с дискретным и непрерывным временем, введенные А. Н. Колмогоровым в работе ([1]) и названные им «квазирегулярными»; В. А. Рохлиным эти системы названы динамическими системами Колмогорова [см. ([18])]. Понятия K-автоморфизма и K-потока возникли при рассмотрении динамических систем, порождаемых стационарными случайными процессами, однако их значение, как мы покажем далее, выходит за рамки теории вероятностей.

В предлагаемой, первой, части работы собраны вместе основные свойства K-потоков. Для K-автоморфизмов это сделано в обстоятельной работе В. А. Рохлина ([2]). Заметим, что перенесение результатов работы ([2]) на случай непрерывного времени представило некоторые трудности в вопросе о спектре. Для дискретного времени известна [см. ([1])] теорема, утверждающая, что спектр K-автоморфизма счетнократный лебеговский.

Доказательство этой теоремы основано на том, что ортогональное дополнение унитарного подкольца в унитарном кольце в случае непрерывной меры бесконечномерно. Только в этом проявляется свойство исходного преобразования быть автоморфизмом унитарного кольца.

Для непрерывного времени А. Н. Колмогоровым в уже упомянутой работе ([1]) была сформулирована теорема о том, что K-потоки имеют однородный лебеговский спектр. Доказательство этой теоремы было основано на некоторых результатах Плеснера ([13]). В настоящей работе показывается, что в рассматриваемых условиях кратность лебеговского спектра всегда бесконечна (счетна). Тем самым подтверждается гипотеза А. Н. Колмогорова, выдвинутая им в работе ([1]). Этот результат получается при помощи теорем о специальных представлениях измеримых потоков. Использование такого рода техники объясняется тем, что в случае непрерывного времени бесконечная кратность существенно зависит еще от того, что группа унитарных преобразований, соответствующая потоку, является группой автоморфизмов унитарного кольца.

По поводу основных понятий теории меры и метрической теории динамических систем мы отсылаем читателя к § 1 работы ([2]). В § 1 настоящей работы мы напоминаем только некоторые факты общей теории динамических систем и однопараметрических групп унитарных операторов, относящиеся к случаю непрерывного времени и потому не затронутые в работе ([2]). Кроме того, в § 1 вводится определение K-потока и исследуются некоторые его свойства и связи с понятием регулярности случайных процессов. В § 2 доказывается общая теорема о необходимых и достаточных условиях для наличия однородного лебеговского спектра у группы унитарных операторов, действующей в гильбертовом пространстве. Заметим, что эта теорема может быть выведена из уже упоминавшихся результатов А. И. Плеснера ([13]), но мы приводим ее доказательство, независимое от этих результатов. В § 3 устанавливается одна теорема о достаточных условиях наличия в спектре специального потока счетнократной лебеговской компоненты. На основании этой теоремы и результатов § 2, в § 4 выводится теорема о спектре K-потока. В § 5 устанавливаются еще два свойства K-потоков: положительность энтропии и наличие перемешивания всех степеней. Первое их этих свойств было впервые доказано (но не опубликовано) А. Н. Колмогоровым.

Результаты настоящей работы частично опубликованы без доказательства в работе ([4]).

§ 1. Определение K-потоков. Некоторые сведения из общей теории динамических систем и однопараметрических групп унитарных операторов

1.1. Как указывалось во введении, мы будем опираться на ряд понятий общей теории меры и метрической теории динамических систем, сводное изложение которых имеется в работе В. А. Рохлина ([2]). Напомним только ряд обозначений: M — пространство Лебега, μ — полная мера, определенная на совокупности измеримых подмножеств M, $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра тождественных по mod 0 классов измеримых подмножеств M. Если ζ — произвольное измеримое разбиение пространства M, то

$\mathfrak{M}(\zeta)$ есть σ-алгебра классов измеримых множеств, составленных по mod 0 из элементов разбиения ζ. Два измеримых разбиения будут встречаться особенно часто и поэтому имеют специальные обозначения: это ε — разбиение пространства M на отдельные точки и ν — тривиальное разбиение, содержащее в качестве своего элемента пространство M. При этом $\mathfrak{M}(\varepsilon) = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(\nu) = \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — σ-алгебра классов множеств, имеющих меру нуль или единица.

Пусть в пространстве M задан измеримый поток $\{S_t\}$, т. е. такая однопараметрическая группа автоморфизмов пространства M (параметр t — время пробегает все действительные значения), что для любого измеримого множества $A \subset M$ совокупность пар (x, t), для которых $S_t x \in A$, измерима в прямом произведении $M \times (t)$, где (t) — ось времени.

Определение 1. Измеримый поток $\{S_t\}$ называется K-потоком, если существует измеримое разбиение ζ^0 пространства M со следующими тремя свойствами:

I. $S_t\zeta^0 = \zeta^t \geqslant \zeta^{t_1} \bmod 0$ для каждой пары (t, t_1), $t > t_1$.

II. $\prod\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta^t = \varepsilon \bmod 0$.

III. $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta^t = \nu \bmod 0$.

Разбиение ζ^0, обладающее этими тремя свойствами, мы будем называть K-разбиением, а соответствующую σ-алгебру $\mathfrak{M}(\zeta^0)$ — K-σ-алгеброй. Из свойств I—III K-разбиения вытекают соответствующие свойства K-σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^0)$:

I′. $S_t\mathfrak{M}(\zeta^0) = \mathfrak{M}(\zeta^t) \supseteq \mathfrak{M}(\zeta^{t_1})$ при $t > t_1$,

II′. $\bigvee\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta^t) = \mathfrak{M}$,

III′. $\bigwedge\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}(\zeta^t) = \mathfrak{N}$,

и обратно: из свойств I′—III′ σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^0)$ вытекает, что она является K-σ-алгеброй и соответствующее разбиение ζ^0 есть K-разбиение.

Пусть пространство M образовано из реализаций некоторого случайного стационарного процесса $\omega(\tau)$ с действительными значениями и группа $\{S_t\}$ действует в M как сдвиг:

$$\omega'(\tau) = S_t\omega(\tau) = \omega(t + \tau).$$

Рассмотрим σ-алгебру $\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}(\zeta^0)$, порожденную измеримыми множествами вида $\{\omega(t) \in \Gamma\}$, где Γ пробегает борелевские множества действительной прямой, а t — все отрицательные значения. Из определения σ-алгебры $\mathfrak{M}^0$ следует, что она удовлетворяет условиям I′ и II′. В случае, когда $\mathfrak{M}^0$ удовлетворяет еще и условию III′, соответствующий процесс называется регулярным [см. ([19])]. Поэтому теория K-потоков тесно связана с теорией регулярных стационарных процессов.

Приведем характерное для K-потоков свойство перемешивания. В случае обычного перемешивания для любых двух множеств $A \subset M$, $B \subset M$

$$\lim_{t \to -\infty} |\mu(A \cap S_t B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

В случае K-потока это соотношение можно значительно усилить. Пусть $\mathfrak{M}(\gamma_B^{k,h})$ есть σ-алгебра, порожденная множествами $S_{lh}B$, где k, l $(k \geqslant l)$ — целые числа, h — произвольное положительное число. Тогда при $k \to -\infty$

$$\sup_{\Gamma \in \mathfrak{M}(\gamma_B^{k,h})} |\mu(A \cap \Gamma) - \mu(A)\mu(\Gamma)| \to 0.$$

На языке теории вероятностей это означает, что множество A делается равномерно почти независимым от любого события, определяемого поведением множества B в моменты времени вида lh, $l \leqslant k$, когда k стремится к $-\infty$.

Для доказательства воспользуемся одной теоремой Пинскера ([20]), согласно которой пересечение σ-алгебр $\mathfrak{M}(\gamma_{A,B}^{k,h})$, порожденных множествами $S_{lh}A$, $S_{l_1h}B$, $l \leqslant k$, $l_1 \leqslant k$, есть тривиальная σ-алгебра $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим систему функций $\mu(A \mid C_t)$, где через C_t обозначены элементы разбиения ζ^t, соответствующего σ-алгебре $\mathfrak{M}(\gamma_{A,B}^{t,h})$. В силу одной теоремы Дуба* [см. ([16]), теорема 4, стр. 298], при $t \to -\infty$ почти всюду

$$\lim \mu(A \mid C_t) = \mu(A).$$

Поэтому для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует такое $t_0(\varepsilon, \delta)$, что при всех целых t, меньших t_0, можно найти множество $N \in \mathfrak{M}(\gamma_{A,B}^{t,h})$, для которого

$$\mu(M - N) = \mu(\overline{N}) < \delta, \quad |\mu(A \mid C_t) - \mu(A)| < \varepsilon$$

при всех $C_t \in N$. Отсюда вытекает, что для любого $\Gamma \in \mathfrak{M}(\gamma_B^{t_0,h}) \subset \mathfrak{M}(\gamma_{A,B}^{t_0,h})$

$$|\mu(A \cap \Gamma) - \mu(A)\mu(\Gamma)| = \Big| \int_{\Gamma \cap N} \mu(A \mid C_t)\, d\mu + \int_{\Gamma \cap \overline{N}} \mu(A \mid C_t)\, d\mu - \mu(A)\mu(\Gamma) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int_{\Gamma \cap N} [\mu(A \mid C_t) - \mu(A)]\, d\mu \Big| + \int_{\Gamma \cap \overline{N}} \mu(A \mid C_t)\, d\mu + \mu(A)\mu(\Gamma \cap \overline{N}) \leqslant \varepsilon + 2\delta,$$

что и требовалось доказать.

В конкретных задачах часто приходится определять, удовлетворяет ли некоторое разбиение ζ^0 условию III определения 1, если оно удовлетворяет условию I определения 1. При этом оказывается полезной.

ЛЕММА 1.1. *Пусть x — произвольная точка и C — элемент разбиения ζ^0, содержащий ее. Положим для произвольного измеримого множества $A \subset M$*

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} \mu(A \mid S_t C) & \text{для тех } x, \text{ при которых это выражение определено,} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

---

* Для удобства читателя приведем формулировку теоремы Дуба в наших обозначениях: если $\mathfrak{A}_n$ — убывающая последовательность σ-алгебр, $\mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n+1}$, A — любое измеримое множество, то почти всюду $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A \mid C_n) = \mu(A \mid C_\infty)$, где через C_n обозначены элементы разбиения, соответствующего σ-алгебре $\mathfrak{A}^n$, и через C_∞ — элементы разбиения, соответствующего пересечению σ-алгебр $\mathfrak{A}_n$.

Для того чтобы система разбиений ζ^t, *удовлетворяющая условию* I *определения* 1, *удовлетворяла условию* III *определения* 1, *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi_t(x) \to \mu(A)$ *по мере при* $t \to -\infty$.

Доказательство. Пусть при фиксированном t функция $\psi_t(x) = \mu(A \mid C_t)$ есть условная мера множества A при заданном элементе разбиения ζ^t, содержащем точку x. Она определена при почти всех C_t. Согласно теореме Дуба [см. ([16]), теорема 4.3, стр. 318], аналогичной приведенной на стр. 902, существуют функции $\widetilde{\psi}_t(x)$, совпадающие при каждом t с $\psi_t(x)$ почти всюду, для которых почти всюду

$$\lim_{t \to -\infty} \widetilde{\psi}_t(x) = \mu(A \mid C_{-\infty}),$$

где $C_{-\infty}$ — элемент измеримого разбиения $\bigcap\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta^t$, содержащий точку x. Из этой теоремы следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдутся $t_0(\varepsilon, \delta)$ и множество N из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^{t_0})$, для которых

$$\mu(N) > 1 - \varepsilon, \quad |\psi_t(x) - \mu(A \mid C_{-\infty})| < \delta. \tag{1}$$

Поскольку для почти всех C — элементов разбиения ζ^0 — множество $S_t C$ есть элемент разбиения ζ, то почти всюду

$$\varphi_t(S_t x) = \psi_t(x). \tag{2}$$

Предположим, что выполнено условие леммы. Тогда при любых $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ и при достаточно большом по модулю отрицательном t найдется множество $N_1(t) \in \mathfrak{M}(\zeta^0)$ такое, что

$$\mu(N_1(t)) > 1 - \varepsilon_1, \quad |\varphi_t(x) - \mu(A)| < \delta_1 \text{ для } x \in N_1(t).$$

Следовательно, для $x \in S_t N(t) \in \mathfrak{M}(\zeta^t)$, в силу (2),

$$|\psi_t(x) - \mu(A)| < \delta_1.$$

Сравнивая (1) и (3), находим, что для $x \in N \bigcap N_1(t)$

$$\mu(N \bigcap N_1(t)) > 1 - \varepsilon - \varepsilon_1, \quad |\mu(A \mid C_{-\infty}) - \mu(A)| < \delta_1 + \delta.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta, \delta_1$, получаем, что для любого A почти всюду

$$\mu(A \mid C_{-\infty}) = \mu(A).$$

В частности, если

$$A \in \mathfrak{M}\left(\bigcap_{-\infty}^{\infty} \zeta^t\right),$$

то последнее равенство возможно, только если $\mu(A)$ равно нулю или единице.

Обратно, если выполнено условие III определения 1, то

$$\mu(A \mid C_{-\infty}) = \mu(A)$$

почти всюду и из того же рассуждения, проведенного в обратном порядке, вытекает утверждение леммы.

Дальнейшим свойствам K-потоков посвящены последующие параграфы. Всюду, где это возможно, мы будем выделять те свойства, которые

сохраняются, если разбиение ζ^0 удовлетворяет только условию I со строгим неравенством и условию II. Впрочем, если условие II не выполнено, то можно рассматривать фактор-поток, определенный на фактор-пространстве $M \Big| \prod_{-\infty}^{\infty} \zeta^t$, в котором условие II уже выполнено автоматически.

1.2. При изучении K-потоков оказываются полезными представления измеримых потоков с помощью специальных потоков. Специальные потоки являются обобщением на случай общих пространств с мерой известного понятия «секущей поверхности» Биркгофа — Пуанкаре. Для некоторых частных преобразований с инвариантной мерой эти потоки были введены еще Дж. Нейманом (21) в 1932 г. В общем случае роль специальных потоков была исследована Амброзом (15) сначала для эргодических, а затем Амброзом и Какутани (22) для любых измеримых потоков. Полное доказательство основной теоремы о специальных потоках имеется в обзорной статье В. А. Рохлина [см. (6), § 6]. Мы приведем здесь только определение специального потока и формулировку основной теоремы.

Пусть M_1 — пространство с ненормированной мерой Лебега μ_1 (т. е. пространство с мерой, удовлетворяющее всем аксиомам пространства Лебега, за исключением нормировки меры) и F — измеримая положительная функция на пространстве M_1 со следующими двумя свойствами:

а) существует положительная постоянная τ такая, что $F(y) \geqslant \tau$ почти всюду;

б) $\int\limits_{M_1} F(y)\, d\mu_1(y) = 1$.

Обозначим через (u) вещественное переменное и рассмотрим подмножество M точек (y, u) прямого произведения $M_1 \times (u)$, для которых $0 \leqslant u < F(y)$. Легко показать, что M есть обычное пространство Лебега (мера задается как мера в подмножестве прямого произведения пространств с мерой.) Если T — произвольный автоморфизм пространства M_1, то положим

$$S_t(y, u) = (y, u + t)$$

при $-u \leqslant t < -u + F(y)$,

$$S_t(y, u) = (T^n y, u + t - F(y) - \ldots - F(T^{n-1} y))$$

при $-u + \sum\limits_{k=0}^{n-1} F(T^k y) \leqslant t < -u + \sum\limits_{k=0}^{n} F(T^k y)$,

$$S_t(y,u) = (T^{-n}, y\, u + t + F(T^{-1} y) + \ldots + F(T^{-n} y))$$

при $-u - \sum\limits_{k=0}^{n} F(T^{-k} y) \leqslant t < -u - \sum\limits_{k=0}^{n-1} F(T^{-k} y)$.

Легко проверить, что при любых t_1, t_2

$$S_{t_1+t_2} = S_{t_1} S_{t_2}$$

и преобразования $\{S_t\}$ задают измеримый поток в пространстве M. Так построенный поток $\{S_t\}$ называется специальным потоком, построенным по автоморфизму T и функции F.

ТЕОРЕМА [см. ([6]), § 6]. *Всякий измеримый апериодический поток обладает специальным представлением, т. е. изоморфен по* mod 0 *некоторому специальному потоку.*

1.3. Пусть $h(S_1)$ — энтропия автоморфизма S_1, входящего в поток $\{S_t\}$ (определение энтропии автоморфизма см. в работе ([7])). Как показал Л. М. Абрамов ([10]), для измеримого потока $\{S_t\}$ имеет место формула

$$h(S_t) = |t|\, h(S_1).$$

Поэтому условимся считать энтропией измеримого потока $\{S_t\}$ энтропию автоморфизма S_1.

На случай потоков с очевидными изменениями переносится определение В. А. Рохлина [см. ([3])] перемешивания степени r для автоморфизма.

1.4. С каждой динамической системой $\{S_t\}$ естественно связывается однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$, действующая в гильбертовом пространстве $L^2_\mu(M)$ измеримых функций на M с интегрируемым квадратом модуля. Эта связь дается формулой:

$$U_t f(x) = f(S_t x).$$

Спектр однопараметрической группы $\{U_t\}$ называется спектром динамической системы $\{S_t\}$.

Определение 2. Однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$, действующая в гильбертовом пространстве H, имеет простой лебеговский спектр, если существует изоморфное отображение V пространства H на пространство L^2 измеримых на действительной прямой функций $f(x)$ с интегрируемым квадратом модуля такое, что для любого $h \in H$

$$VU_t h(x) = Vh(x - t).$$

Определение 2′. Группа унитарных операторов $\{U_t\}$, действующая в гильбертовом пространстве H, имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$ (или бесконечной кратности), если H можно разложить в ортогональную сумму $\varkappa$ (или бесконечного числа) инвариантных подпространств H_i,

$$H = \oplus \sum_{i=1}^{\varkappa} H_i,$$

в каждом из которых группа $\{U_t\}$ имеет простой лебеговский спектр.

Из этого определения следует, что если группа унитарных операторов имеет однородный лебеговский спектр, то существует подпространство H^0 такое, что

а) $U_t H^0 = H^t \supset H^{t_1}$ при $t > t_1$,

б) $\bigvee_{-\infty}^{\infty} H^t = H$,

в) $\bigwedge_{-\infty}^{\infty} H^t = \{0\}$.

Действительно, в качестве H^0 можно взять подпространство

$$\oplus \sum_{i=1}^{\varkappa} V_i^{-1} L_0^2,$$

где L_0^2 образовано функциями из L^2, обращающимися в нуль при положительных значениях аргумента, и V_i — отображение H_i на L^2, фигурирующее в определении 2. В дальнейшем случай бесконечной кратности не будет выделяться, но мы будем предполагать, что $\varkappa$ может принять значение ∞.

ЛЕММА 1.2. *Если для элемента h гильбертова пространства H*

$$R(t) = (U_t h, h) = 0$$

при $|t| \geqslant \tau_0$, то в циклическом подпространстве, порожденном элементом h, группа $\{U_t\}$ имеет простой лебеговский спектр.

Доказательство. Напомним, что циклическое подпространство $H(h)$, порожденное элементом h, есть замыкание по норме линейного многообразия векторов вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k U^{t_k} h.$$

Спектральная мера $\sigma_h(\lambda)$ элемента h удовлетворяет соотношению

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\sigma_h(\lambda).$$

Из условия леммы вытекает, что $d\sigma_h(\lambda)$ можно представить в виде

$$d\sigma_h(\lambda) = r_h(\lambda)\, d\lambda,$$

где r_h — аналитическая функция от λ, положительная на действительной оси. Известно [см., например, ([12])], что пространство $H(h)$ изоморфно гильбертову пространству функций φ, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, r_h(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

причем если элементу $g \in H(h)$ соответствует функция φ, то элементу $U_t g$ соответствует функция $e^{i\lambda t}\varphi$.

Пусть ψ — произвольная функция с интегрируемым квадратом на прямой и $\widetilde{\psi}$ — ее преобразование Фурье. Обозначим через V^{-1} отображение, ставящее в соответствие функции ψ функцию $\frac{\widetilde{\psi}}{\sqrt{r_h}}$. Очевидно, что V^{-1} — изометрический оператор, отображающий L^2 на $H(h)$ и

$$V^{-1}\psi(x-t) = \frac{e^{i\lambda t}\,\widetilde{\psi}(\lambda)}{\sqrt{r_h(\lambda)}} = U^t V^{-1}\psi.$$

Лемма доказана.

Пусть E^τ, $-\infty < \tau < \infty$, — семейство проекционных операторов, удовлетворяющее условиям:

1) $E^\tau \leqslant E^{\tau_1}$ при $\tau < \tau_1$;

2) единственный оператор, превосходящий все операторы E^τ, есть тождественный оператор;

3) единственный проекционный оператор, который меньше всех операторов E^τ, есть оператор проектирования на тривиальное подпространство, состоящее из одного нуля.

Такое семейство проекционных операторов называется спектральным семейством.

Определение 3. Спектральное семейство проекционных операторов E^τ имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$, если H можно изоморфно отобразить на ортогональную сумму $\varkappa$ пространств L^2, в каждом из которых действие оператора E^τ сводится к проектированию на подпространство функций $f(x)$, обращающихся в нуль при $x < \tau$.

Определение 3'. Спектральное семейство проекционных операторов E^τ имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$ на борелевском множестве B действительной прямой, если H можно изоморфно отобразить на ортогональную сумму $\varkappa$ пространств $L^2(B)$, состоящих из функций с интегрируемым квадратом модуля по мере Лебега, заданных на множестве B, и действие оператора E^τ в пространстве $L^2(B)$ заключается в проектировании на подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $x \in B$, $x < \tau$.

§ 2. Об однородном лебеговском спектре у группы унитарных операторов

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы группа унитарных операторов $\{U_t\}$, действующая в гильбертовом пространстве H, имела однородный лебеговский спектр, необходимо и достаточно, чтобы существовало спектральное семейство проекционных операторов E^τ такое, что*

$$U_t E^\tau = E^{t+\tau}.$$

При этом спектр семейства E^τ — однородный лебеговский и его кратность совпадает с кратностью спектра группы $\{U_t\}$.

Необходимость условия легко следует из определения. Действительно, если $\{U_t\}$ имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$, то операторы проектирования на подпространства $H^\tau = U_\tau H^0$ (см. § 1) удовлетворяют условиям теоремы.

Достаточность условия вытекает из доказываемых ниже лемм 2.1 и 2.2. Пусть в гильбертовом пространстве H задано спектральное семейство проекционных операторов E^τ, $-\infty < \tau < \infty$.

ЛЕММА 2.1. *Для того чтобы в пространстве H существовала хотя бы одна однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$, $-\infty < t < \infty$, такая, что $U_t E^\tau = E^{t+\tau}$, необходимо и достаточно, чтобы спектр семейства операторов E^τ был однородным лебеговским.*

Докажем необходимость условия леммы. Пусть $H^\tau = E^\tau H$ и $\{U_t\}$ — однопараметрическая группа унитарных операторов, переводящая H^t в $H^{t+\tau}$. Тогда если B — борелевское множество на прямой, то оператор

U_τ переводит подпространство H^B * в подпространство $H^{B+\tau}$, где $B+\tau$ — сдвинутое множество ($B+\tau = \{t : t-\tau \in B\}$). Возьмем элемент h, имеющий максимальный спектральный тип (относительно семейства E^τ) и положим

$$\sigma(B) = (E^B h, h).$$

Рассмотрим сдвинутые меры $\sigma_\tau(B)$, $\sigma_\tau(B) = \sigma(B+\tau)$, и докажем, что они имеют тот же тип, что и мера σ. Пусть множество B таково, что $\sigma(B) > 0$. Это значит, что $E^B h \neq 0$. Применим к вектору $E^B h$ оператор U_τ. Мы получим некоторый вектор из подпространства $H^{B+\tau}$. Следовательно, подпространство $H^{B+\tau}$ нетривиально и

$$\sigma(B+\tau) = \sigma_\tau(B) \neq 0,$$

т. е. мера σ абсолютно непрерывна относительно меры σ_τ. Но мера σ_τ, являясь спектральной мерой вектора $U_{-\tau} h$, сама абсолютно непрерывна относительно меры σ. Таким образом, меры σ и σ_τ при любом τ, $-\infty<\tau<\infty$, эквивалентны. А хорошо известно, что единственный тип, эквивалентный своим сдвигам, есть лебеговский тип (это можно вывести, например, из рассуждений в работе ([24])).

Докажем теперь однородность спектра. Рассмотрим максимальное множество B положительной меры, на котором семейство E^τ имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$ **. Подпространство H^B может быть разложено на $\varkappa$ ортогональных циклических подпространств, порожденных векторами $h_1, \ldots, h_\varkappa$, каждое из которых имеет лебеговский спектр на множестве B. Применим к подпространству H^B оператор U_t. Тогда подпространство H^B перейдет в подпространство H^{B+t} и, в силу унитарности оператора U_t, ортогональные циклические подпространства, порожденные векторами $h_1 \ldots h_\varkappa$, перейдут в ортогональные циклические подпространства, порожденные векторами $U_t h_1, \ldots, U_t h_\varkappa$, прямая сумма которых дает все подпространство H^{B+t}. Следовательно, в подпространстве H^{B+t} операторы E^τ имеют однородный лебеговский спектр той же кратности $\varkappa$. В силу максимальности множества B, множество $B+t$ отличается от множества B на множество лебеговской меры нуль. Но это возможно только тогда, когда B есть вся прямая, кроме, быть может, множества лебеговской меры нуль.

Достаточность условия леммы легко вытекает из определений 2′ и 3 § 1. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Если семейство операторов E^τ имеет однородный лебеговский спектр кратности $\varkappa$, то любая однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$, переводящая H^τ в $H^{t+\tau}$, имеет однородный лебеговский спектр той же кратности.*

Доказательство. Пусть в соответствии с условием леммы пространство H представлено как совокупность векторов h, задаваемых

---

* Подпространства H^B (соответствующие им проекционные операторы E^B) получаются хорошо известным способом с помощью счетного числа операций произведения и сложения из подпространств H^τ (операторов E^τ).

** Множество B называется максимальным, если для любого другого множества B', на котором семейство E^τ имеет однородный лебеговский спектр той же кратности, существует множество B'', совпадающее с B' mod 0 и $B'' \subset B$.

с помощью $\varkappa$ функций $f_1, \ldots, f_\varkappa$ с интегрируемым квадратом на прямой по мере Лебега и таких, что

$$\sum_{i=1}^{\varkappa} \int_{-\infty}^{\infty} |f_i(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Обозначим через $\{V_t\}$, $-\infty < t < \infty$, однопараметрическую группу унитарных операторов, действующую следующим образом:

$$V_t h = \{V_t^1 f_1(x), \ldots, V_t^\varkappa f_\varkappa(x)\} = \{f_1(x+t), \ldots, f_\varkappa(x+t)\},$$

и рассмотрим операторы

$$\widetilde{U}_t = V_t U_t, \quad -\infty < t < \infty.$$

Очевидно, что операторы $\widetilde{U}_t$ унитарны и подпространство H^τ, $-\infty < \tau < \infty$, инвариантно относительно этих операторов. Разложим гильбертово пространство H в непрерывную прямую сумму по коммутативному кольцу операторов, порожденному семейством E^τ [см. ([14])]. Как показано в ([14]), в силу перестановочности каждого оператора $\widetilde{U}_t$ с операторами E^τ, существуют такие ограниченные измеримые функции $a_{ij}^t(x)$, что для любого вектора $h = \{f_1, \ldots, f_\varkappa\}$

$$\widetilde{U}_\tau h = \{g_1^t, \ldots, g_\varkappa^t\},$$

где

$$g_i^t(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} a_{ik}^t(x) \, f_k(x)$$

(сходимость в среднем квадратичном по мере Лебега).

Докажем, что при каждом t и для почти всех x матрица $\|a_{ij}^t(x)\|$ унитарна. Действительно, так как для любого борелевского множества B, в силу унитарности оператора $\widetilde{U}_t$,

$$\mu(B)\, \delta_{k_1 k_2} = (h_B^{k_1}, h_B^{k_2}) = (\widetilde{U}_\tau h_B^{k_1}, \widetilde{U}_\tau h_B^{k_2}) =$$

$$= \sum_i \int_B a_{ik_1}^\tau(x)\, \overline{a}_{ik_2}^\tau(x)\, dx = \int_B \sum_i a_{ik_1}^\tau(x)\, \overline{a}_{ik_2}^\tau(x)\, dx,$$

где через h_B^k обозначены векторы вида

$$h_B^k = \{\underbrace{0 \ldots 0}_{k-1}, \ \chi_B(x), 0, \ldots, 0\}$$

($\chi_B(x)$ — характеристическая функция множества B) и ряд сходится в среднем квадратичном, то при почти всех x

$$\sum_i a_{ik_1}^\tau(x)\, \overline{a}_{ik_2}^\tau(x) = \delta_{k_1 k_2}.$$

Найдем теперь выражение для операторов U_t. В силу формулы

$$U_t = V_{-t} \widetilde{U}_t,$$

имеем:

$$U_\tau h_B^k = \{g_{1k}^\tau(x), \ldots, g_{\varkappa k}^\tau(x)\},$$

где

$$g_{ik}^{\tau}(x) = \begin{cases} a_{ik}^{\tau}(x-\tau), & x-\tau \in B, \\ 0 & , \quad x-\tau \bar{\in} B. \end{cases}$$

Отсюда для любого вектора $h = \{f_1(x), \ldots, f_\varkappa(x)\}$ получаем:

$$U_\tau h = \{g_1(x), \ldots, g_\varkappa(x)\},$$

где

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{\varkappa} a_{ik}^k (x-\tau) f_k(x-\tau), \quad i = 1, \ldots, \varkappa. \qquad (*)$$

Из равенства $U_t U_s = U_{t+s}$ вытекает следующая формула, используемая в дальнейшем: для любых τ_1 и τ_2 и для почти всех x (множество меры нуль, которое при этом выпадает, может зависеть от τ_1 и τ_2)

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} a_{ij}^{\tau_1}(x-\tau_1)\, \bar{a}_{jk}^{\tau_2}(x-\tau_2-\tau_1) = a_{ik}^{\tau_1+\tau_2}(x-\tau_1-\tau_2). \qquad (**)$$

Выше было показано, что при каждом фиксированном τ функции $a_{ij}^{\tau}(x)$ измеримы по x. Изучим теперь зависимость этих функций от τ. В силу непрерывности группы $\{U_t\}$, для любых двух векторов h_1 и h_2 выражение $(h_1, U_t h_2)$ непрерывно зависит от t. Поэтому для любой финитной интегрируемой функции $\varphi(t)$ имеет смысл интеграл

$$\int \varphi(t)\,(h_1, U_t h_2)\,dt.$$

Положим $h_1 = h_B^{k_1}$, $h_2 = h_B^{k_2}$. Тогда этот интеграл превращается в следующий:

$$\int \varphi(t)\,dt \int\limits_{B\cap(B-t)} a_{k_1k_2}^t(x-t)\,dx = \int \varphi(t)\,dt \int\limits_B a_{k_1k_2}^t(x-t)\,\chi_{B-t}(x)\,dx,$$

где через $\chi_{B-t}(x)$ обозначена характеристическая функция множества $B-t$. Применяя теорему Фубини, получим:

$$\int \varphi(t)\,(h_1, U_t h_2)\,dt = \int dx \int \varphi(t)\,dt a_{k_1k_2}^t(x-t)\,\chi_{B-t}(x)\,dt.$$

Следовательно, для почти всех x функция $a_{k_1k_2}^t(x-t)$ измерима по t.

Рассмотрим совокупность операторов Γ_ρ, зависящих от действительного параметра ρ и определяемых следующим образом: если B — борелевское множество на прямой, то при $1 \leqslant k \leqslant \varkappa$

$$\Gamma_\rho h_B^k = \{g_{1k}^B(\lambda), \ldots, g_{\nu k}^B(\lambda)\},$$

где

$$g_{ik}^B(x) = \begin{cases} a_{ik}^{x-\rho}(\rho), & x \in B, \\ 0 & , \quad x \bar{\in} B. \end{cases}$$

При почти всех ρ функции $a_{ik}^{x-\rho}(\rho)$ измеримы по x, и на совокупности векторов h_B^k операторы Γ_ρ линейны. Следовательно, их можно продолжить с сохранением свойства линейности на линейную оболочку векторов h_B^k.

Докажем, что при почти всех ρ (относительно меры Лебега) существует всюду плотное линейное многообразие, на котором операторы Γ_ρ являются изометрическими. Для этого возьмем финитную интегрируемую функцию $\varphi(t)$ и составим для произвольного борелевского множества B конечной меры интеграл

$$\int \varphi(\rho)\, d\rho \int_B \sum_{i=1}^{\varkappa} a_{ik_1}^{x-\rho}(\rho)\, \overline{a}_{ik_2}^{-x-\rho}(\rho)\, dx.$$

По теореме Фубини, он равен двойному интегралу

$$\iint_{B\times(\rho)} \varphi(\rho) \sum_i a_{ik_1}^{x-\rho}(\rho)\, \overline{a}_{ik_2}^{-x-\rho}(\rho)\, d\rho\, dx,$$

который после замены переменных $\rho - x = \rho_1$, $x = x$ принимает вид:

$$\iint \varphi(\rho_1 - x) \sum_i a_{ik_1}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)\, \overline{a}_{ik_2}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)\, dx\, d\rho_1 =$$

$$= \int d\rho_1 \int \varphi(\rho_1 - x) \sum_i a_{ik_1}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)\, \overline{a}_{ik_2}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)\, \chi_B(x)\, dx.$$

Но при каждом ρ_1 и при почти всех x выражение

$$\sum_i a_{ik_1}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)\, \overline{a}_{ik_2}^{-\rho_1}(\rho_1 - x)$$

равно $\delta_{k_1k_2}$. Следовательно, применив еще раз теорему Фубини, мы получим:

$$\int \varphi(\rho)\, d\rho \int_B \sum_{i=1}^{\varkappa} a_{ik_1}^{x-\rho}(\rho)\, \overline{a}_{ik_2}^{-x-\rho}(\rho)\, dx = \int d\rho_1 \int \varphi(\rho_1 - x)\, \delta_{k_1k_2} \chi_B(x)\, dx =$$

$$= \delta_{k_1k_2} \int \chi_B(x)\, dx \int \varphi(\rho_1 - x)\, d\rho_1 = \delta_{k_1k_2} \mu(B) \int \varphi(\rho)\, d\rho.$$

Из последнего равенства следует, что для каждого множества B и любых значений k_1 и k_2 существует такое множество значений ρ лебеговской меры нуль, вне которого

$$(\Gamma^\rho h_B^{k_1}, \Gamma^\rho h_B^{k_2}) = (h_B^{k_1}, h_B^{k_2}) = \mu(B)\, \delta_{k_1k_2}.$$

Рассмотрим совокупность интервалов Δ^r с рациональными концами. Поскольку число этих интервалов счетно, можно найти такое множество значений ρ лебеговской меры нуль, что для всех значений ρ, лежащих вне этого множества, и для каждого интервала Δ^r

$$(h_{\Delta^r}^{k_1}, h_{\Delta^r}^{k_2}) = (\Gamma^\rho h_{\Delta^r}^{k_1}, \Gamma^\rho h_{\Delta^r}^{k_2}).$$

Зафиксировав одно из таких значений $\rho = \rho_0$, мы получим преобразование, сохряняющее норму на совокупности векторов $h_{\Delta_r}^k$. Следовательно, оно может быть продолжено на все гильбертово пространство H и останется при этом сохраняющим норму.

Аналогично можно показать, что параметр ρ_0 возможно, кроме того, выбрать таким образом, чтобы оператор Γ^{ρ_0} отображал все

пространство H на себя. Тогда преобразование Γ^{ρ_0} будет изоморфным отображением гильбертова пространства H на себя.

Обозначим через H_i образ подпространства, образованного векторами h вида

$$h = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, f, 0 \ldots 0\}$$

при автоморфизме Γ^{ρ_0}. Найдем действие операторов U_t в подпространствах H_i. Пусть Δ^r — произвольный интервал с рациональными концами. Тогда, на основании формул (*) и (**),

$$U_t \Gamma^{\rho_0} h^i_{\Delta^r} = \{g_1(x), \ldots, g_\varkappa(x)\},$$

где

$$g_k(x) = \begin{cases} \sum_{l=1}^{\varkappa} a^t_{kl}(x-t)\,\overline{a_{l_i}}^{-x-\rho_0-t}(\rho_0) = a^{x-\rho_0}_{ki}(\rho_0) = (\Gamma^{\rho_0} h^i_{\Delta+t})_k, & x-t \in \Delta^r, \\ 0, & x-t \overline{\in} \Delta^r. \end{cases}$$

Последняя формула показывает, что каждое подпространство H_i инвариантно относительно группы U_t и в каждом подпространстве H_i группа $\{U_t\}$ имеет простой лебеговский спектр. Так как общее число подпространств H_i равно $\varkappa$, то лемма доказана.

§ 3. Условие наличия счетнократной лебеговской компоненты в спектре специального потока

Рассмотрим в пространстве Лебега M измеримый апериодический поток $\{S_t\}$. Как указывалось выше, он обладает специальным представлением, т. е. изоморфен некоторому специальному потоку, построенному по автоморфизму T пространства M_1 с мерой μ_1 и функции F. Напомним, что существует такая положительная постоянная τ, что $F(y) \geqslant \tau$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для автоморфизма T, участвующего в построении специального потока, существует измеримое разбиение $\zeta^0_{M_1}$ пространства M_1 такое, что*

$$\zeta^1_{M_1} = T\zeta^0_{M_1} > \zeta^0_{M_1} \mod 0, \qquad (***)$$

и функция F измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^0_{M_1})$. Тогда в гильбертовом пространстве $L^2_\mu(M)$ существует инвариантное подпространство, в котором группа $\{U_t\}$ имеет счетнократный лебеговский спектр.

Доказательство. По разбиению $\zeta^0_{M_1}$ пространства M_1 построим разбиение ζ^0_M пространства M следующим образом: если C — элемент разбиения $\zeta^0_{M_1}$, то при любом t, $0 < t < F(C)$ (в силу измеримости функции F, выражение $F(C)$ имеет смысл) $S_t C$ есть элемент разбиения ζ^0_M. Мы не останавливаемся на доказательстве того, что получившееся таким образом разбиение пространства M измеримо.

ЛЕММА 3.1. *При любом $t > 0$*

$$S_t \zeta^0_M = \zeta^t_M > \zeta^0_M.$$

Доказательство. Очевидно, что лемму достаточно доказать при $0 < t < \tau$. Ввиду измеримости функции F, разбиение пространства

M на слои $C_v = \{(y, u) : (y, u) \in M, u = v\}$ является измеримым. Рассмотрим разбиение пространства M, совпадающее на слоях C_v, $t \leqslant v$, с разбиением ζ_M^0, а на слоях C_v, $0 \leqslant v < t$, с разбиением $S_v \zeta_{M_1}^1$ (поскольку при $v < t$ $S_v M_1 = C_v$). Легко видеть, что такое разбиение пространства M совпадает по mod 0 с разбиением ζ_M^t. В силу соотношения

$$\zeta_{M_1}^0 < \zeta_{M_1}^1$$

выполняется соотношение

$$\zeta_M^0 < \zeta_M^t,$$

поскольку на слоях C_v, $v < t$, разбиение ζ_M^t более мелкое, чем разбиение ζ_M^0. Лемма доказана.

Обозначим через $\widetilde{A}$ множество элементов разбиения $\zeta_{M_1}^0$, для которых условное распределение σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_{M_1}^1)$ невырожденно, и через A^t — множество тех элементов разбиения ζ_M^0, для которых условное распределение σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_{M_1}^t)$ невырожденно. В силу условия теоремы 2 и леммы 3.1, $\mu_1(\widetilde{A}) > 0$ и $\mu(A^t) > 0$ при любом $t > 0$.

ЛЕММА 3.2. *Существует по крайней мере одна функция* $\chi(x) = \chi(y, u)$, *обладающая при некотором* $t_0 > 0$, $t_0 < \frac{\tau}{2}$, *следующими свойствами*:

а) *функция* $\chi(x)$ *измерима относительно* σ-*алгебры* $\mathfrak{M}(\zeta_M^{t_0})$;

б) $\chi(x) = 0$ *для тех* $x = (y, u)$, *при которых* $u \geqslant t_0$;

в) $\chi(x) = \chi(y, u) = \chi(y, u_1)$ *при* $u < t_0$, $u_1 < t_0$;

г) $\int \chi(x)\, d\mu(x \mid C) = 0$ *для почти всех элементов* C *разбиения* ζ_M^0;

д) $\int |\chi(x)|^2\, d\mu(x \mid C) = 1$ *для элементов* C *разбиения* ζ_M^0, *принадлежащих* A^{t_0}.

Доказательство. В силу условия (***) теоремы 2 существует [см. (2)] функция $\widetilde{\chi}(y)$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_{M_1}^1)$ и такая, что

1) $\int \widetilde{\chi}(y)\, d\mu_1(y \mid C') = 0$ для почти всех C' — элементов разбиения $\zeta_{M_1}^0$.

2) $\int |\widetilde{\chi}(y)|^2\, d\mu_1(y \mid C') = 1$ для $C' \in \widetilde{A}$.

Положим

$$\chi(x) = \chi(y, u) = \begin{cases} \widetilde{\chi}(y), & u < t_0, \\ 0, & u \geqslant t_0. \end{cases}$$

Из леммы 3.1 и из свойств функции $\chi(y)$ следует, что функция $\chi(x)$ обладает свойствами а), б), в), требуемыми в лемме. Свойства г) и д) выполнены в силу того, что условная мера любого измеримого множества Γ вида $\{(y, u) : y \in \widetilde{\Gamma}, u < v_1\}$ при фиксированном слое C_v совпадает с мерой множества $\widetilde{\Gamma}$, лежащего в пространстве M_1^* (M_1^* — пространство Лебега, получающееся нормировкой меры μ_1). Лемма доказана.

Окончим теперь доказательство теоремы. Пусть $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$ — счетная ортонормированная последовательность функций, заданных на пространстве M_1, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_{M_1}^0)$ и обращающихся в нуль на дополнении к множеству $\widetilde{A}$. Очевидно, что функции

$$\widetilde{\varphi}_i(x) = \widetilde{\varphi}_i(y, u) = \varphi_i(y)$$

измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_M^0)$. Положим

$$\psi_i(x) = \widetilde{\varphi}_i(x)\,\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — функция, существование которой утверждается в лемме 3.2, и докажем, что циклические подпространства, порожденные различными функциями ψ_i, попарно ортогональны, т. е.

$$(\psi_{i_1}, U_t\psi_{i_2}) = \int\limits_M \psi_{i_1}(x)\,\overline{\psi}_{i_2}(S_t x)\,d\mu = 0$$

при всех t, если имеет место неравенство $i_1 \neq i_2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $-t_0 \leqslant t < 0$. В силу свойств функции $\chi(x)$,

$$(\psi_{i_1}, U_t\psi_{i_2}) = \int\limits_{x:-t< u<t_0} \widetilde{\varphi}_{i_1}(x)\,\chi(x)\,\overline{\widetilde{\varphi}}_{i_2}(S_t x)\,\overline{\chi}(S_t x)\,d\mu +$$

$$+ \int\limits_{x:u\leqslant -t} \widetilde{\varphi}_{i_1}(x)\,\chi(x)\,\overline{\widetilde{\varphi}}_{i_2}(T^{-1}y, F(T^{-1}, y) + u + t)\,\overline{\chi}(T^{-1}y, F(T^{-1}y)+u+t)d\mu.$$

На основании свойства б) функции $\chi(x)$ и условия $t_0 < \frac{\tau}{2}$, последний интеграл равен нулю. В силу свойств в) и д), первый интеграл может быть переписан следующим образом:

$$\int\limits_{x:-t<u\leqslant t_0} \widetilde{\varphi}_{i_1}(x)\,\chi(x)\overline{\widetilde{\varphi}}_{i_2}(S_t x)\,\overline{\chi}(S_t x)\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{x:-t<u\leqslant t_0} \widetilde{\varphi}_{i_1}(y, u)\,\chi(y, u)\,\overline{\widetilde{\varphi}}_{i_2}(y, u + t)\,\overline{\chi}(y, u + t)\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{\{x:-t<u\leqslant t_0\}/\zeta_M^0} \widetilde{\varphi}_{i_1}(C)\,\overline{\widetilde{\varphi}}_{i_2}(C)\,d\mu(C)\int\limits_C \chi(x)\,\overline{\chi}(x)\,d\mu(x\,|\,C) =$$

$$= \int\limits_{\{x:t<u\leqslant t_0\}\cap A^{t_0}} \widetilde{\varphi}_{i_1}(y, u)\,\overline{\widetilde{\varphi}}(y, u)\,d\mu = (t_0 + t)\int\limits_{M_1} \varphi_{i_1}(y)\,\overline{\varphi}_{i_2}(y)\,d\mu_1(y),$$

где через C обозначены элементы разбиения ζ_M^0. Равенство нулю последнего интеграла следует из определения функций φ_i.

Рассмотрим теперь случай, когда $t < -t_0$ и докажем, что при любых i_1, i_2

$$(\psi_{i_1}, U_t\psi_{i_2}) = \int\limits_M \psi_2(x)\,\overline{\psi}_{i_1}(S_{-t}x)\,d\mu = \int\limits_{x:u<t_0} \psi_{i_2}(x)\,\overline{\psi}_{i_1}(S_{-t}x)\,d\mu = 0.$$

Если x таково, что $u < t_0$, то, в силу свойства а) функции $\chi(x)$, функции $\psi_i(x)$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_M^{t_0})$ и, следовательно, при $-t > t_0$ функции $U_{-t}\,\psi_i(x) = \psi_i(S_{-t}x)$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta_M^0)$. Поэтому при $t < -t_0$

$$\int\limits_{x:u<t_0} \psi_{i_2}(x)\,\overline{\psi}_{i_1}(S_{-t}x)\,d\mu = \int\limits_{\substack{M|\zeta_M^0\\ u<t_0}} \widetilde{\varphi}_{i_1}(x)\overline{\psi}_{i_2}(S_{-t}x)\,d\mu(C)\int\limits_C \chi(x)\,d\mu(x|C),$$

где через C обозначены элементы разбиения ζ_M^0. В силу свойства г) функции $\chi(x)$, последний интеграл равен нулю. Случай положительных t сводится к предыдущему в силу симметрии.

Заметим, что последнее рассуждение показывает, что для функций $\psi_i(x)$ при $t > t_0$

$$(U_{-t}\psi_i(x), \psi_i(x)) = 0.$$

На основании леммы 1.2, каждая функция $\psi_i(x)$ порождает циклическое подпространство с лебеговским спектром. Теорема доказана.

Замечание. Положим $\underline{\zeta} = \bigwedge_{-\infty}^{\infty} \zeta_M^t$ и докажем, что построенные нами функции $\psi_i(x)$ таковы, что для любой функции $g(x)$ с интегрируемым квадратом модуля и измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$

$$\int \psi_i(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x) = 0.$$

Действительно, если через C обозначить элементы разбиения ζ_M^0, то будет справедливо равенство

$$\int_M \psi_i(x)\overline{g}(x)\,d\mu(x) = \int_{M|\zeta_M^0} \overline{g}(C)\,d\mu(C)\int \psi_i(x)\,d\mu(x\,|\,C).$$

Но в силу свойства г) функции $\chi(x)$

$$\int \psi_i(x)\,d\mu(x\,|\,C) = \varphi_i(y)\int \chi(y, u)\,d\mu(x\,|\,C) = 0,$$

поскольку $\varphi_i(y)$ постоянны по mod 0 на элементах разбиения ζ_M^0.

§ 4. Спектр K-потоков

Пусть в пространстве Лебега M задан измеримый поток $\{S_t\}$, для которого существует σ-подалгебра $\mathfrak{M}(\zeta^0)$ такая, что

I. $\zeta^t = S_t\zeta^0 > \zeta^{t_1}$ mod 0 при $t < t_1$,

II. $\prod_{-\infty}^{\infty} \zeta^t = \varepsilon$ mod 0.

Обозначим через H^τ подпространство пространства H, образованное из функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^\tau)$. Положим

$$\underline{H} = \bigwedge_{-\infty}^{\infty} H^\tau, \quad H_\tau = H^\tau \ominus \underline{H}.$$

Поскольку

$$U_t H^\tau = H^{t+\tau}, \quad U_t\underline{H} = \underline{H},$$

то

$$U_t H_\tau = H_{t+\tau}.$$

На основании результатов § 2, группа $\{U_t\}$ имеет в подпространстве $H \ominus \underline{H}$ однородный лебеговский спектр. Следующая теорема устанавливает его кратность.

ТЕОРЕМА 3. *Группа унитарных операторов $\{U_t\}$ имеет в подпространстве $H \ominus \underline{H}$ счетнократный лебеговский спектр.*

Доказательство. Для простоты предположим, что поток $\{S_t\}$ эргодичен. В силу § 2, нам достаточно установить наличие счетнократной

лебеговской компоненты. Для этого мы воспользуемся результатом § 3 и докажем, что существует фактор-поток $\{S'_t\}$ потока $\{S_t\}$, обладающий специальным представлением, удовлетворяющим условиям теоремы 2.

Пусть $\mathfrak{M}(\alpha)$ — конечная σ-алгебра, соответствующая конечному разбиению α. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{M}(\alpha_t)$ — σ-алгебра, порожденная множествами $S_t A_i$, $i = 1, \ldots, k$, $A_i \in \mathfrak{M}(\alpha)$,

$$\alpha^t = \prod_{\tau \leqslant t} \alpha_\tau, \quad \alpha^\infty = \prod_{-\infty}^{\infty} \alpha_\tau, \quad \alpha^{-\infty} = \bigcap_{-\infty}^{0} \alpha^\tau,$$

$M \mid \alpha^\infty$ — фактор-пространство пространства M по измеримому разбиению α^∞. Очевидно, что разбиение α^∞ инвариантно относительно потока $\{S_t\}$ и в фактор-пространстве $M \mid \alpha^\infty$ исходный поток индуцирует фактор-поток $\{S'_t\}$.

ЛЕММА 4.1. *Существует конечная σ-алгебра $\mathfrak{M}(\alpha) \subset \mathfrak{M}(\zeta^0)$ такая, что $\alpha^t > \alpha^{t_1}$ при $t > t_1$.*

Доказательство. Предположим, что для любого конечного разбиения $\alpha < \zeta^0$ выполнено соотношение $\alpha^t = \alpha^{t_1}$ при любых t и t_1.

Возьмем возрастающую последовательность конечных разбиений $\alpha < \beta < \gamma < \ldots < \zeta^0$ такую, что

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \ldots = \zeta^0.$$

Из сделанных предположений следует, что

$$S_t \alpha^0 = \alpha^0, \quad S_t \beta^0 = \beta^0, \ldots .$$

Значит,

$$S_t \zeta^0 = \zeta^t = S_t (\alpha^0 \cdot \beta^0 \cdot \gamma^0 \cdots) = \alpha^0 \cdot \beta^0 \cdot \gamma^0 \cdot \cdots = \zeta^0,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Пусть α — разбиение, выбранное в соответствии с леммой 4.1. Для фактор-потока $\{S'_t\}$, действующего в фактор-пространстве $M \mid \alpha^\infty$, существует специальное представление, удовлетворяющее условиям теоремы 2.*

Доказательство. Специальное представление измеримого потока строится по регулярному разбиению пространства. Напомним, что измеримое разбиение ζ пространства M называется регулярным относительно потока $\{S'_t\}$ [см. ([6]), стр. 119], если его элементами служат отрезки траекторий потока $\{S_t\}$, замкнутые слева и открытые справа, причем функция $f(x)$, равная временному расстоянию точки x от левого конца содержащего ее элемента разбиения ζ, измерима. Если ζ — регулярное разбиение пространства M относительно потока $\{S'_t\}$, то специальное представление потока $\{S_t\}$ строится следующим образом. Пусть $F(x)$ — временная длина содержащего x элемента разбиения ζ. Функция F измерима на фактор-пространстве $M \mid \zeta$. Формула $d\mu_1 = \frac{d\mu}{F}$ превращает $M \mid \zeta$ в пространство Y с, вообще говоря, ненормированной мерой.

Положим

$$TC_{x_0} = C_{S'_{F(x_0)} x_0},$$

где C_x — элемент разбиения ζ, имеющий точку x своим левым концом. Преобразование T есть автоморфизм пространства Y, и специальный поток,

построенный по автоморфизму T и функции F, изоморфен исходному потоку $\{S'_t\}$.

Мы будем рассматривать самые естественные специальные представления потока $\{S'_t\}$ и установим, что они именно такие, какие нам требуются.

Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию множества $A_1 \in \mathfrak{M}(\alpha)$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \chi(S'_t x)\,dt$$

при $\tau > 0$. В силу измеримости потока $\{S'_t\}$, для почти каждого x функция $\chi(S'_t x)$ измерима по t. Кроме того, при каждом t функция $\chi(S'_t x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\alpha_{-t})$, а следовательно, и относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\alpha^{-t})$. Так как

$$\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \chi(S'_t x)\,dt - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\chi(S'_{\frac{k-1}{n}\tau}x)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\|\frac{n}{\tau}\int_{\frac{k-1}{n}\tau}^{\frac{k}{n}\tau}\chi(S'_t x)\,dt - \chi(S'_{\frac{k-1}{n}\tau}x)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{n}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\chi(S'_t x)\,dt - \chi(x)\right\|$$

и

$$\underset{h\to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,\frac{1}{h}\int_0^h \chi(S'_t x)\,dt = \chi(x),$$

то функция $\Phi(x)$ является пределом в среднем квадратичном функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\alpha^0)$ и поэтому сама измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\alpha^0)$.

Приведем следующие факты, доказанные в работах ([6]), ([15]), на которые мы будем опираться в дальнейшем.

1. Рассмотрим при достаточно малом $r_0 > 0$ множество

$$M_1 = M \cap \left\{\Phi(S'_{\tau_0}x) = \frac{1}{2};\quad \Phi(S'_t x) > \frac{1}{2} \text{ при } 0 < t \leqslant \tau_0\right\}.$$

За исключением некоторого инвариантного множества меры нуль, для остальных x найдутся сколь угодно большие по модулю положительные и отрицательные t, при которых $S'_t x \in M_1$.

2. Функция $f(x)$, равная наименьшему $t > 0$, при котором $S'_{-t}x \in M_1$, измерима.

По функции f и множеству M_1 построим регулярное разбиение ζ пространства M. Элемент C этого разбиения определяется точкой $x_0 \in M_1$ и состоит из тех точек x, для которых

$$S'_{-f(x)}x = x_0.$$

Пусть I_s — множество тех $x \in M$, для которых $f(x) < s$. Докажем,

что $I_s \in \mathfrak{M}(\alpha^s)$. Но это следует из соотношений:

$$M - I_s = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s} \{x : S'_{-t}x \in M_1\} =$$

$$= \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s} \left\{x : \left[\Phi\ (S'_{-t}x) = \frac{1}{2}\right] \cap \left[\Phi\ (S'_{\rho-t}\ x) > \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \tau\right]\right\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s} \left\{\left[\left|\Phi\ (S'_{-t}x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n}\right] \cap \left[\Phi\ (S'_{\rho-t}\ x) > \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \tau\right]\right\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s}{}' \left\{\left[\left|\Phi\ (S'_{-t}x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n}\right] \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\Phi\ (S'_{\rho-t}\ x) > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{k} \leqslant \rho \leqslant \tau\right]\right\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s}{}' \left\{\left[\left|\Phi\ (S'_{-t}x) - \frac{1}{2}\right| < \right.\right.$$

$$\left.\left. < \frac{1}{n}\right] \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[\Phi\ (S'_{\rho-t}\ x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, \quad \frac{1}{k} \leqslant \rho \leqslant \tau\right]\right\} =$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant s}{}' \left\{\left[\left|\Phi\ (S'_{-t}x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n}\right] \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{\frac{1}{k} \leqslant \rho \leqslant \tau}{}' \left[\Phi\ (S'_{\rho-t}\ x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right]\right\}$$

(символы $\bigcup'$ и $\bigcap'$ обозначают, что индекс принимает только рациональные значения в интервале своего изменения), поскольку каждое из полученных множеств, в силу свойств функции $\Phi(x)$, принадлежит σ-алгебре $\mathfrak{M}(\alpha^s)$.

Пусть η^t — измеримое разбиение пространства $M \mid \alpha^\infty$, совпадающее на множестве I_t с разбиением α^t и вырожденное на дополнении к I_t (т. е. множество $M - I_t$ есть элемент разбиения η^t). Рассмотрим разбиение

$$\beta^0 = \prod_{t > 0} \eta^t.$$

Функция f измерима относительно $\mathfrak{M}(\beta^0)$, так как, по доказанному, «урезанная функция» f_t, совпадающая с f при тех x, при которых $f(x) > t$, и равная нулю для $x \overline{\in} I_t$, измерима относительно $\mathfrak{M}(\eta^t)$.

Далее, функция $F(x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\beta^0)$, что следует из соотношения:

$$\{x : F(x) > \lambda\} = \bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant \lambda} S^{-\tau} \{x : f(x) > \lambda\}.$$

Обозначим через $\widetilde{\beta}^0$ пересечение разбиений β^0 и ζ (т. е. σ-алгебра $\mathfrak{M}(\widetilde{\beta}^0)$ состоит из множеств, измеримых относительно σ-алгебр $\mathfrak{M}(\beta^0)$ и $\mathfrak{M}(\zeta)$ одновременно). Той же буквой $\mathfrak{M}(\widetilde{\beta}^0)$ обозначим σ-алгебру пространства $\widetilde{Y}$, получающегося из фактор-пространства $M \mid \zeta$ указанным выше изменением меры μ с помощью функции F. В силу уже доказанного, функция F измерима относительно $\widetilde{\beta}^0$. Для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\widetilde{\beta}^0 < T\widetilde{\beta}^0 = \widetilde{\beta}^1.$$

Неравенство $\widetilde{\beta}^0 \leqslant \widetilde{\beta}^1$ очевидно. Предположим, что $\widetilde{\beta}^0 = \widetilde{\beta}^1$. Из этого предположения мы выведем, что при любом положительном t

$$\alpha^0 = \alpha^t.$$

Рассмотрим разбиение β^0. Легко видеть, что $\alpha^0 \leqslant \beta^0$. Следовательно, и $\alpha^t \leqslant \beta^t$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое t_ε,

что если из разбиения β^0 выбросить некоторое множество элементов разбиения меры, не превосходящей ε, то на оставшемся множестве все элементы разбиения β^0 будут элементами разбиения α^{t_ε}. Но в силу соотношения

$$\widetilde{\beta}^0 \doteq \widetilde{\beta}^1$$

справедливо соотношение

$$\beta^0 = \beta^t.$$

Действительно, если $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots,$ — базис σ-алгебры $\mathfrak{M}(\widetilde{\beta}^0)$, то множества вида $\{x : x \in C_{x_0} \in \Gamma_i,\ r_1 < f(x) < r_2\}$, r_1, r_2 — рациональные числа, образуют базис σ-алгебры $\mathfrak{M}(\beta^0)$. Под действием S_t эти множества преобразуются так: если $r_1 > t$, то

$$S_t\{x : x \in C_{x_0} \in \Gamma_i,\ r_1 < f(x) < r_2\} = \{x : x \in C_{x_0} \in \Gamma_i,\ r_1 - t < f(x) < r_2 - t\},$$

т. е. мы получаем множество, принадлежащее σ-алгебре $\mathfrak{M}(\beta^0)$; если же $r_1 \leqslant t < r_2$, то

$$S_t\{x : x \in C_{x_0} \in \Gamma_i,\ r_1 < f(x) < r_2\} =$$
$$= \{x : x \in C_{x_0} \in \Gamma_i,\ 0 < f(x) < r_2 - t\} \cup$$
$$\cup \{x : x \in TC_{x_0} \in T\Gamma_i,\ 0 < F(x) - f(x) < t - r_1\}.$$

Легко видеть, что из соотношения $\widetilde{\beta}^0 = \widetilde{\beta}^1$ следует, что оба последних множества принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{M}(\beta^0)$.

Случай $t \geqslant r_2$ исследуется аналогично.

Итак, при всех t $\beta^0 = \beta^t$. Отсюда следует, что при всех t

$$\alpha^t \leqslant \beta^0,$$

т. е. $\mathfrak{M}(\beta^0)$ совпадает со всей σ-алгеброй измеримых множеств пространства $M \mid \alpha^\infty$. Но на основании сделанного выше замечания, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $t_\varepsilon > 0$, что любое множество из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\beta^{-t_\varepsilon}) = \mathfrak{M}(\beta^0)$ отличается от некоторого множества из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\alpha^0)$ на множество меры, не превосходящей ε. Устремляя ε к нулю, получим, что $\mathfrak{M}(\alpha^0)$ совпадает с σ-алгеброй всех измеримых множеств в $M \mid \alpha^\infty$, что противоречит условию. Лемма, а вместе с ней и теорема 3, доказана.

Следствие. *Группа унитарных операторов, соответствующая K-потоку, имеет в ортогональном дополнении к подпространству постоянных счетнократный лебеговский спектр.*

Действительно, в этом случае $\overline{H}$ состоит из одномерного подпространства постоянных, и остается применить теорему 3.

§ 5. Свойства K-потоков

I. *K-поток в ортогональном дополнении к подпространству постоянных имеет счетнократный лебеговский спектр.*

Это свойство установлено в предыдущем параграфе.

II. *K-поток имеет положительную энтропию.*

Справедливо более сильное утверждение:

если поток $\{S_t\}$ таков, что найдется σ-алгебра $\mathfrak{M}(\zeta^0)$, для которой

$\zeta^t > \zeta^{t_1}$ при $t > t_1 \bmod 0$ и $\prod_t \zeta^t = \varepsilon \bmod 0$, то поток $\{S_t\}$ имеет положительную энтропию.

Действительно, на основании леммы 4.1, существует конечное разбиение $\alpha < \zeta^0$ такое, что $\alpha^t > \alpha^{t_1}$ при $t > t_1$. Следовательно,

$$h(S_1) \geqslant H\left(S_1\alpha \,\Big|\, \prod_{k=0}^{\infty} S_{-k}\alpha\right) \geqslant H(S_1\alpha \,|\, \alpha^0) > 0.$$

Здесь, как обычно, выражение $H(S_1\alpha \,|\, \alpha^0)$ (или $H\left(S_1\alpha \,\Big|\, \prod_{k=0}^{\infty} S_{-k}\alpha\right)$) обозначает среднее от условной энтропии при условии α^0 $\left(\prod_{k=0}^{\infty} S_{-k}\alpha\right)$ [см. ([11])].

III. *K-поток обладает перемешиванием всех степеней.*

Это утверждение мы получим как следствие теоремы 4.

Пусть, аналогично предыдущему случаю, для потока $\{S_t\}$ существует σ-алгебра $\mathfrak{M}(\zeta^0)$ такая, что $S_t\zeta^0 = \zeta^t \geqslant \zeta^{t_1}$ при $t > t_1 \bmod 0$ и $\prod_{-\infty}^{\infty} \zeta^t = \varepsilon \bmod 0$. Положим

$$\underline{\zeta} = \bigcap_{-\infty}^{\infty} \zeta^t.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если при данном k множества $A_0, A_1, \ldots, A_k$ независимы от σ-алгебры $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$, т. е. для почти всех C—элементов разбиения $\underline{\zeta}$*

$$\mu(A_i \,|\, C) = \mu(A_i), \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

то для любой последовательности $(k+1)$-мерных векторов $\vec{t}^n = \{t_0^n, t_1^n, \ldots, t_k^n\}$ такой, что $t_{i-1}^n < t_i^n$, $i = 1, \ldots, k$, $\min_i (t_i^n - t_i^{n-1}) \to \infty$ при $n \to \infty$,

$$\mu\{S_{t_0^n}A_0 \cap S_{t_1^n}A_1 \cap \ldots \cap S_{t_k^n}A_k\} \to \mu\{A_0\}\,\mu\{A_1\}\ldots\mu\{A_k\}.$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для того случая, когда множества $A_0, A_1, \ldots, A_k$ принадлежат некоторой σ-алгебре $\mathfrak{M}(\zeta^t)$. Имеем:

$$\mu\{S_{t_0^n}A_0 \cap S_{t_1^n}A_1 \cap \ldots \cap S_{t_k^n}A_k\} = \mu\{S_{t_0^n - t_k^n}A_0 \cap S_{t_1^n - t_k^n}A_1 \cap \ldots \cap A_k\}.$$

На основании теоремы Дуба [см. ([16]), теорема 4.3, стр. 297] и условия теоремы, для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и всех $t > t_0(\varepsilon, \delta)$ найдется множество Γ_t, принадлежащее σ-алгебре $\mathfrak{M}(\zeta^t)$ такое, что $\mu(\Gamma_t) > 1 - \delta$, и для каждого элемента C разбиения ζ^t, принадлежащего Γ_t, будем иметь:

$$|\mu\{A_k \,|\, C\} - \mu\{A_k\}| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$|\mu\{S_{t_0^n}A_0 \cap S_{t_1^n}A_1 \cap \ldots \cap S_{t_k^n}A_k\} -$$

$$- \mu\{S_{t_0^n}A_0 \cap S_{t_1^n}A_1 \cap \ldots \cap S_{t_{k-1}^n}A_{k-1}\}\,\mu\{A_k\}| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Gamma_{t_{k-1}^n - t_k^n} \cap S_{t_0^n - t_k^n}A_0 \cap \cdots \cap S_{t_{k-1}^n - t_k^n}A_{k-1}} [\mu(A_k \,|\, C) - \mu(A_k)]\,d\mu(C) \right| + \delta \leqslant \varepsilon + \delta$$

при достаточно большом n. Продолжая процесс для множеств $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, затем $A_0, A_1, \ldots, A_{k-2}$ и т. д., найдем столь большое n, при котором

$$|\mu\{S_{t_0^n} A_0 \cap S_{t_1^n} A_1 \cap \ldots \cap S_{t_k^n} A_k\} - \mu\{A_0\} \ldots \mu\{A_k\}| < k(\varepsilon + \delta),$$

что и требовалось доказать.

Для полного доказательства теоремы достаточно установить, что для произвольных множеств $A_0, A_1, \ldots, A_k$, независимых относительно σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta)$, и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое t и такие множества $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k$, независимые от σ-алгебры $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$ и принадлежащие σ-алгебре $\mathfrak{M}(\zeta^t)$, что

$$\mu(A_i \circ \widetilde{A}_i) < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Обозначим через ξ разбиение пространства M на неприводимые относительно потока $\{S_t\}$ компоненты. Очевидно, что $\xi \leqslant \underline{\zeta}$.

ЛЕММА 5.1. *Для почти каждого элемента C разбиения ξ разбиение $\zeta^0(C)$* * *удовлетворяет условиям:*

1) $\zeta^t(C) > \zeta^{t_1}(C)$ *при* $t > t_1$,

2) $\prod_t \zeta^t(C) = \varepsilon(C)$,

3) $\bigcap_t \zeta^t(C) = \underline{\zeta}(C)$.

Доказательство. Неравенство $\zeta^t(C) \geqslant \zeta^{t_1}(C)$ при $t > t_1$ и равенство $\prod_t \zeta^t(C) = \varepsilon(C)$ для почти всех C очевидны. Если же

$$\zeta^t(C) = \zeta^{t_1}(C)$$

при любых t и t_1, то $\zeta^t(C) = \varepsilon(C)$ и $\mu(A_i \mid C')$, где C' — элемент разбиения $\underline{\zeta}$, лежащий в C, принимает значения либо 0, либо 1. Следовательно, $\mu(\bar{A}_i)$ равно либо 0, либо 1, что противоречит условию. Условие 3) очевидно в силу соотношения $\xi \leqslant \underline{\zeta}$.

ЛЕММА 5.2**. *Для почти всех элементов C разбиения $\underline{\zeta}$ условное распределение σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^t)$ при любом t непрерывно.*

Доказательство. Положим для каждой точки x

$$\psi^t(x) = \mu(x \mid C_t),$$

где C_t — элемент разбиения ζ^t, содержащий x. Очевидно, что при $t \geqslant s$ $\psi^t(x) \geqslant \psi^s(x)$ почти всюду и $\psi^t(x) = \psi^s(S_{t-s}x)$. Так как

$$\int_M \psi^t(x)\, d\mu = \int_M \psi^s(x)\, d\mu = \gamma,$$

то $\psi^t(x) = \psi^s(x)$ для почти всех x. Следовательно, функция $\psi^t(x) = \psi(x)$ измерима относительно разбиения ξ. Рассмотрим множество тех x, для

* Почти каждый элемент C разбиения ξ является пространством Лебега и $\zeta^t(C)$ — разбиение пространства C, индуцированное разбиением ζ^t. Аналогичное замечание относится к $\varepsilon(C)$ и $\underline{\zeta}(C)$.

** Идея доказательства принадлежит А. Н. Колмогорову, использовавшему аналогичную лемму для других целей.

которых $\psi(x) > 0$. В силу тождества, справедливого при любых t, s, $t > s$,

$$\psi(x) = \psi^t(x) = \mu(x \mid C^t) = \mu(x \mid C^s) = \mu(x \mid C^t)\,\mu(C^t \mid C^s),$$

получаем, что для $x \in B$

$$\mu(C^t \mid C^s) = 1.$$

На основании леммы 5.1, $\mu(B) = 0$. Следовательно, $\psi(x) = 0$ почти всюду. Далее, почти всюду

$$0 = \mu(x \mid C^s) = \lim_{\tau\to\infty} \mu(C^\tau(x) \mid C^s),$$

где $C^\tau(x)$ — содержащий x элемент разбиения ζ^τ. Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое τ_0, что при всех $\tau > \tau_0$ существует множество F^τ, $\mu(F^\tau) > 1 - \delta$, принадлежащее σ-алгебре ζ^s, такое, что для любого $x \in F^\tau$

$$\mu(C^\tau(x) \mid C^s) < \varepsilon.$$

Так как почти всюду

$$\mu(C^\tau \mid C^s) = \mu(C^t \mid C^{s+t-\tau}),$$

то последний результат можно сформулировать следующим образом: для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и при всех достаточно больших τ найдется множество $\widetilde{F}^\tau$, $\mu(\widetilde{F}^\tau) > 1 - \delta$, из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\zeta^{-\tau})$ такое, что условная мера элементов разбиения ζ^t при фиксированном элементе разбиения $\zeta^{-\tau}$ меньше ε для элементов разбиения $\zeta^{-\tau}$, принадлежащих $\widetilde{F}^\tau$. Ввиду произвольности ε и δ и соотношения

$$\mu(C^t \mid \underline{C}) \leqslant \mu(C^t \mid C^{-\tau}),$$

лемма доказана.

Закончим теперь доказательство теоремы. Для множеств $A_0, A_1, \ldots, A_k$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое t_1 и такие множества $A_0', \ldots, A_k'$, принадлежащие σ-алгебре $\mathfrak{M}(\zeta^{t_1})$, что

$$\mu(A_i \circ A_i') < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

На основании теоремы Рохлина о независимых дополнениях [см. ([5])] и в силу леммы 5.2, для каждого t существует такое разбиение η^t, что

$$\zeta^t = \eta^t \cdot \underline{\zeta}$$

и σ-алгебры $\mathfrak{M}(\eta^t)$ и $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$ независимы. Следовательно, для множеств A_i' можно найти множества A_i'', представимые в виде

$$A_i'' = \bigcup_{k=1}^{n_i} (F_k^i \cap G_k^i),$$

где множества F_k^i и G_k^i принадлежат σ-алгебрам $\mathfrak{M}(\eta^t)$ и $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$ соответственно, для которых

$$\mu(A_i' \circ A_i'') < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

и, следовательно,

$$\mu(A_i \circ A_i'') < 2\varepsilon.$$

В силу формулы

$$\mu(A_i \circ A_i'') = \int_{M|\underline{\zeta}} \mu(A_i \circ A_i'' | \underline{C})\, d\mu(\underline{C}),$$

легко получим, что

$$\mu(\underline{C} : \mu(A_i \circ A_i'' | \underline{C}) > \varepsilon^{\frac{1}{2}}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Но в силу независимости σ-алгебр $\mathfrak{M}(\eta^t)$ и $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$,

$$\mu(A_i'' | \underline{C}) = \mu(G_k^i),$$

где $\underline{C} \in F_k^i$. Поэтому, выбросив для каждого i некоторые множества $G_{k_1}^{i_1} \ldots G_{k_{s_i}}^{i_s}$ меры, меньшей $2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, можно получить множества

$$B_i = \bigcup_{k \neq k_1 \ldots k_{s_i}} (F_k^i \cap G_k^i)$$

такие, что

$$\mu(A_i \circ B_i) < 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\mu(A_i \circ B_i | \underline{C}) < 2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

для множества G из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\underline{\zeta})$ меры, большей $1 - 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Для множества $\overline{G}$ найдем множество H_i, принадлежащее σ-алгебре $\mathfrak{M}(\eta^t)$ и такое, что

$$\mu(H_i) = \mu(A_i);$$

для каждого множества F_k^i, участвующего в представлении множества B_i, найдем множество H_k^i из σ-алгебры $\mathfrak{M}(\eta^t)$ такое, что

$$\mu(F_k^i \circ H_k^i) < 4\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \mu(H_k^i) = \mu(A_i).$$

Тогда для множеств

$$\widetilde{A}_i = \bigcup_{k \neq k_1 \ldots k_{s_i}^i} (H_k^i \cap G_k^{i'}) \cup (H_i \cap \overline{G})$$

будем иметь:

$$\mu(\widetilde{A}_i | \underline{C}) = \mu(A_i)$$

и

$$\mu(\widetilde{A}_i \circ A_i) < 8\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\underline{\zeta} = \nu$, *то поток* $\{S_t\}$ *обладает перемешиванием всех степеней.*

Поступило
25. IV. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 5 (1958), 861—865;

Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 4 (1959), 754—755.

2 Рохлин В. А., Точные эндоморфизмы пространства Лебега, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 25 (1961), 499—530.

3 Рохлин В. А., Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп, Известия Ак. наук СССР, сер. матем, 13 (1949), 329—340.

4 Синай Я. Г., Динамические системы и стационарные марковские процессы, Теор. вероятн. и ее примен., V, № 3 (1960), 335—338.

5 Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Матем. сборн., 25 (67): 1 (1949), 107—150.

6 Рохлин В. А., Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, IV, в. 2 (1949), 57—128.

7 Синай Я. Г., О понятии энтропии динамической системы, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 4 (1959), 768—771.

8 Хинчин А. Я., Об основных теоремах теории информации, Успехи матем. наук, XI, в. 1 (1956), 17—75.

9 Синай Я. Г., О потоках с конечной энтропией, Доклады Ак. наук СССР, 125, № 6 (1959), 1200—1202.

10 Абрамов Л. М., Об энтропии потока, Доклады Ак. наук СССР, 128, № 5 (1959), 873—875.

11 Рохлин В. А., Об [illegible] пии метричес[illegible] автоморфизма, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 5 (19[illegible], [illegible]0—983.

12 Плеснер А. И. и [illegible]охлин В. А[illegible] [illegible]ектральная теория линейных операторов, Успехи матем. наук, I, в. 1 (194[illegible] [illegible]1—191.

13 Плеснер А. И., Функции максима[illegible] ого оператора, Доклады Ак. наук СССР, 23, № 4 (1939), 327—33[illegible]; О полу[illegible]арных операторах, Доклады Ак. наук СССР, 25, № 9 (1939), [illegible]—710.

14 Наймарк М. А. и [illegible] [illegible] Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств, Успехи ма[illegible]м. на[illegible]к, X, в. 2 (1955), 111—142.

15 Ambrose W., Repres[illegible]ati[illegible] of ergodic flows, Ann. of Math., 42, № 3 (1941), 723—739.

16 Дуб Дж., Вероятностные процессы, ИЛ., 1956.

17 Гельфанд И. М. и Ф[illegible] С. В., Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной [illegible]ривизны, Успехи матем. наук, 7, в. 1 (1952), 118—137.

18 Рохлин В. А., Новые методы [illegible] метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, XV, вып. 4 (1960), 3—26.

19 Винокуров В. Г., Условия регулярности вероятностных процессов, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 5 (1957), 959—961.

20 Пинскер М. С., Динамические системы с нулевой и вполне положительной энтропией, Доклады Ак. наук СССР, 133, № 5 (1960), 1025—1026.

21 von Neumann John, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. of Math., 33, № 3(3) (1932), 587—642.

22 Ambrose W. and Kakutani S., Structure and continuity of measurable flows, Duke Math. J., 9, № 1 (1942), 25—42.

23 Halmos P., On automorphisms of compact groups, Bull. Amer. Math. Soc., 49, № 8 (1943), 619—624.

24 Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы линейных преобразований прямой, Доклады Ак. наук СССР, 55, № 7 (1947), 571—575.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25(1961), 925—934

М. А. СУБХАНКУЛОВ

ОСТАТОЧНЫЙ ЧЛЕН В ТАУБЕРОВОЙ ТЕОРЕМЕ ХАРДИ — ЛИТТЛЬВУДА — КАРЛЕМАНА

В работе доказана тауберова теорема с остаточным членом для преобразования Стилтьеса, причем утверждение теоремы неулучшаемо.

Полученный результат применяется в спектральной теории дифференциальных операторов для получения точной, в смысле неулучшаемости остаточного члена, асимптотики собственных значений и числа собственных значений некоторых классов дифференциальных операторов.

Как известно, во многих вопросах математической физики возникает необходимость получения асимптотической формулы для собственных значений и спектральной функции дифференциальных операторов. При этом пользуются тауберовыми теоремами, в частности тауберовыми теоремами для преобразований Стилтьеса и рядов по рациональным функциям, т. е. рядов вида:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n + x}, \quad a_n \geqslant 0, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to \infty.$$

Простейшая тауберова теорема такого вида впервые была доказана Харди и Литтльвудом (1), а возможность применения тауберовых теорем в спектральной теории была показана Карлеманом (2) в 1934 г. В этой работе Карлеман пользуется следующей тауберовой теоремой:

Пусть $A(x)$ — не убывающая функция при $x \geqslant 0$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{dA(x)}{x + r} = \frac{P \log r}{r} + \frac{a}{r} + O\left(e^{-\alpha \sqrt{r}}\right), \quad \alpha > 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{a}$$

где P и Q — действительные постоянные. Тогда

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{2} - \delta} \left[A\left(x + x^{\frac{1}{2} + \delta}\right) - A(x)\right] = P \quad \text{для } 0 < \delta < \frac{1}{2}.$$

Доказательству и уточнению этой теоремы были посвящены работы ряда авторов: Винера (4), Плейеля (5), Авакумовича (6), Вучковича (7), (8). В настоящее время она хорошо исследована и доказана с хорошим остаточным членом.

В работе (3) (1936 г.) Карлеман, исследуя дифференциальные операторы в частных производных для оценок собственных значении рассматриваемых операторов, использует такую тауберову теорему:

Пусть ряд

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k + x}, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to \infty,$$

сходится при $x > 0$, и пусть $a_k \geqslant 0$, $s(x) \sim Hx^{-\delta}$, $0 < \delta < 1$, $x \to \infty$.

Тогда

$$\sum_{\lambda_k \leqslant x} a_k \sim \frac{H \sin \pi\delta}{\pi (1-\delta)} x^{1-\delta}.$$

До настоящего времени в этой тауберовой теореме не подсчитан остаточный член, т. е. неизвестно, какой оценке удовлетворяет сумма $\sum\limits_{\lambda_k \leqslant x} a_k$, если выполняются условия:

$$a_k \geqslant 0, \tag{б}$$

$$s(x) = Hx^{-\delta} + O(x^{-\delta-\sigma}), \quad 0 < \delta < 1, \quad \sigma > 0, \quad x \to \infty. \tag{в}$$

Кроме того, сейчас хорошо известно [см. ([9])], что точность асимптотических формул для спектральной функции и собственных значений для некоторых классов дифференциальных операторов зависит главным образом от точности остаточного члена в вышеприведенной тауберовой теореме. Поэтому интересен подсчет остаточного члена в этой теореме и притом по возможности лучшего.

В настоящей работе, в частности, показывается, что оценки (б) и (в) влекут за собой оценку

$$\sum_{\lambda_k \leqslant x} a_k = \frac{H \sin \pi\delta}{\pi (1-\delta)} x^{1-\delta} + O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\ln x}\right)$$

и что эта оценка неулучшаема.

ТЕОРЕМА. *Если интеграл Стилтьеса*

$$s(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{u+x}, \tag{1}$$

где $\varphi(u)$ — *положительная монотонно возрастающая функция, причем* $\varphi(0) = 0$, *сходится при* $x > 0$ *и*

$$s(x) = Hx^{-\delta} + O(x^{-\delta-\sigma}), \; 0 < \delta < 1, \; \sigma > 0, \; H \geqslant 0, \; x \to \infty, \tag{2}$$

то при $\beta \geqslant 0$ *и целом положительном* m

$$\int_0^x u^\beta (x-u)^m \, d\varphi(u^2) =$$

$$= \frac{2Hm! \sin \pi\delta}{\pi(2-2\delta+\beta)(2-2\delta+\beta+1)\ldots(2-2\delta+\beta+m)} x^{m+2-2\delta+\beta} + O\left[\frac{x^{m+2-2\delta+\beta}}{(\ln x)^{m+1}}\right].$$

В частности,

$$\varphi(u) = \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(1-\delta)} x^{1-\delta} + O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\ln x}\right).$$

Для доказательства теоремы нам потребуются две леммы.

ЛЕММА. 1. *Если функция* $s(x)$ *определена формулой* (1) *и удовлетворяет оценке* (2), *то при* $x \to \infty$

$$-s'(x) = \delta H x^{-\delta-1} + O(x^{-\delta-1-\frac{\sigma}{2}}). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть положительная и определенная при $x > 0$ функция $f(x)$ имеет положительную, непрерывную и монотонно

возрастающую производную, и пусть при $x \to \infty$

$$f(x) = ax^q + O(x^{q-\alpha}), \quad 0 < q, \quad 0 < \alpha.$$

Тогда

$$f'(x) = aqx^{q-1} + O(x^{q-1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Действительно, в этом случае мы имеем:

$$\frac{1}{h}[f(x) - f(x-h)] \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)], \quad x > h > 0.$$

Положив $h = x^{1-\frac{\alpha}{2}}$, получим:

$$\frac{1}{h}[f(x) - f(x-h)] = \frac{1}{h}[ax^q - a(x-h)^q + O(x^{q-\alpha}) + O\ (x-h)^{q-\alpha}] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[aqx^{q-1}\left(1 - \frac{\theta h}{x}\right)^{q-1} h + O(x^{q-\alpha})\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\{[aqx^{q-1} + O(x^{q-2}h)]\, h + O(x^{q-\alpha})\} =$$

$$= aqx^{q-1} + O(x^{q-2}h) + O\left(\frac{x^{q-\alpha}}{h}\right) = aqx^{q-1} + O(x^{q-1-\frac{\alpha}{2}}),$$

где $|\theta| < 1$, и

$$\frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \frac{1}{h}\left[aqx^{q-1}\left(1 + \frac{\theta_1 h}{x}\right)^{q-1} h + O(x^{q-\alpha})\right] =$$

$$= aqx^{q-1} + O(x^{q-2}h) + O\left(\frac{x^{q-\alpha}}{h}\right) = aqx^{q-1} + O(x^{q-1-\frac{\alpha}{2}}),$$

где $|\theta_1| < 1$. Отсюда следует:

$$f'(x) = aqx^{q-1} + O(x^{q-1-\frac{\alpha}{2}}).$$

Далее, полагая $f(x) = x^2 s(x)$ и рассматривая равенство

$$f(x) = x^2 s(x) = \int_0^\infty \frac{x^2\, d\varphi(u)}{u+x} = \int_0^\infty \frac{x^2 \varphi(u)}{(u+x)^2}\, du,$$

убеждаемся, что функция $f(x)$ определена и положительна при $x > 0$. Рассматривая же равенство

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^2 s(x)] = 2\int_0^\infty \frac{xu\varphi(u)}{(x+u)^3}\, du = 2\int_0^\infty \frac{u\varphi(xu)}{(u+1)^3}\, du,$$

заключаем, что $f'(x)$ — функция положительная, непрерывная и монотонно возрастающая, в силу положительности и монотонности $\varphi(x)$. Поэтому из оценки (2) сразу следует, что

$$x^2 s(x) = Hx^{2-\delta} + O(x^{2-\delta-\sigma}),$$

$$\frac{d}{dx}[x^2 s(x)] = (2-\delta) Hx^{1-\delta} + O(x^{1-\delta-\frac{\sigma}{2}}). \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем:

$$-s'(x) = x^{-2}[2xs(x) - (2-\delta) Hx^{1-\delta} + O(x^{1-\delta-\frac{\sigma}{2}})] =$$

$$= x^{-2}[2Hx^{1-\delta} + O(x^{1-\delta-\sigma}) - (2-\delta) Hx^{1-\delta} + O(x^{1-\delta-\frac{\sigma}{2}})] =$$

$$= \delta H x^{-\delta-1} + O\left(x^{-\delta-1-\frac{\sigma}{2}}\right),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2 [Фрейд ([10])]. *Пусть* $\tau(u)$ *при* $0 < u < \infty$ *есть монотонно возрастающая функция,* $f(u) \geqslant 0$ *и интеграл Лапласа — Стилтьеса*

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, e^{-us}\, d\tau(u)$$

сходится при $s > 0$. *Пусть, далее, при* $s \to +0$

$$F(s) = \frac{c\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}[1 + r(s)], \quad |r(s)| < R(s), \quad \alpha > 0,$$

где $R(s)$ *монотонно возрастает,* $R(0) = 0$, $R(ks) < \exp(c_1 k) R(s)$ *и* c_1 *не зависит от* k *и* s. *Тогда при* $\beta \geqslant 0$ *и целом положительном* m

$$\int_0^x u^\beta f(u)\,(x-u)^m\, d\tau(u) =$$

$$= \frac{c\alpha m!\, x^{m+\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m)}\left\{1 + O\left[\left(\ln\frac{1}{R\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^{-m-1}\right]\right\}, \quad x \to \infty.$$

Доказательство теоремы. Согласно условию (2) и в силу знакоположительности и монотонности функции $\varphi(u)$ имеем:

$$\varphi(x) = \int_0^x d\varphi(u) \leqslant 2x\int_0^x \frac{d\varphi(u)}{x+u} < 2x\int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{x+u} \sim 2Hx^{1-\delta}. \tag{5}$$

Отсюда при $0 \leqslant x < \xi$, $\xi > \xi_0$, получим:

$$s(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{x+u} = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{(x+u)^2}\, du < c_1\int_x^\infty \frac{\varphi(v)}{v^2}\, dv < c_2\int_x^\infty \frac{dv}{v^{1+\delta}} =$$

$$= c_2 x^{-\delta}, \quad 0 < x < \xi. \tag{6}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $0 < \delta < \frac{1}{2}$. В этом случае будем исходить из формулы:

$$\int_0^\infty \frac{\cos sx}{x^2+u^2}\, dx = \frac{\pi}{2u} e^{-su}. \tag{7}$$

Так как

$$s(x^2) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{x^2+u} = \int_0^\infty \frac{d\varphi(u^2)}{x^2+u^2}$$

и перестановка интегралов законна, то, согласно формулам (5), (6) и (7), имеем:

$$\int_0^\infty s(x^2)\cos sx\, dx = \int_0^\infty \cos sx \int_0^\infty \frac{d\varphi(u^2)}{x^2+u^2}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty d\varphi(u^2)\int_0^\infty \frac{\cos sx}{x^2+u^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-su}}{u}\, d\varphi(u^2). \tag{8}$$

С другой стороны, вводя обозначение

$$Q(x) = \int_{\xi}^{x} \cos st\, dt,$$

в силу оценок (2), (3), (6) и условия $0 < \delta < \frac{1}{2}$, получаем:

$$\int_0^\infty s(x^2) \cos sx\, dx = \int_\xi^\infty s(x^2) \cos sx\, dx + O\left(\int_0^\xi x^{-2\delta}\, dx\right) =$$

$$= \int_\xi^\infty s(x^2) \cos sx dx + O(\xi^{1-2\delta}) = \int_\xi^\infty s(x^2)\; Q'(x)\, dx + O(\xi^{1-2\delta}) =$$

$$= -2 \int_\xi^\infty s'(x^2)\; Q(x)\, x dx + O(\xi^{1-2\delta}) =$$

$$= 2 \int_\xi^\infty [\delta H^{-2-2\delta} + O(x^{-2-2\delta-\sigma})]\; Q(x)\, x\, dx + O(\xi^{1-2\delta}) =$$

$$= 2\delta H \int_\xi^\infty Q(x)\, x^{-1-2\delta}\, dx + O\left(\frac{1}{s} \int_\xi^\infty x^{-1-2\delta-\sigma}\, dx\right) + O(\xi^{1-2\delta}) =$$

$$= H \int_\xi^\infty \frac{\cos sx}{x^{2\delta}}\, dx + O\left(\frac{1}{s\xi^{2\delta+\sigma}}\right) + O(\xi^{1-2\delta}) =$$

$$= H \int_0^\infty \frac{\cos sx}{x^{2\delta}}\, dx + O\left(\frac{1}{s\xi^{2\delta+\sigma}}\right) + O(\xi^{1-2\delta}). \qquad (9)$$

Учитывая формулу

$$\int_0^\infty \frac{\cos sx}{x^{2\delta}}\, dx = \frac{1}{s^{1-2\delta}}\, \Gamma(1-2\delta) \cos \frac{\pi}{2}(1-2\delta) = \frac{\Gamma(1-2\delta)}{s^{1-2\delta}} \sin \pi\delta,$$

которая справедлива при $(1-2\delta)^2 < 1$, т. е. при $0 < \delta < \frac{1}{2}$, из (8) и (9) будем иметь при $s \to 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-su}}{u}\, d\varphi(u^2) = \frac{2H\Gamma(1-2\delta) \sin \pi\delta}{\pi s^{1-2\delta}} + O\left(\frac{1}{s\xi^{2\delta+\sigma}}\right) + O(\xi^{1-2\delta}),$$

или $\Big($если положить $\frac{1}{s} = \xi^{1+\sigma}$ и учесть, что это не противоречит первоначальному определению $\xi\Big)$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-su}}{u}\, d\varphi(u^2) = \frac{2H\Gamma(1-2\delta) \sin \pi\delta}{\pi s^{1-2\delta}} + O\left(\frac{1}{s^{1-\frac{2\delta+\sigma}{1+\sigma}}}\right). \qquad (10)$$

Так как $0 < \delta < \frac{1}{2}$, то в формуле (10) $1 - 2\delta > 1 - \frac{2\delta+\sigma}{1+\sigma}$; кроме того, все условия леммы 2 выполнены. Поэтому, применяя лемму 2 со значениями

$$f(u) = \frac{1}{u}, \qquad \tau(u) = \varphi(u^2), \qquad c = \frac{2H \sin \pi\delta}{\pi(1-2\delta)}, \qquad \alpha = 1 - 2\delta,$$

при $\beta_1 \geqslant 0$ и целом положительном m получим:

$$\int_0^x u^{\beta_1-1} (x+u)^m \, d\varphi(u^2) =$$

$$= \frac{2Hm! \sin \pi\delta}{\pi (1-2\delta+\beta_1)(1-2\delta+\beta_1+1)\ldots(1-2\delta+\beta_1+m)} x^{m+1-2\delta+\beta_1} + O\left[\frac{x^{m+1-2\delta+\beta_1}}{(\ln x)^{m+1}}\right],$$

или (если положить $\beta_1 - 1 = \beta$)

$$\int_0^x u^{\beta} (x-u)^m \, d\varphi(u^2) =$$

$$= \frac{2Hm! \sin \pi\delta}{(2-2\delta+\beta)(2-2\delta+\beta+1)\ldots(2-2\delta+\beta+m)} x^{m+2-2\delta+\beta} + O\left[\frac{x^{m+2-2\delta+\beta}}{(\ln x)^{m+1}}\right]. \qquad (11)$$

Этим при $0 < \delta < \frac{1}{2}$ доказательство теоремы завершено.

2. Пусть $\frac{1}{2} < \delta < 1$. В этом случае будем исходить из формулы

$$\int_0^\infty \frac{x \sin sx}{x^2+u^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-us},$$

используя ее в виде

$$\int_\xi^\infty \frac{x \sin sx}{x^2+u^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-us} + O\left(\frac{s\xi^3}{u^2}\right), \qquad (12)$$

где $\xi s > 1$.

Применяя формулы (6), (7) и (12) и рассуждая так же, как и в п. 1, получим:

$$\int_\xi^\infty \left[s(x^2) + O\left(\frac{\xi^{4-2\delta}}{x^4}\right)\right] x \sin sx \, dx = \int_\xi^\infty x \sin sx \int_\xi^\infty \frac{d[\varphi(u^2)]}{x^2+u^2} dx + O\left(\xi^{4-2\delta} \int_\xi^\infty \frac{dx}{x^3}\right) =$$

$$= \int_\xi^\infty d\varphi(u^2) \int_\xi^\infty \frac{x \sin sx}{x^2+u^2} \, dx + O(\xi^{2-2\delta}) = \frac{\pi}{2} \int_\xi^\infty e^{-us} \, d\varphi(u^2) +$$

$$+ O\left(s\xi^3 \int_\xi^\infty \frac{d\varphi(u^2)}{u^2}\right) + O(\xi^{2-2\delta}) = \frac{\pi}{2} \int_\xi^\infty e^{-us} \, d\varphi(u^2) + O(s\xi^{3-2\delta}) + O(\xi^{2-2\delta}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-us} \, d\varphi(u^2) + O(\xi^{2-2\delta}) + O(s\xi^{3-2\delta}). \qquad (13)$$

С другой стороны, в силу оценок (2), (3) и условия $\frac{1}{2} < \delta < 1$, вводя обозначение

$$P(x) = \int_\xi^x \sin st \, dt,$$

будем иметь:

$$\int_{\xi}^{\infty}\left[s(x^2)+O\left(\frac{\xi^{4-2\delta}}{x^4}\right)\right]x\sin sx\,dx=$$

$$=\int_{\xi}^{\infty}s(x^2)\,x\sin sx\,dx+O(\xi^{2-2\delta})=\int_{\xi}^{\infty}s(x^2)\,xP'(x)\,dx+O(\xi^{2-2\delta})=$$

$$=-\int_{\xi}^{\infty}P(x)\,[s'(x^2)\,2x^2+s(x^2)]\,dx+O(\xi^{2-2\delta})=$$

$$=-\int_{\xi}^{\infty}P(x)\,\{[-\delta Hx^{-2\delta-2}+O(x^{-2\delta-2-\sigma})]\,2x^2+Hx^{-2\delta}+O(x^{-2\delta-2\sigma})\}\,dx=$$

$$=(2\delta-1)H\int_{\xi}^{\infty}P(x)\,x^{-2\delta}\,dx+O(\xi^{2-2\delta})+$$

$$+O\left(\frac{\xi^{1-2\delta-\sigma}}{s}\right)=H\int_{\xi}^{\infty}\frac{\sin sx}{x^{2\delta-1}}\,dx+O(\xi^{2-2\delta})+O\left(\frac{\xi^{1-2\delta-\sigma}}{s}\right)=$$

$$=H\int_{0}^{\infty}\frac{\sin sx}{x^{2\delta-1}}\,dx+O(\xi^{2-2\delta})+O\left(\frac{\xi^{1-2\delta-\sigma}}{s}\right)=$$

$$=\frac{H\Gamma(2-2\delta)\sin\frac{\pi}{2}(2-2\delta)}{s^{2-2\delta}}+O(\xi^{2-2\delta})+O\left(\frac{\xi^{1-2\delta-\sigma}}{s}\right)=$$

$$=\frac{H\Gamma[(3-2\delta)+1]\sin\pi\delta}{(2-2\delta)\,s^{2-2\delta}}+O(\xi^{2-2\delta})+O\left(\frac{\xi^{1-2\delta-\sigma}}{s}\right). \tag{14}$$

Положив $\xi=\dfrac{1}{s^{\frac{1}{1+\frac{\sigma}{2}}}}$, из (13) и (14) получим при $s\to 0$:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-us}\,d\varphi(u^2)=\frac{2H\Gamma(3-2\delta)\sin\pi\delta}{\pi(2-2\delta)\,s^{2-2\delta}}+O\left(\frac{1}{s^{\frac{2-2\delta}{1+\frac{\sigma}{2}}}}\right). \tag{15}$$

Применяя теперь лемму 2 со значениями

$$f(u)=1,\quad \tau(u)=\varphi(u^2),\quad c=\frac{2H\sin\pi\delta}{\pi(2-2\delta)},\quad \alpha=2-2\delta,$$

при $\beta\geqslant 0$ и целом положительном m найдем:

$$\int_{0}^{x}u^{\beta}(x-u)^m\,d\varphi(u^2)=$$

$$=\frac{2Hm!\sin\pi\delta}{\pi(2-2\delta+\beta)(2-2\delta+\beta+1)\dots(2-2\delta+\beta+m)}\,x^{m+2-2\delta+\beta}+$$

$$+O\left[\frac{x^{m+2-2\delta+\beta}}{(\ln x)^{m+1}}\right]. \tag{16}$$

Из формул (11) и (16) вытекает утверждение теоремы при $0<\delta<\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}<\delta<1$, а следовательно, и при $0<\delta<1$. В частности, полагая $\beta=m=0$, будем иметь:

$$\varphi(x)=\frac{H\sin\pi\delta}{\pi(1-\delta)}\,x^{1-\delta}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}. \tag{17}$$

Этим теорема доказана полностью.

Установим теперь неулучшаемость теоремы, которая вытекает из неулучшаемости теоремы Фрейда (лемма 2) и формулы

$$s(x)=\int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{u+x}=\int_0^\infty e^{-xy}F(y)\,dy, \tag{18}$$

где

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-yu}\,d\varphi(u).$$

Действительно, предположим, что остаточный член в теореме может быть лучше, чем $O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\ln x}\right)$. Тогда, с одной стороны, рассматривая оценку

$$F(y)=\frac{1}{y^{1-\delta}}+O\left(\frac{1}{|y|^{\alpha}}\right),\quad \alpha<1-\delta,\quad y\to 0, \tag{19}$$

и применяя к ней теорему Фрейда, убеждаемся, что остаток в оценке $\varphi(x)$ не может быть лучше, чем $O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\ln x}\right)$ (это было показано Корееваром[11]). С другой стороны, подставляя (19) в (18), получим для $s(x)$ оценку со степенным понижением в остатке и отсюда, в силу нашего предположения, оценку для $\varphi(x)$ с остаточным членом, лучшим чем $O\left(\frac{x^{1-\delta}}{\ln x}\right)$. Это противоречит предыдущему утверждению и доказывает неулучшаемость теоремы.

Следствие 1. *Пусть ряд*

$$s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k+x},\quad 0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\to\infty,$$

сходится при $x>0$, *и пусть, кроме того,* $a_k\geqslant 0$ *и*

$$s(x)=Hx^{-\delta}+O(x^{-\delta-\sigma}),\quad 0<\delta<1,\quad \sigma>0,\quad x\to\infty.$$

Тогда

$$\varphi(x)=\sum_{\lambda_k\leqslant x}a_k=\frac{H\sin\pi\delta}{\pi(1-\delta)}x^{1-\delta}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}. \tag{20}$$

В частности, если $a_k=\frac{1}{\lambda_k}$, *то*

1) $\displaystyle\sum_{\lambda_k\leqslant x}1=\frac{H\sin\pi\delta}{\pi(2-\delta)}x^{2-\delta}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}$,

2) $\displaystyle\lambda_n=\left[\frac{\pi(2-\delta)}{H\sin\pi\delta}n\right]^{\frac{1}{2-\delta}}\left\{1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\}$.

Первое утверждение вытекает из условия $a_k\geqslant 0$ и формулы

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda_k+x}=\int_0^\infty\frac{d\varphi(u)}{u+x},$$

где ряд и интеграл сходится при $x>0$.

Для доказательства второго утверждения обозначим:

$$N(x)=\sum_{\lambda_k\leqslant x}1.$$

Тогда, так как $\varphi(x) = \sum_{\lambda_k \leqslant x} \frac{1}{\lambda_k}$, согласно (20) будем иметь:

$$N(x) = \int_0^x x\, d\varphi(x) = x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(x)\, dx = \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(1-\delta)} x^{2-\delta} -$$

$$- \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(1-\delta)} \int_0^x u^{1-\delta}\, du + O\left(\frac{x^{2-\delta}}{\ln x}\right) + O\left(\int_0^x \frac{u^{1-\delta}}{\ln u}\, du\right) =$$

$$= \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(2-\delta)} x^{2-\delta} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\}.$$

Отсюда, полагая $\lambda_n = x$, получим:

$$n = \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(2-\delta)} \lambda_n^{2-\delta} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln \lambda_n}\right)\right\}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi(2-\delta)}{H \sin \pi\delta} n\right)^{\frac{1}{2-\delta}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\},$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть $\lambda_n = \mu_n + i\eta_n$ — комплексные числа,*

$$0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \to \infty, \quad \eta_n = O(\mu_n^\gamma), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{21}$$

и ряд $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + x)}$ сходится при $x > 0$. Тогда оценка

$$s(x) = Hx^{-\delta} + O(x^{-\delta-\theta}), \quad \theta > 0, \tag{22}$$

влечет за собой оценки:

$$\sum_{|\lambda_n| \leqslant x} 1 = \frac{H \sin \pi\delta}{\pi(2-\delta)} x^{2-\delta} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right\},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2-\delta)}{H \sin \pi\delta} n\right)^{\frac{1}{2-\delta}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right\}.$$

Справедливость этих утверждений легко вытекает из следствия 1. Действительно, так как, согласно (21),

$$\frac{1}{\mu_n(\mu_n + x)} < c \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + x)}\right]$$

и, согласно (22),

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + x)} = Hx^{-\delta} + O(x^{-\delta-\theta}),$$

то

$$\sum_{\mu_n \leqslant x} \frac{1}{\mu_n} \leqslant c_1 x \sum_{\mu_n \leqslant x} \frac{1}{\mu_n(\mu_n + x)} < c_2 x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n(\mu_n + x)} <$$

$$< c_3 x \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + x)} < c_4 x^{1-\delta}.$$

Поэтому, имея в виду (21), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n(\mu_n + x)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n + x)} = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\eta_n(\lambda_n + x)|}{|\lambda_n \mu_n(\mu_n + x)(\lambda_n + x)|}\right) =$$

$$= O\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^{\gamma-2}}{\mu_n+x}\Big) = O\Big\{\Big|\int_0^{\infty}\sum_{\mu_n\leqslant u}\frac{1}{\mu_n}\,d\Big(\frac{u^{\gamma-1}}{u+x}\Big)\Big|\Big\} =$$

$$= O\Big(\int_0^{\infty}\frac{u^{\gamma-\delta-1}}{u+x}\,du\Big) = O\,(x^{-\delta-1+\gamma}). \qquad (23)$$

Из (22) и (23) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n(\mu_n+x)} = Hx^{-\delta} + O\,(x^{-\delta-\omega}),$$

где $\omega = \min(\theta, 1-\gamma)$. Отсюда, применяя следствие 1, выводим:

$$\sum_{\mu_n\leqslant x} 1 = \frac{H\sin\pi\delta}{\pi(2-\delta)}\,x^{2-\delta}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\}, \quad \mu_n = \Big(\frac{\pi(2-\delta)}{H\sin\pi\delta}\,n\Big)^{\frac{1}{2-\delta}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big\}.$$

Из этих равенств и (21) находим:

$$\sum_{|\lambda_n|\leqslant x} 1 = \frac{H\sin\pi\delta}{\pi(2-\delta)}\,x^{2-\delta}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln x}\Big)\Big\},$$

$$\lambda_n = \Big(\frac{\pi(2-\delta)}{H\sin\pi\delta}\,n\Big)^{\frac{1}{2-\delta}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big\}.$$

Эти оценки неулучшаемы, что следует из неулучшаемости теоремы.

Поступило
24. V. 1960

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Notes on the theory of series (XI): On Tauberian theorems, Proc. Lond. Mathem. Soc., 30 (1928), 23—37.
[2] Carleman T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Den Attonde Skandinaviska Matematikerkongressen (1934), 34—44.
[3] Carleman T., Über die Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen, Berichte über die Werhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, 88 (1936), 119—132.
[4] Wiener N., A theorem of Carleman, The Science Reports of Nat. Tsing-Hua Univ., (A) 3 (1936), 291—298.
[5] Pleijel Å., On a theorem of Carleman, Matematiks tidsskrift, 13 (1952), 39—43.
[6] Avakumovič G. V., Bemerkung über einen Satz des Herrn T. Carleman, Math. Zeitschr., 53, Heft 1 (1950), 53—58.
[7] Вучкович В., Стилтьјесова трансформација Која опада врзином експоненцијалне функција, Srapska akademija nauk, Zbornik radova, 35, Matem. institut, 3 (1953), 255—288.
[8] Vučkovič V., Quelques théorèmes relatifs à la transformation de Stiltjes, Publ. Institut mathem. Acad. Serbe, VI (1954), 63—74.
[9] Левитан Б. М., Марченко В. А. и Наймарк М. А., Спектральная теория дифференциальных операторов, Труды 3-го Всесоюзн. матем., съезда, т. III (1958), 101—116.
[10] Freud G., Restgleid eins Tauberschen Satzes. II, Acta matematica, Acad. Scientiorum Hungarical, 3 (1952), 299—307.
[11] Korevaar J., An estimate of the error in Tauberian theorems for power series, Duke Math. Journ., 18 (1951), 723—734.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
25 (1961), 935—936

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 25

DATE DUE